Questions/Réponses : Nature des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Plaçons-nous dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ rapporté à la base canonique $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4)$. Le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

est $\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^3$, et la recherche des espaces propres $E(-1)$ et $E(1)$ associés aux valeurs propres -1 et 1 de A nous conduisent à résoudre les systèmes linéaires

$$(1)\quad \begin{cases} y+z=0 \\ -x+3y+z-t=0 \\ 5x-3y-z+5t=0 \\ 4x-2y-2z+4t=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2)\quad \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -x+y+z-t=0 \\ 5x-3y-3z+5t=0 \\ 4x-2y-2z+2t=0. \end{cases}$$

Ces deux systèmes sont certes équivalents à

$$(1')\quad \begin{cases} y=z=0 \\ x=-t \end{cases} \quad \text{et} \quad (2')\quad \begin{cases} y=-z \\ x=t=0, \end{cases}$$

mais je ne comprends pas pourquoi je peux en déduire que $E(-1)$ est une droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1(-1,0,0,1)$, et pourquoi $E(1)$ est aussi une droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_2(0,-1,1,0)$.

Q1 : Qu'est-ce qu'une droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1$?

Q2 : Comment prouver que $(1')$ représente des équations cartésiennes d'une droite vectorielle ?

Q3 : J'ai compris la réponse à la question **Q2**, mais j'ai entendu parler d'un système infaillible permettant d'obtenir immédiatement la dimension d'un sous-espace vectoriel F de E défini par k équations. Cette dimension est toujours $n-k$. Est-ce juste ? J'ai aussi entendu parler **d'équations indépendantes**. Qu'est-ce que cela signifie ? Peut-on énoncer ce résultat de façon très précise ?

Q4 : Je comprends maintenant les réponses aux questions précédentes. Mais je me demande bien ce que l'on pourrait faire avec des systèmes du genre

$$(3)\quad \begin{cases} 2x+5y+z-t+2u=0 \\ -x+3y+z-t+9u=0 \end{cases} \quad ; \quad (4)\quad \begin{cases} 4x+y+5z-t=0 \\ 5x+y-z+5u=0 \\ 6x+y-7z+t+10u=0 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} 4x+y+5z-t=0 \\ 5x+y-z+5u=0 \\ 2x-u=0 \end{cases}$$

dans $\mathbb{R}^5$. Que dire de tels sous-espaces vectoriels ?

[0] [ured0032] v1.03β Dany-Jack Mercier

$\overline{}$

Solution :

Q1 : Qu'est-ce qu'une droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1$?

R1 : Une **droite vectorielle est un sous-espace vectoriel de dimension** 1 **de** E. Ici, E représente un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n. Un sous-espace vectoriel de E est un ensemble F qui est lui-même structuré en espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et ceci pour exactement les mêmes lois d'addition interne + et de multiplication externe notée "." que celles définies sur E.

Pour bien comprendre la définition d'une droite vectorielle, il faut se rappeler quelques résultats et définitions d'algèbre linéaire. Tout d'abord, il faut savoir qu'une partie non vide F de E est un sous-espace vectoriel si et seulement si elle vérifie

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in F.$$

Cette caractérisation est précieuse. Ensuite, il faut se rappeler de la définition d'une base d'un espace vectoriel E. Un système de n vecteurs $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n)$ est une **base** de E si et seulement si c'est un système à la fois **libre** et **générateur** de E. Et l'on dit que $\mathcal{B}$ est un **système libre** s'il n'existe pas de combinaison linéaire nulle des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n$ qui ne soit pas triviale, autrement dit si

$$\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{u}_n = \overrightarrow{0} \Rightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0).$$

Et l'on doit aussi rappeler que $\mathcal{B}$ est un **système générateur** de E si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n$. Cela se traduit ainsi :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E \quad \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad \overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{u}_n.$$

Une espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il possède au moins un système générateur ne comportant qu'un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on démontre - et nous admettrons ici - qu'il existe au moins une base de E, et que toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments (Théorème de la dimension). Le nombre d'éléments n d'une base quelconque de E est ce que l'on appelle la **dimension de l'espace vectoriel** E.

Une droite vectorielle est donc un sous-espace vectoriel de E qui possède une base $(\overrightarrow{u}_1)$ formée d'un seul élément : le vecteur $\overrightarrow{u}_1$. Ce vecteur $\overrightarrow{u}_1$ ne peut pas être nul (il faut qui forme un système libre à lui tout seul !) et l'on peut donc affirmer que D est une droite vectorielle si et seulement si

$$D = \{\overrightarrow{u} \in E \,/\, \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{u}_1\}.$$

Il est commode de poser alors $D = \mathbb{R}\overrightarrow{u}_1$ et de dire que D est la **droite vectorielle de vecteur directeur** $\overrightarrow{u}_1$.

On sait aussi définir la notion de **sous-espace vectoriel de** E **engendré par une partie** $\mathcal{A}$ de E. C'est, par définition, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la partie $\mathcal{A}$, et on le note $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$. Le lecteur vérifiera (en détail !) que

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{A}) = \{\overrightarrow{u} \in E \,/\, \exists n \in \mathbb{N}^* \ \exists (\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_1) \in \mathcal{A}^n \ \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ \overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_1 \overrightarrow{u}_1\},$$

autrement dit que l'espace $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$ engendré par $\mathcal{A}$ est formé de toutes les combinaisons linéaires imaginables (mais finies) de vecteurs dans $\mathcal{A}$. La droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1$ pourra donc encore s'écrire sous la forme $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1)$.

Remarques : Un plan vectoriel est un sous-espace vectoriel de dimension 2, et s'écrit donc sous la forme $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ où $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ est un système libre. Un hyperplan vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, où n désigne la dimension de E.

Q2 : Comment prouver que $(1')$ représente des équations cartésiennes d'une droite vectorielle ?

R2 : On choisit certaines variables x, y, z ou t comme paramètres, et l'on exprime les autres variables en fonction de ces paramètres. Cela revient à distinguer, dans le système, des **inconnues principales** et des **inconnues secondaires** (c'est-à-dire des inconnues qui sont fonction des inconnues principales). Les inconnues secondaires jouent le rôle de paramètres pouvant prendre absolument toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{R}$, et une fois ces valeurs fixées, le système proposé ne possède qu'une seule solution en les inconnues principales (autrement dit, le système dont les inconnues sont les inconnues principales et dont les inconnues secondaires ont été arbitrairement fixées, est un système de Cramer) . Ici,

$$(1') \quad \begin{cases} y = z = 0 \\ x = -t \end{cases}$$

donc le vecteur $\overrightarrow{u}(x, y, z, t)$ vérifie $(1')$ si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ici nous avons choisi t comme paramètre (i.e. comme inconnue secondaire) et x, y, z comme inconnues principales. Une seule "inconnue" peut évoluer comme elle le désire - c'est t -et notre système possède un seul "degré de liberté". Les autres inconnues sont déterminées en fonction de t. C'est ce que nous avons écrit en TD, rappelez-vous... Comme le vecteur $\overrightarrow{u}_1$ de coordonnées $(-1, 0, 0, 1)$ n'est pas nul, il forme un système libre à lui tout seul ! (vérifiez-le) et l'on vient d'écrire que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ vérifiant $(1')$ (i.e. appartenant à $E(-1)$) est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}_1$. Le système $(\overrightarrow{u}_1)$, ne comportant qu'un seul vecteur, est donc à la fois un système libre et un système générateur de $E(-1)$, c'est-à-dire une base de $E(-1)$. La réponse **R1** explique alors clairement pourquoi l'on dit que $E(-1)$ est une droite vectorielle. En conclusion $E(-1) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1)$ avec $\overrightarrow{u}_1(-1, 0, 0, 1)$.

Q3 : J'ai compris la réponse à la question **Q2**, mais j'ai entendu parler d'un système infaillible permettant d'obtenir immédiatement la dimension d'un sous-espace vectoriel F de E défini par k équations. Cette dimension est toujours $n - k$. Est-ce juste ? J'ai aussi entendu parler d'équations indépendantes. Qu'est-ce que cela signifie ? Peut-on énoncer ce résultat de façon très précise ?

R3 : Les trois équations $y = 0$, $z = 0$ et $x = -t$ de $(1')$ sont "indépendantes", et cela signifie que l'on ne peut obtenir l'une d'entre elles comme une combinaison linéaire des deux autres. Un résultat très général me montre alors que $E(-1)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $4 - 3 = 1$, c'est-à-dire une droite vectorielle.

Avant d'aller plus loin, je précise ce que j'entend par une "**combinaison linéaire des deux autres équations**", puisque cela est une façon de parler très utilisée. Si l'on fait tout passer dans le premier membre, on obtient le système

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x + t = 0. \end{cases}$$

Je peux appeler combinaison linéaire des deux premières équations $(y = 0)$ et $(z = 0)$ toute écriture formelle $\lambda (y = 0) + \mu (z = 0)$ qui équivaut, par définition, à l'équation $(\lambda y + \mu z = 0)$. En d'autres termes, une combinaison linéaire de deux équations $f(x, y, z, t) = 0$ et $g(x, y, z, t) = 0$ est une équation de la forme $\lambda f(x, y, z, t) + \mu g(x, y, z, t) = 0$.

De façon plus générale, considérons le système linéaire suivant de k équations à n inconnues x_1, ..., x_n :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n = 0. \end{cases}$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$(S) \quad \begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ f_k(x_1, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

où chacune des fonctions $f_i(x_1, ..., x_n) = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On sait (là, je fais appel à vos connaissances sur la dualité... ce qui vous donnera peut-être l'occasion de me poser de nouvelles questions à notre prochain TD...) que la forme linéaire f_i s'exprime alors sous la forme

$$f_i = a_{i1}e_1^* + ... + a_{in}e_n^*$$

où $e^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ désigne la base duale de la base canonique $e = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Notons E^* l'espace vectoriel dual de $E = \mathbb{R}^n$ (c'est par définition l'espace des formes linéaires définies sur E). L'application f_i est tout simplement un vecteur de E^* de coordonnées $(a_{i1}, ..., a_{in})$ dans la base e^*. Si vous n'avez pas envie de vous casser la tête (et de réviser tout de suite le cours sur la dualité), vous pouvez considérer que $f_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (ce qui revient à identifier E^* à $\mathbb{R}^n$ en utilisant les coordonnées des vecteurs de E^* dans la base duale e^*, et ce qui est donc, somme toute, anodin...).

Puisque $f_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (un vecteur-ligne ou un vecteur-colonne selon les goûts), l'affirmation "le système de vecteurs $(f_1, ..., f_k)$ est libre" a un sens, comme dans n'importe quel espace vectoriel, et signifie que

$$\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_k) = (0, ..., 0).$$

Cela, nous l'exprimerons en disant que "**les équations $f_i(x_1, ..., x_n) = 0$ de (S) sont indépendantes (on peut aussi dire "linéairement indépendantes")**.

Il est temps de retourner à notre système (S), et de comprendre pourquoi ce système décrit un sous-espace vectoriel F de dimension $n-k$ *lorsque je suppose que les k équations de ce système sont indépendantes*. Définissons l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^k \\ & x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Si je pose $f(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix}$, je constate que f est définie de façon analytique, dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée, par

$$f: \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \\ ... \\ x'_k = a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n, \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & ... & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

et cela me montre (algèbre linéaire...) que la matrice de f dans ces bases canoniques est

$$M := \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & ... & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse les k équations de ce système sont indépendantes, donc les k vecteurs-lignes

$$l_1 = (a_{11}, ..., a_{1n}), ..., l_k = (a_{k1}, ..., a_{kn})$$

de cette matrice forment un système libre, et le rang de M sera $\mathrm{rg}\, M = k$. L'image $\mathrm{Im}\, f$ de $\mathbb{R}^n$ par f est égale au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(c_1, ..., c_n)$ engendré par les vecteurs-colonnes de M, et l'on aura donc $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim \mathrm{Vect}(c_1, ..., c_n) = \mathrm{rg}\, M = k$. Le Théorème du rang appliqué à l'application linéaire $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ nous donne alors

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - \dim(\mathrm{Im}\, f) = n - k.$$

Il suffit de noter que $\mathrm{Ker}\, f$ coïncide avec le sous-espace vectoriel F des vecteurs de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant (S) pour conclure : le dimension de F est $n-k$.

On pourra retenir :

Théorème 1 *Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ décrit par k équations linéairement indépendantes*

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n=0\\ ...\\ a_{k1}x_1+...+a_{kn}x_n=0.\end{array}\right.$$

est de dimension $n-k$.

Plus généralement - et avec la même méthode - on obtient :

Théorème 2 *Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ décrit par k équations*

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n=0\\ ...\\ a_{k1}x_1+...+a_{kn}x_n=0.\end{array}\right.$$

est de dimension $n-r$ où r désigne le rang des formes linéaires $(f_1,...,f_k)$ définies par $f_i(x_1,...,x_n)=a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n$. Bien entendu, r est aussi le rang des vecteurs lignes $l_1=(a_{11},...,a_{1n})$, ..., $l_k=(a_{k1},...,a_{kn})$ formées à l'aide des coefficients qui interviennent dans le système.

Q4 : Je comprends maintenant les réponses aux questions précédentes. Mais je me demande bien ce que l'on pourrait faire avec des systèmes du genre

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} 2x+5y+z-t+2u=0\\ -x+3y+z-t+9u=0\end{array}\right.\quad;\quad(4)\quad\left\{\begin{array}{l} 4x+y+5z-t=0\\ 5x+y-z+5u=0\\ 6x+y-7z+t+10u=0\end{array}\right.$$

ou bien

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l} 4x+y+5z-t=0\\ 5x+y-z+5u=0\\ 2x-u=0\end{array}\right.$$

dans $\mathbb{R}^5$. Que dire de tels sous-espaces vectoriels ?

R4 : On doit surtout profiter de ces trois systèmes pour s'entraîner... Essayez donc de trouver les sous-espaces vectoriels qu'ils décrivent avant de lire la suite, puis comparer ce qui suit avec ce que vous avez trouvé.

Les deux équations du système (3) sont indépendantes puisque je peux extraire (des coefficients) un sous-déterminant d'ordre 2 non nul. Le premier est le bon, c'est $\begin{vmatrix} 2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}=11$ (pouvez-vous justifier complètement cette phrase ? Au besoin, n'hésitez pas à venir me poser des questions... Il est important d'approfondir toutes ces notions surtout si vous voulez passer des concours et continuer dans ces voies très... mathématiques). La dimension de l'espace F_3 décrit par (3) sera donc $5-2=3$. On peut avoir envie de trouver une base de F_3. Pour cela, on peut écrire

$$(3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 3x+2y-7u=0\\ -x+3y+z-t+9u=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=7u\\ -x+3y=-z+t-9u\end{array}\right.$$

et il ne reste plus qu'à résoudre un système de Cramer en les inconnues (x, y) (ce sont des inconnues principales : rappelez-vous, le déterminant extrait correspondant à ces inconnues valait 11, était non nul, donc...). Avec la méthode des **combinaisons linéaires** (mais rien ne vous empêche de préférer la méthode de **substitution**, celle du **pivot de Gauss**, ou encore celle des **déterminants**) (ces noms doivent avoir un sens pour vous en seconde année, sinon, au travail...), on obtient

$$
\begin{aligned}
(3) \quad \Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} 11y = 7u + 3\,(-z + t - 9u) \\ -2x - 9x = 2\,(-z + t - 9u) - 3\,(7u) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 11y = 14u - 3z + 3t \\ -11x = -2z + 2t - 39u \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{11}\,(-20u - 3z + 3t) \\ x = \frac{1}{11}\,(2z - 2t + 39u)\,. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Les variables u, z et t pourront être choisies comme paramètres pouvant décrire tout l'ensemble $\mathbb{R}$, et les inconnues x et y sont alors parfaitement déterminées en fonction de ces paramètres. On exprime ce fait en disant que les inconnues x et y ont été choisies comme inconnues principales tandis que les autres inconnues ont été choisies comme inconnues secondaires. Enfin, j'explicite tout cela, mais ce n'est pas utile pour la suite. Pour comprendre ce qui se passe, il suffit de dire que le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y, z, t, u) dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ appartient à F_3 si et seulement si il existe trois réels z, t, u tels que

$$
\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11}\,(2z - 2t + 39u) \\ \frac{1}{11}\,(-20u - 3z + 3t) \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \frac{39}{11} \\ -\frac{20}{11} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Les trois vecteurs-colonnes

$$
\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} \frac{39}{11} \\ -\frac{20}{11} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

forment un système libre (pourquoi donc ?) et générateur de F_3 (comment l'expliqueriez-vous ?) **donc une base de** F_3. Et l'on remarquera que l'on peut très bien préférer la base formée par les trois vecteurs

$$
11\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad 11\overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad 11\overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 39 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

dont les coordonnées sont entières (justifiez-le complètement...).

Avec le système (4), les choses sont un peu différentes. Si l'on n'a pas d'idée précise, on peut toujours utiliser la méthode du pivot de Gauss. On choisit les meilleurs pivots : par exemple y pour commencer. On trouve :

$$(4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + y + 5z - t = 0 \\ 5x + y - z + 5u = 0 \\ 6x + y - 7z + t + 10u = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + 5z - t = 0 \\ x - 6z + 5u + t = 0 \\ 2x - 12z + 2t + 10u = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -4x - 5z + t \\ x - 6z + 5u + t = 0 \\ 2x - 12z + 2t + 11u = 0 \end{cases}$$

Ensuite, on continue en utilisant le pivot x sur les deux dernières lignes (cette méthode est une "systématisation" de la méthode de substitution, la première ligne m'ayant déjà débarrassé de y en l'exprimant parfaitement en fonction des autres inconnues). On obtient :

$$(4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -4x - 5z + t \\ x - 6z + 5u + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x - 5z + t \\ x - 6z + 5u + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -4\,(6z - 5u - t) - 5z + t \\ x - 6z + 5u + t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -29z + 20u + 5t \\ x = 6z - 5u - t \end{cases}$$

et la très nette disparition d'une ligne ! Il y avait donc une ligne "inutile" dans le système (4). Autrement dit les 3 lignes du système (4) n'étaient pas linéairement indépendantes : il y avait une relation de dépendance linéaire entre elle, et on l'a dévoilée. Finalement (4) est équivalent à un système formé de deux lignes indépendantes, et décrit un sous-espace vectoriel de dimension $5-2=3$. Une base de ce sous-espace s'obtiendra encore en écrivant que le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y, z, t, u) dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ appartient à F_4 si et seulement si il existe trois réels z, t, u tels que

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z - 5u - t \\ -29z + 20u + 5t \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 6 \\ -29 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vient de mettre en évidence trois vecteurs-colonnes qui forment une base de F_4.

Travaillons avec le système (5) pour terminer. On a (en substituant des inconnues en fonction d'autres inconnues, et en vérifiant sans cesse qu'on conserve l'équivalence !)

$$(5) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + y + 5z - t = 0 \\ 5x + y - z + 5u = 0 \\ 2x - u = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + 5z - t = 0 \\ 15x + y - z = 0 \\ u = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + y + 5z - t = 0 \\ y = z - 15x \\ u = 2x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -11x + 6z - t = 0 \\ y = z - 15x \\ u = 2x \end{cases}$$

soit

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6z - 11x \\ y = z - 15x \\ u = 2x. \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y, z, t, u) dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ appartient donc à F_5 si et seulement si il existe deux réels z, x tels que

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z - 15x \\ z \\ 6z - 11x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 0 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et cela signifie que F_5 est le plan vectoriel dont une base est $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ avec

$$\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 0 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$