Réponse :

a) $p_n(1) = n - (n+2) + n + 2 - n = 0$ donc 1 est une racine de p_n. On a :

$$\begin{cases} p_n'(x) = n(n+1)x^n - n\,(n+2)\,x^{n-1} + n \\ p_n''(x) = n^2(n+1)x^{n-1} - n(n-1)\,(n+2)\,x^{n-2} \end{cases}$$

donc $p_n'(1) = 0$ et $p_n''(1) = n^2(n+1) - n(n-1)\,(n+2) = 2n \neq 0$. Cela montre que 1 est une racine d'ordre 2 de p_n.

b) • $p_n''(x) = nx^{n-2}\,[n(n+1)x - (n-1)\,(n+2)]$ donc les racines de $p_n''(x)$ sont 0 et

$$\nu = \frac{(n-1)\,(n+2)}{n(n+1)}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \nu < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (n-1)\,(n+2) < n(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 + n - 2 < n^2 + n \quad \text{vrai} \end{aligned}$$

donc $\nu < 1$.

• **Montrons que $p_n'(\nu) < 0$.** On a :

$$\begin{aligned} p_n'(\nu) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (n+1)\nu^n - (n+2)\,\nu^{n-1} + 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (n+1)\nu^n + 1 < (n+2)\,\nu^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (n+1)\nu + B < n+2 \qquad (*) \end{aligned}$$

en posant :

$$B = \frac{1}{\nu^{n-1}} = \left(\frac{n(n+1)}{(n-1)\,(n+2)}\right)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(n-1)\,(n+2)}{n} + B < n+2 \\ &\Leftrightarrow \quad B < (n+2)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad B < \frac{n+2}{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{(n-1)\,(n+2)}\right)^{n-1} < \frac{n+2}{n}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité s'écrit successivement :

$$(n-1)\,[\ln n + \ln(n+1) - \ln(n-1) - \ln(n+2)] < \ln(n+2) - \ln n$$

$$(n-1)\,(\ln(n+1) - \ln(n-1)) < n\ln(n+2) - n\ln n$$

$$(n-1)\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) < n\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

ce que l'on peut écrire $f(n-1) < f(n)$ en posant $f(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$. L'inégalité $(*)$ sera donc démontrée si l'on prouve que l'application f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) + x\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(\frac{-2}{x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}.$$

Il s'agit de montrer que :

$$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} > 0$$

pour tout $x \geq 1$, ou encore :

$$h(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t+1} > 0$$

pour tout $t \geq 1/2$. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$h'(t) = \frac{1}{1+\frac{1}{t}}\left(\frac{-1}{t^2}\right) + \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{-1}{t(t+1)^2} < 0$$

dès que $t > 0$, donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{2}{3} \simeq 0,43 > 0$$

et $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$, donc tout cela nous assure que $h(t) > 0$ pour tout $t \geq 1/2$. Cela achève cette vérification !

Remarque : Je n'ai pas trouvé de méthode plus intéressante pour vérifier que $p_n'(\nu) < 0$, ce dont j'ai pourtant besoin dans la suite. Cet exercice fait perdre un temps précieux. En l'abordant pendant un écrit de concours, j'aurais été amené à le sauter assez vite pour essayer de gagner des points plus commodes ailleurs, quitte bien sûr à s'il me reste du temps. En concours, il faut garder un oeil sur sa montre...

• **Etude des variations de p_n.**

Comme $p_n''(x) = nx^{n-2}\left[n(n+1)x - (n-1)(n+2)\right]$, on envisage deux cas suivant la parité de n. On obtient les tableaux de variations des FIG. 1 et 2 en nous transformant en Sherlock Holmes, en étudiant des limites, des signes et des variations de fonctions, et en utilisant les liens entre variations d'une fonction et signe de la fonction dérivée.

c) Si n est impair, le tableau de variations de la FIG. 1 montre que p_n admet trois racines réelles a, b et 1. Il montre aussi que $p_n'(b) > 0$, donc que b est une racine d'ordre 1. Comme 0 est une racine d'ordre 2 (voir question a), on en déduit que a est une racine d'ordre $(n+1)-1-2 = n-2$.

Si n est pair, le tableau de la FIG. 2 montre que p_n admet seulement deux racines réelles a et 1. Comme 1 est d'ordre 2, a sera d'ordre $(n+1)-2 = n-1$.

Remarque : Une machine peut nous tracer la courbe représentative de $p_n(x)$ et nous donner des approximations des racines réelles de $p_n(x)$ pour des petites valeurs de n.
Pour $n = 3$, $p_3(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x - 1$. On obtient la FIG. 3 et les valeurs approchées $-0,767$, $0,434$ et 1 des racines.
Pour $n = 4$, $p_4(x) = 4x^5 - 6x^4 + 4x - 2$. On obtient la FIG. 4 et les valeurs approchées $0,657$ et 1. On remarque que, dans les deux cas, les courbes sont très proches de l'horizontale entre deux des extrema.

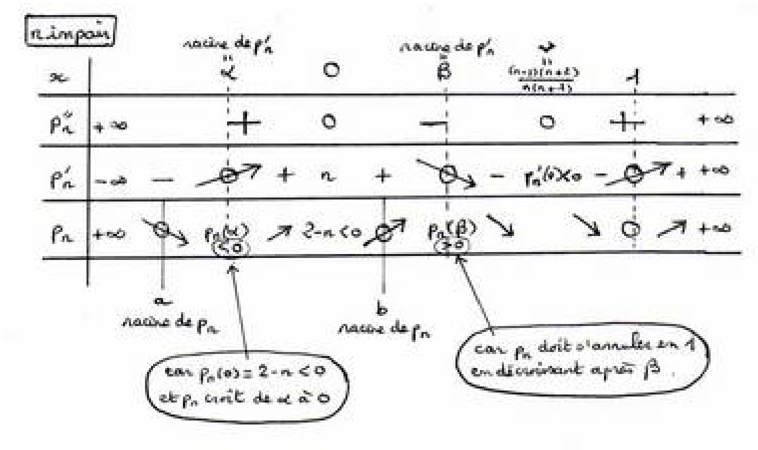

Figure 1: Cas où n est impair

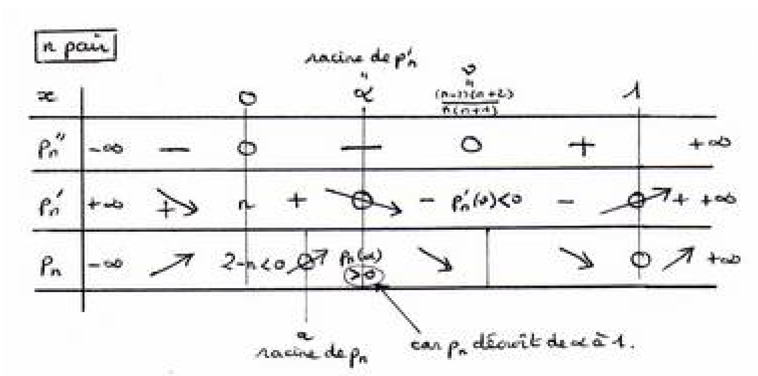

Figure 2: Cas où n est pair

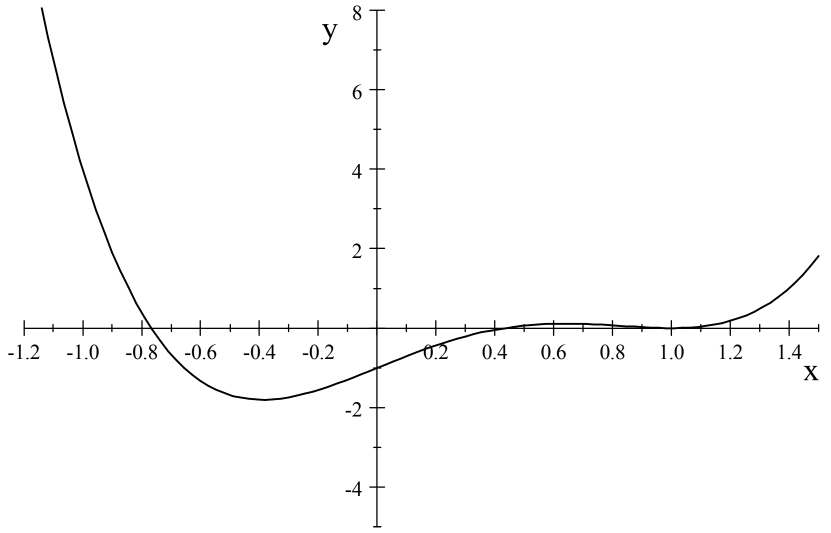

Figure 3: $p_3(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x - 1$

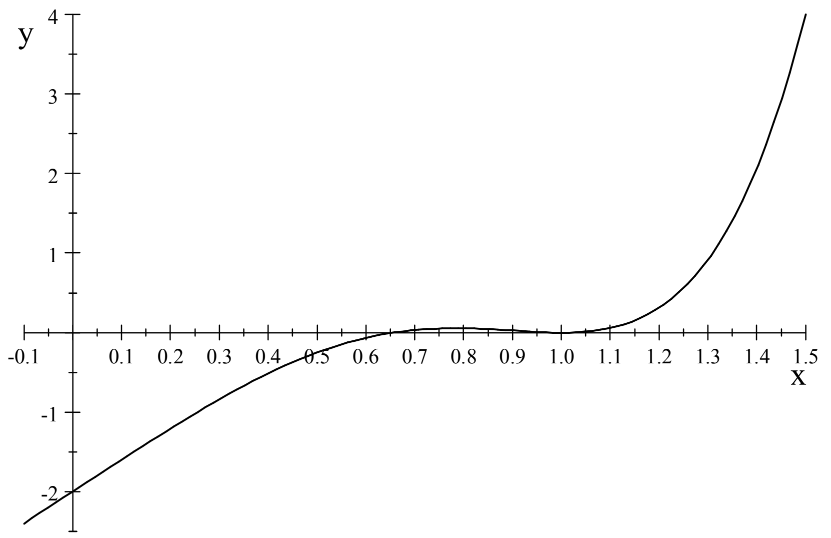

Figure 4: $p_4(x) = 4x^5 - 6x^4 + 4x - 2$