Une expérience en préparation concours : l'utilisation de TD spécialisés orientés sur l'apprentissage des fondamentaux

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe / CRREF

18 mars 2011

I. LE CONSTAT

Partie II.A : Résultats généraux sur les groupes et les anneaux

1. Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$. [20%]

Partie II.A : Résultats généraux sur les groupes et les anneaux

1. Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$. [20%]
2. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier. [13%]

Partie II.A : Résultats généraux sur les groupes et les anneaux

1. Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$. [20%]
2. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier. [13%]
3. Factorisation de polynômes.

Partie II.A : Résultats généraux sur les groupes et les anneaux

1. Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$. [20%]
2. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier. [13%]
3. Factorisation de polynômes.
    1. Soit P un polynôme de degré k supérieur ou égal à 1, à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est un entier premier. Montrer que P admet au plus k racines (on pourra raisonner par récurrence sur k). [0%]

Partie II.A : Résultats généraux sur les groupes et les anneaux

1. Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$. [20%]
2. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier. [13%]
3. Factorisation de polynômes.
    1. Soit P un polynôme de degré k supérieur ou égal à 1, à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est un entier premier. Montrer que P admet au plus k racines (on pourra raisonner par récurrence sur k). [0%]
    2. (b) Déterminer, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, les racines du polynôme $P(X) = X^2 - X$. Que peut-on en conclure ? [21%]

CAPES externe 2003 (2e comp.)

Partie II.A : Résultats généraux sur les groupes et les anneaux

1. Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$. [20%]
2. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier. [13%]
3. Factorisation de polynômes.
    1. Soit P un polynôme de degré k supérieur ou égal à 1, à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est un entier premier. Montrer que P admet au plus k racines (on pourra raisonner par récurrence sur k). [0%]
    2. (b) Déterminer, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, les racines du polynôme $P(X) = X^2 - X$. Que peut-on en conclure ? [21%]
    3. (c) Trouver, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$, deux factorisations distinctes de $X^2 - X$ sous la forme $(X - \dot{a})(X - \dot{b})$. [23%]

Toujours dans la Partie II.A :

1. On rappelle que si x est élément d'un groupe fini G, l'ordre de x est le plus petit entier naturel k non nul tel que $x^k = 1$, où 1 désigne l'élément neutre de G.

[Le pourcentage entre crochets indique le taux de réussite pour la question.]

Toujours dans la Partie II.A :

1. On rappelle que si x est élément d'un groupe fini G, l'ordre de x est le plus petit entier naturel k non nul tel que $x^k = 1$, où 1 désigne l'élément neutre de G.
    1. (a) Soit x un élément de G, groupe fini de cardinal n ; montrer que, si k est l'ordre de x, alors l'ensemble $\{1, x, ..., x^{k-1}\}$ est un sous-groupe de G. En déduire que l'ordre de x divise le cardinal de G, et que $x^n = 1$. [16%]

[Le pourcentage entre crochets indique le taux de réussite pour la question.]

Toujours dans la Partie II.A :

1. On rappelle que si x est élément d'un groupe fini G, l'ordre de x est le plus petit entier naturel k non nul tel que $x^k = 1$, où 1 désigne l'élément neutre de G.
   1. (a) Soit x un élément de G, groupe fini de cardinal n ; montrer que, si k est l'ordre de x, alors l'ensemble $\{1, x, ..., x^{k-1}\}$ est un sous-groupe de G. En déduire que l'ordre de x divise le cardinal de G, et que $x^n = 1$. [16%]
   2. (b) Si p est un entier naturel premier et x un entier naturel non divisible par p, montrer que $x^{p-1} - 1$ est divisible par p. [0%]

[Le pourcentage entre crochets indique le taux de réussite pour la question.]

Voici les résultats obtenus par les 9 étudiants qui composèrent sur ce problème en septembre 2008, en simulation de concours (5h).
Les étudiants A et B étaient des redoublants.

Question :	1	2	3.a	3.b	3.c	4.a	4.b
Barême :	6	4	4	4	3	8	3
A	0	0	0	0	0	0	0
B	6	0,5	0	4	3	5	0
C	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	2	0
E	1	4	0	3,5	3	4	0
F	0	0	0	0	0	0	0
G	3	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0

Barême sur 32

Taux de réussite :
Redoublants : 29%
Primo-arrivant : 9%

$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est l'ensemble des nombres complexes $a + ib\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $N(z) = z\bar{z} = |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, commutatif et intègre. [61%]

Agrégation interne 2007 (1re comp.) Partie II

$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est l'ensemble des nombres complexes $a + ib\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $N(z) = z\overline{z} = |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, commutatif et intègre. [61%]
    1. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, le nombre $N(\alpha)$ est entier. [80%]

$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est l'ensemble des nombres complexes $a + ib\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $N(z) = z\bar{z} = |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, commutatif et intègre. [61%]
    1. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, le nombre $N(\alpha)$ est entier. [80%]
    2. (b) Démontrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont les éléments α tels que $N(\alpha) = 1$. [30%]

$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est l'ensemble des nombres complexes $a + ib\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $N(z) = z\bar{z} = |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, commutatif et intègre. [61%]
    1. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, le nombre $N(\alpha)$ est entier. [80%]
    2. (b) Démontrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont les éléments α tels que $N(\alpha) = 1$. [30%]
    3. (c) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. [36%]

$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est l'ensemble des nombres complexes $a+ib\sqrt{2}$, où $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$. Pour tout $z\in\mathbb{C}$ on pose $N(z)=z\overline{z}=|z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, commutatif et intègre. [61%]
   1. Vérifier que pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, le nombre $N(\alpha)$ est entier. [80%]
   2. (b) Démontrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont les éléments α tels que $N(\alpha)=1$. [30%]
   3. (c) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. [36%]
2. Etant donnés deux éléments α et β, $\beta\neq 0$, de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, démontrer qu'il existe γ et $\delta\in\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tels que $\alpha=\beta\gamma+\delta$ et $|\delta|<|\beta|$. [On pourra prouver l'existence de $\gamma\in\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $\left|\gamma-\frac{\alpha}{\beta}\right|<1$]. [10%]

$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est l'ensemble des nombres complexes $a + ib\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $N(z) = z\overline{z} = |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, commutatif et intègre. [61%]
    1. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, le nombre $N(\alpha)$ est entier. [80%]
    2. (b) Démontrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont les éléments α tels que $N(\alpha) = 1$. [30%]
    3. (c) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. [36%]
2. Etant donnés deux éléments α et β, $\beta \neq 0$, de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, démontrer qu'il existe γ et $\delta \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tels que $\alpha = \beta\gamma + \delta$ et $|\delta| < |\beta|$. [On pourra prouver l'existence de $\gamma \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $|\gamma - \frac{\alpha}{\beta}| < 1$]. [10%]
3. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est principal. [17%]

$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est l'ensemble des nombres complexes $a + ib\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $N(z) = z\overline{z} = |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, commutatif et intègre. [61%]
    1. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, le nombre $N(\alpha)$ est entier. [80%]
    2. (b) Démontrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont les éléments α tels que $N(\alpha) = 1$. [30%]
    3. (c) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. [36%]
2. Etant donnés deux éléments α et β, $\beta \neq 0$, de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, démontrer qu'il existe γ et $\delta \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tels que $\alpha = \beta\gamma + \delta$ et $|\delta| < |\beta|$. [On pourra prouver l'existence de $\gamma \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $|\gamma - \frac{\alpha}{\beta}| < 1$]. [10%]
3. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est principal. [17%]
4. Déterminer les diviseurs irréductibles de 2 dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. [0%]

Voici les résultats des 12 étudiants qui eurent à résoudre ce problème en simulation (5h) en décembre 2009 :

Question :	1	2.a	2.b	2.c	3	4	5
Barême :	4	2	2	2	4	2	2
A	4	2	2	2	4	2	N
B	2	2	0	0,5	N	2	N
C	3	2	0	0	N	N	N
D	4	2	2	2	N	N	N
E	3	2	1	0	N	0	0
F	2,5	2	1	2	N	N	0
G	3,5	2	0,5	N	N	N	N
H	2	N	N	N	N	N	N
I	2	2	N	2	N	N	N
J	3	1	0,5	0	0,5	N	N
K	0	2	0	0	N	0	N
L	N	N	N	N	N	N	N

A = Capésienne qui préparait l'agrég. int.

Taux de réussite : 34%

N = Non abordé

Lu dans le rapport du jury du CAPES externe 2009

- Beaucoup de candidats appliquent au polynôme à coefficients complexes de l'énoncé des résultats portant sur des polynômes à coefficients réels : en particulier on trouve l'affirmation que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Lu dans le rapport du jury du CAPES externe 2009

- Beaucoup de candidats appliquent au polynôme à coefficients complexes de l'énoncé des résultats portant sur des polynômes à coefficients réels : en particulier on trouve l'affirmation que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.
- Il est assez étonnant qu'un faible nombre de candidats sachent calculer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique (...).

Lu dans le rapport du jury du CAPES externe 2009

- Beaucoup de candidats appliquent au polynôme à coefficients complexes de l'énoncé des résultats portant sur des polynômes à coefficients réels : en particulier on trouve l'affirmation que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.
- Il est assez étonnant qu'un faible nombre de candidats sachent calculer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique (...).
- Bien peu de candidats arrivent à proposer une démarche cohérente du calcul du déterminant et encore moins présentent un calcul rigoureux essentiellement par ignorance des manipulations élémentaires sur les lignes ou les colonnes qui permettent de simplifier le calcul de tels déterminants.

Lu dans le rapport du jury du CAPES externe 2009

- Quelques candidats pensent à utiliser les classiques relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

Lu dans le rapport du jury du CAPES externe 2009

- Quelques candidats pensent à utiliser les classiques relations entre coefficients et racines d'un polynôme.
- *Au sujet de la définition de l'enveloppe convexe d'une partie du plan, demandée dans la question C.I.1, on peut lire :*
  "Cette question est la plus traitée mais on trouve peu de rédaction rigoureuse. On peut à la lecture des copies légitimement se demander si les candidats ont vu, au moins une fois dans leur cursus, le développement complet de ce genre de démonstration."

Lu dans le rapport du jury du CAPES externe 2009

- La caractérisation d'un triangle équilatéral dont les sommets ont pour affixe a, b, c par la relation :
  $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\left(a+jb+j^2c\right)\left(a+j^2b+jc\right)=0$
  n'apparaît dans aucune copie (Q486 et Q487).

[Les numéros Q486, ... renvoient à [6].]

- La caractérisation d'un triangle équilatéral dont les sommets ont pour affixe a, b, c par la relation :
  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \left(a + jb + j^2 c\right)\left(a + j^2 b + jc\right) = 0$
  n'apparaît dans aucune copie (Q486 et Q487).
- Les candidats pensent que le vecteur dérivé d'un vecteur mobile $\overrightarrow{MF}(t)$ est toujours orthogonal à ce dernier.

[Les numéros Q486, ... renvoient à [6].]

Lu dans le rapport du jury du CAPES externe 2009

- La caractérisation d'un triangle équilatéral dont les sommets ont pour affixe a, b, c par la relation :
  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \left(a + jb + j^2 c\right)\left(a + j^2 b + jc\right) = 0$
  n'apparaît dans aucune copie (Q486 et Q487).
- Les candidats pensent que le vecteur dérivé d'un vecteur mobile $\overrightarrow{MF}(t)$ est toujours orthogonal à ce dernier.
- La nature de la composée de deux réflexions est méconnue de la majorité des candidats qui abordent ces questions (Q383 et Q384).

[Les numéros Q486, ... renvoient à [6].]

Lu dans le rapport du jury du CAPES externe 2009

- La caractérisation d'un triangle équilatéral dont les sommets ont pour affixe a, b, c par la relation :
  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \left(a + jb + j^2 c\right)\left(a + j^2 b + jc\right) = 0$
  n'apparaît dans aucune copie (Q486 et Q487).
- Les candidats pensent que le vecteur dérivé d'un vecteur mobile $\overrightarrow{MF}(t)$ est toujours orthogonal à ce dernier.
- La nature de la composée de deux réflexions est méconnue de la majorité des candidats qui abordent ces questions (Q383 et Q384).
- La traduction géométrique des égalités complexes pose problème à la majorité des candidats.

[Les numéros Q486, ... renvoient à [6].]

Questions :

1. Pourquoi ces questions classiques posent-elles de graves problèmes aux candidats, parfois même à des redoublants ?

Questions :

1. Pourquoi ces questions classiques posent-elles de graves problèmes aux candidats, parfois même à des redoublants ?
2. Dans une préparation à un concours, ne faudrait-il pas se donner comme objectif principal de permettre à chaque étudiant de répondre à toutes les questions classiques que l'on peut poser sur le programme officiel ? (Rapidement et en produisant une rédaction irréprochable.)

Questions :

1. Pourquoi ces questions classiques posent-elles de graves problèmes aux candidats, parfois même à des redoublants ?
2. Dans une préparation à un concours, ne faudrait-il pas se donner comme objectif principal de permettre à chaque étudiant de répondre à toutes les questions classiques que l'on peut poser sur le programme officiel ? (Rapidement et en produisant une rédaction irréprochable.)
3. Une telle démarche, qui se focalise sur l'acquisition des fondamentaux, n'est-elle pas un gage de réussite à l'écrit comme à l'oral du concours ?

Trois épreuves fondamentalement différentes...

- C'est en assistant à des exposés d'entraînement pour l'oral du CAPES externe et de l'agrégation interne que je me suis aperçu que, si la plupart des exposés proposés par les candidats et préparés à l'avance étaient bons, voire excellents, l'entretien qui suivait l'exposé pouvait faire dramatiquement chuter la note.

Trois épreuves fondamentalement différentes...

- C'est en assistant à des exposés d'entraînement pour l'oral du CAPES externe et de l'agrégation interne que je me suis aperçu que, si la plupart des exposés proposés par les candidats et préparés à l'avance étaient bons, voire excellents, l'entretien qui suivait l'exposé pouvait faire dramatiquement chuter la note.
- Je distingue maintenant trois types d'épreuves fondamentalement différentes auxquelles il s'agit de préparer les étudiants qui passent un concours :
  - ✠ **L'écrit**.
  - ✠ **L'exposé** oral.
  - ✠ **L'entretien** qui suit un exposé oral.

Ces épreuves sont différentes :

✠ **L'écrit** — On est "le roi sur sa copie". On choisit les questions auxquelles on va répondre et l'on décide du niveau de précision des explications que l'on proposera.

✠ **L'exposé** — On doit réunir suffisamment de contenu sur le thème proposé, pendant le temps imparti, le structurer, puis l'exposer. On reste encore le maître des questions que l'on traitera.

✠ **L'entretien** — Le jury mène la danse... On ne choisit plus les questions auxquelles on doit répondre, et l'on ne décide plus seul du niveau de précision des réponses. Le jury cherche à savoir si le candidat maîtrise son sujet. Il pose toutes sortes de questions, et pardonne difficilement de ne pas savoir répondre à une question fondamentale.

Imaginons ce que peut penser un examinateur qui...

découvre durant un entretien que le candidat :

- est incapable de proposer une définition rigoureuse d'une bissectrice intérieure d'un triangle (Q116) ;
- ignore comment montrer que les trois bissectrices intérieures d'un triangle concourent (Q31) ;
- reste bouche bée quand on lui demande de démontrer le Théorème de Thalès (Q97) ;
- ne sait pas démontrer le Théorème de Pythagore et sa réciproque sans utiliser le produit scalaire, comme on le ferait en collège (Q133 et Q134) ;
- n'arrive pas à donner la liste de <u>toutes</u> les isométries de l'espace (Q387).

[Les numéros renvoient à [6].]

Conclusion : ces questions sont à travailler en priorité !

- Il me semble nécessaire d'imaginer un travail spécifique d'apprentissage et de consolidation des "fondamentaux". Il s'agit de déterminer quels sont les savoirs "indispensables", puis de trouver une stratégie qui permettre de les acquérir sans trop de douleur.

Conclusion : ces questions sont à travailler en priorité !

- Il me semble nécessaire d'imaginer un travail spécifique d'apprentissage et de consolidation des "fondamentaux". Il s'agit de déterminer quels sont les savoirs "indispensables", puis de trouver une stratégie qui permettre de les acquérir sans trop de douleur.
- L'acquisition des fondamentaux est décisive pour les trois types d'épreuves. Il est donc judicieux de commencer à travailler ces fondamentaux très tôt dans sa préparation.

Conclusion : ces questions sont à travailler en priorité !

- Il me semble nécessaire d'imaginer un travail spécifique d'apprentissage et de consolidation des "fondamentaux". Il s'agit de déterminer quels sont les savoirs "indispensables", puis de trouver une stratégie qui permettre de les acquérir sans trop de douleur.
- L'acquisition des fondamentaux est décisive pour les trois types d'épreuves. Il est donc judicieux de commencer à travailler ces fondamentaux très tôt dans sa préparation.
- Le travail sur les fondamentaux :

Conclusion : ces questions sont à travailler en priorité !

- Il me semble nécessaire d'imaginer un travail spécifique d'apprentissage et de consolidation des "fondamentaux". Il s'agit de déterminer quels sont les savoirs "indispensables", puis de trouver une stratégie qui permettre de les acquérir sans trop de douleur.
- L'acquisition des fondamentaux est décisive pour les trois types d'épreuves. Il est donc judicieux de commencer à travailler ces fondamentaux très tôt dans sa préparation.
- Le travail sur les fondamentaux :
  - permet de préparer de façon conjointe l'écrit, l'épreuve d'exposé et l'épreuve d'entretien,

Conclusion : ces questions sont à travailler en priorité !

- Il me semble nécessaire d'imaginer un travail spécifique d'apprentissage et de consolidation des "fondamentaux". Il s'agit de déterminer quels sont les savoirs "indispensables", puis de trouver une stratégie qui permettre de les acquérir sans trop de douleur.
- L'acquisition des fondamentaux est décisive pour les trois types d'épreuves. Il est donc judicieux de commencer à travailler ces fondamentaux très tôt dans sa préparation.
- Le travail sur les fondamentaux :
  - permet de préparer de façon conjointe l'écrit, l'épreuve d'exposé et l'épreuve d'entretien,
  - permet de disposer à terme d'une masse de connaissances de base que l'on peut mobiliser le moment venu,

Conclusion : ces questions sont à travailler en priorité !

- Il me semble nécessaire d'imaginer un travail spécifique d'apprentissage et de consolidation des "fondamentaux". Il s'agit de déterminer quels sont les savoirs "indispensables", puis de trouver une stratégie qui permettre de les acquérir sans trop de douleur.
- L'acquisition des fondamentaux est décisive pour les trois types d'épreuves. Il est donc judicieux de commencer à travailler ces fondamentaux très tôt dans sa préparation.
- Le travail sur les fondamentaux :
  - permet de préparer de façon conjointe l'écrit, l'épreuve d'exposé et l'épreuve d'entretien,
  - permet de disposer à terme d'une masse de connaissances de base que l'on peut mobiliser le moment venu,
  - permet d'initier ensuite un travail personnel de meilleur qualité.

II. COMMENT S'ENTRAINER ?

Quelle relation peut-il y avoir entre :

- Samuel Hahnemann,

Quelle relation peut-il y avoir entre :

- Samuel Hahnemann,
- Le Kendo,

Quelle relation peut-il y avoir entre :

- Samuel Hahnemann,
- Le Kendo,
- L'entraînement à un concours ?

- Samuel Hahnemann (1755-1843) est l'inventeur de l'homéopathie qui soigne le malade à partir de doses infiniment réduites de substances qui provoquent les mêmes troubles que ceux présents chez le malade.

▶ *Dose réduite, quantum (plus petite mesure indivisible), éléments de réponses, connaissances élémentaires, particules de savoir, répétition, réflexe, ré-utilisation dans un cadre complexe, mobilisation de ses connaissances, sensation...*

- Samuel Hahnemann (1755-1843) est l'inventeur de l'homéopathie qui soigne le malade à partir de doses infiniment réduites de substances qui provoquent les mêmes troubles que ceux présents chez le malade.
- Le Kendo est un sport de combat où il faut répéter un même mouvement suffisamment longtemps pour qu'il devienne naturel et facile à employer le moment venu, dans un combat.

▶ *Dose réduite, quantum (plus petite mesure indivisible), éléments de réponses, connaissances élémentaires, particules de savoir, répétition, réflexe, ré-utilisation dans un cadre complexe, mobilisation de ses connaissances, sensation...*

- Samuel Hahnemann (1755-1843) est l'inventeur de l'homéopathie qui soigne le malade à partir de doses infiniment réduites de substances qui provoquent les mêmes troubles que ceux présents chez le malade.
- Le Kendo est un sport de combat où il faut répéter un même mouvement suffisamment longtemps pour qu'il devienne naturel et facile à employer le moment venu, dans un combat.
- Dans un concours, il faut avoir des réflexes et mobiliser tout un ensemble de connaissances élémentaires. On acquiert ces réflexes et ces connaissances par la répétition et l'utilisation de questions ou d'exercices courts centrés sur les savoirs fondamentaux et les techniques de base.

▶ *Dose réduite, quantum (plus petite mesure indivisible), éléments de réponses, connaissances élémentaires, particules de savoir, répétition, réflexe, ré-utilisation dans un cadre complexe, mobilisation de ses connaissances, sensation...*

Je propose un programme en trois étapes :

- Repérer des questions à connaître :

Je propose un programme en trois étapes :

- Repérer des questions à connaître :
  - *des questions effectivement posées à l'oral des concours,*

Je propose un programme en trois étapes :

- Repérer des questions à connaître :
  - *des questions effectivement posées à l'oral des concours,*
  - *des extraits de problèmes de concours,*

Je propose un programme en trois étapes :

- Repérer des questions à connaître :
  - *des questions effectivement posées à l'oral des concours,*
  - *des extraits de problèmes de concours,*
  - *des questions suggérées par les rapports de jury,*

Je propose un programme en trois étapes :

- Repérer des questions à connaître :
  - *des questions effectivement posées à l'oral des concours,*
  - *des extraits de problèmes de concours,*
  - *des questions suggérées par les rapports de jury,*
  - *des résultats classiques de cours.*

Je propose un programme en trois étapes :

- Repérer des questions à connaître :
  - *des questions effectivement posées à l'oral des concours,*
  - *des extraits de problèmes de concours,*
  - *des questions suggérées par les rapports de jury,*
  - *des résultats classiques de cours.*
- Atomiser les connaissances détectées.

Je propose un programme en trois étapes :

- Repérer des questions à connaître :
  - *des questions effectivement posées à l'oral des concours,*
  - *des extraits de problèmes de concours,*
  - *des questions suggérées par les rapports de jury,*
  - *des résultats classiques de cours.*
- Atomiser les connaissances détectées.
- Définir une stratégie d'apprentissage.

Organiser des retours programmés

Quelle que soit la méthode utilisée, il est important de revenir régulièrement sur les éléments de connaissances (EC) déjà travaillés.

Relevé dans le "Nouvel Obs" de septembre 2005 :

> *Notre hypothèse directrice est que l'élagage obéit à la règle "use it or lose it", on s'en sert ou on le perd. Les cellules et connexions qui sont utilisées vont survivre et prospérer, les autres vont disparaître. Si un teenager fait de la musique, du sport ou des études, ces tendances vont progressivement devenir "câblées". Idem s'il passe son temps à traîner sur le canapé ou devant l'écran de la console de jeux.*

Proposons quelques pistes...

Piste 1 : Interrogation Orale de Cours (IOC)

Proposer de réviser un chapitre de cours ou une liste de questions.

Deux types d'IOC :

- IOC d'entraînement (IOCE, formative) si le but est de revenir sur des questions importantes déjà étudiées pour les réinvestir et écouter la façon dont l'étudiant maîtrise cette connaissance à l'oral (il s'agit d'une excellente préparation aux oraux de concours) ;
- IOC de contrôle (IOCC, sommative) qui attribue une note d'oral à chaque étudiant interrogé.

Piste 2 : Interrogation Ecrite sur les Fondamentaux (IEF)

- Mêmes principes que les IOC, mais on demande de répondre aux questions par écrit en temps limité.
- Objectif : chercher des réponses et produire des rédactions complètes.
- On peut encore faire la distinction entre des Interrogations Ecrites sur les Fondamentaux (IEF) d'entraînement (IEFE) ou de contrôle (IEFC).
- Ce type de travail prépare plus spécifiquement aux épreuves écrites des examens et des concours.
- Un travail spécifique peut être mené sur la rédaction si l'on décide de redistribuer les feuilles la séance suivante en demandant aux étudiants de corriger la feuille du voisin.

Piste 3 : Evaluation Par Contrat de Confiance (EPCC)

Avertir les étudiants que l'on trouvera un certain nombre de questions déjà traitées en TD dans le prochain contrôle. On peut par exemple dire :

> *"Au contrôle, vous aurez à traiter certaines des questions de cette liste et, sur 4 points sur 20 environ, un exercice ne figurant pas sur la liste."*

Dans son livre [2], André Antibi précise l'esprit d'une EPCC et distingue trois étapes :

1. L'annonce du programme de contrôle,
2. La séance de Questions/Réponses pré-contrôle,
3. Le choix du contenu et la correction de l'épreuve.

III. EXEMPLES DE QUESTIONS/REPONSES

Question

Si x est un élément d'ordre fini $\omega(x)$ d'un groupe G (noté multiplicativement) et si $t \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$\omega\left(x^t\right) = \frac{\omega(x)}{\operatorname{pgcd}(t, \omega(x))}.$$

▶ L'idée est de déterminer l'ensemble des $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left(x^t\right)^k = e$. Il est donc normal de commencer par traduire cette égalité autant qu'on le peut :

$$\left(x^t\right)^k = e \;\Leftrightarrow\; x^{tk} = e \;\Leftrightarrow\; \omega(x) \mid tk.$$

Là, on est bloqué ! "Lever" ce blocage est classique mais doit être appris sur des exemples simple *pour développer des réflexes.*

Utiliser ses connaissances au bon moment...

- Il est naturel de poser $\delta = \operatorname{pgcd}(t, \omega(x))$ pour utiliser le Théorème de Gauss. En notant $\omega(x) = \delta\omega'$ et $t = \delta t'$, on obtient alors :

  $$(x^t)^k = e \;\Leftrightarrow\; \omega(x) \mid tk \;\Leftrightarrow\; \delta\omega' \mid \delta t' k \;\Leftrightarrow\; \omega' \mid t' k \;\Leftrightarrow\; \omega' \mid k.$$

  Le plus petit entier strictement positif k tel que $(x^t)^k = e$ est donc le quotient

  $$\omega' = \frac{\omega(x)}{\delta} = \frac{\omega(x)}{\operatorname{pgcd}(t, \omega(x))}.$$

- C'est, par définition, l'ordre de l'élément x^t. [Un tel raisonnement n'est pas immédiatement perçu comme naturel par les étudiants. Il le devient avec un peu d'entraînement.]

Un autre exemple où affûter ses armes :

Question

Soient b_1, b_2 deux éléments d'ordres finis d'un groupe commutatif H noté multiplicativement. On note $\omega(x)$ l'ordre d'un élément x de H. Montrer que : $\operatorname{pgcd}(\omega(b_1), \omega(b_2)) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega(b_1 b_2) = \omega(b_1)\,\omega(b_2)$.

On doit chercher quand $(b_1 b_2)^n = e$. On obtient :

$$(b_1 b_2)^n = e \;\Leftrightarrow\; b_1^n = b_2^{-n},$$

puis on doit penser à utiliser ce qu'on sait sur l'ordre d'un élément d'un groupe... Ici $b_1^n = b_2^{-n} = z$, donc z appartient à $< b_1 >$ et à $< b_2 >$.
L'ordre de z divisera $\omega(b_1)$ et $\omega(b_2)$.
Comme $\operatorname{pgcd}(\omega(b_1), \omega(b_2)) = 1$, on aura $\omega(z) = 1$, donc $z = e$. On peut donc écrire :

$$(b_1 b_2)^n = e \;\Leftrightarrow\; b_1^n = b_2^n = e.$$

On a gagné **SI** l'on utilise ce que l'on sait sur l'ordre d'un élément :

$$\begin{aligned}(b_1 b_2)^n = e &\Leftrightarrow b_1^n = b_2^n = e\\ &\Leftrightarrow \omega(b_1) \mid n \text{ et } \omega(b_2) \mid n\\ &\Leftrightarrow \mathrm{ppcm}(\omega(b_1), \omega(b_2)) \mid n\\ &\Leftrightarrow \omega(b_1)\,\omega(b_2) \mid n,\end{aligned}$$

donc $(b_1 b_2)^n = e$ si et seulement si $\omega(b_1)\,\omega(b_2)$ divise n. Cela montre que $b_1 b_2$ est d'ordre fini, et que le plus petit entier n tel que $(b_1 b_2)^n = e$ est le produit $\omega(b_1)\,\omega(b_2)$, autrement dit :

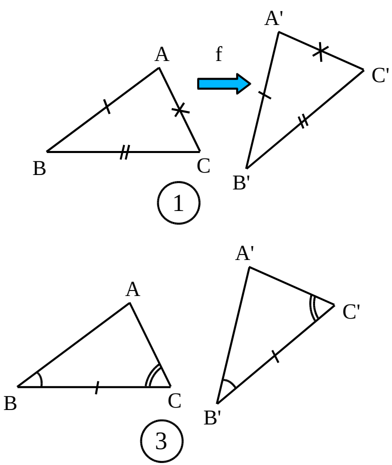
$$\omega(b_1 b_2) = \omega(b_1)\,\omega(b_2).$$

IV. UN EXEMPLE D'ENCHAINEMENT

- On peut travailler sur des Questions/Réponses "indépendantes" mettant en jeu des connaissances de bases, puis les réunir dans un enchaînement pour faire prendre conscience de certains enjeux mathématiques forts.
- Cela permet de prendre du recul et d'acquérir une maîtrise plus parfaite du sujet.

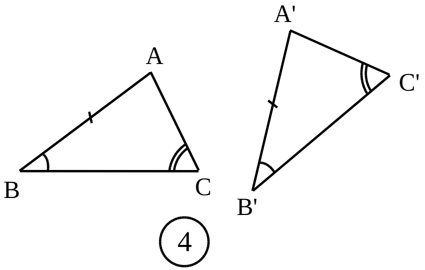
Exemple : les cas d'égalité des triangles

Il faut savoir énoncer et démontrer les trois cas d'isométrie des triangles :



▶ Les trois cas d'égalité des triangles sont déjà présents dans le vol. I des "Eléments" d'Euclide :

- Proposition 8 pour le premier cas d'égalité (trois côtés égaux),
- Proposition 4 pour le second cas d'égalité (un angle entre deux côtés),
- Proposition 26 pour le troisième cas. Mais celui-ci est donné sous une forme plus générale (deux angles et un côté, quel que soit ce côté ! voir figure ci-dessous).



- L'axiomatique d'Euclide n'est pas parfaite. Elle a dû être complétée et améliorée par Hilbert à la fin du 19ème siècle siècle ("Les fondements de la géométrie", 1899 [3]) tant et si bien qu'aujourd'hui l'on parle d'axiomatique d'Euclide-Hilbert.
- Une des critiques les plus graves faites à l'axiomatique d'Euclide est son manque de rigueur dû à certaines démonstrations qui ne sont pas basées sur des axiomes mais sur des notions trop intuitives comme la "superposition". Ainsi "l'égalité des triangles" est-elle annoncée comme le fait pour deux triangles d'avoir des côtés de mêmes longueurs et des angles égaux, bref d'être "superposables". Cela induit une idée de mouvement qui n'est pas défini dans les "Eléments". Ce qui manque à Euclide, ce sont **les isométries planes** (qui permettent de définir la "congruence" de deux figures) et **le vocabulaire des transformations**.

La question suivante mérite d'être posée :

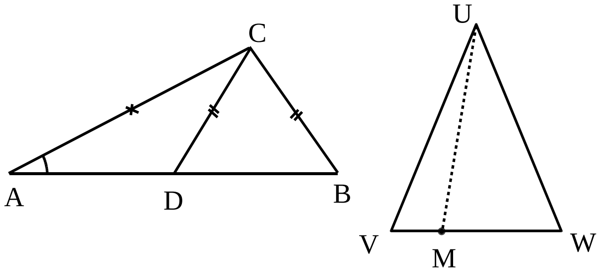
Question

Deux triangles possédant trois éléments égaux (des côtés ou des angles) sont-ils nécessairement isométriques ?

- Si oui, on se demande bien pourquoi insister, dans le second cas d'égalité, pour que l'angle soit situé <u>entre</u> les côtés à comparer. Par contre on a vu que le 3^{e} cas d'égalité reste valide quel que soit la position relative des deux angles et du côté.
- Réfléchir sur ces notions de base est-il utile pour préparer le concours ?

Deux contre-exemples faciles à retenir :

Les triangles ACB et ACD dessinés ci-dessous ont trois éléments égaux (deux côtés et un angle) mais ne sont pas isométriques.

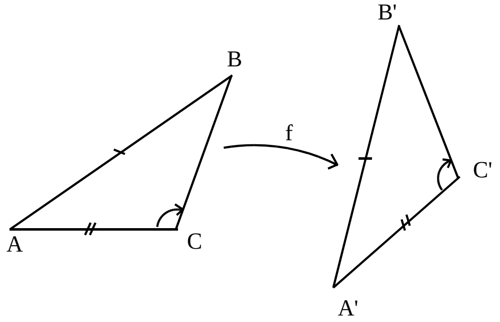


On peut aussi choisir un point M quelconque sur la base $[VW]$ d'un triangle isocèle UVW (M distinct de V et W), et constater que les triangles UVM et UWM possèdent trois éléments égaux. Si ces deux triangles étaient isométriques, M serait le milieu de $[VW]$.

Il existe un quatrième cas d'isométrie des triangles :

Theorem

"Deux triangles sont isométriques si et seulement si deux côtés respectifs de ces triangles sont égaux et si l'angle opposé au plus long des côtés est le même dans les deux triangles".



[[4], Th. 209 ou [6], Q 417.]

Généralisation du premier cas d'égalité :

La dimension n donne l'occasion de travailler avec des isométries :

Theorem

{[4], Th. 206} Soit $(A_0, A_1, ..., A_n)$ *un repère affine de* E*. On considère une* $(n+1)$*-liste* $(B_0, B_1, ..., B_n)$ *de points de* E *telle que* $B_iB_j = A_iA_j$ *pour tous* i, j*. Il existe une et une seule isométrie transformant* A_0, A_1, ..., A_n *en* B_0, B_1, ..., B_n*. De plus* $(B_0, B_1, ..., B_n)$ *sera un repère affine de* E*.*

Avec un point de moins, on trouve deux isométries :

Theorem

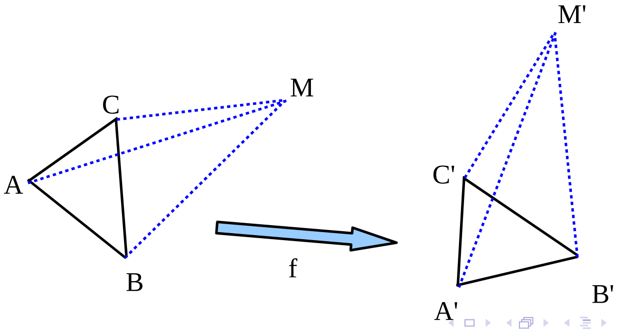
{[4], Th. 207} Soit $(A_0, A_1, ..., A_{n-1})$ *un système affinement libre d'un espace affine euclidien* E *de dimension* n*, et soit* $(B_0, B_1, ..., B_{n-1})$ *une* n*-liste de points de* E *telle que* $B_iB_j = A_iA_j$ *pour tous* i, j*. Il existe un et un seul déplacement (resp. antidéplacement) transformant* A_0, A_1, ..., A_{n-1} *en* B_0, B_1, ..., B_{n-1}*.*

Autre généralisation :

Theorem

Dans le plan, si l'on se donne m points A_i et m points B_i, tels que $B_iB_j = A_iA_j$ pour tous i, j, et si trois des points A_i ne sont pas alignés, alors il existe une unique isométrie amenant les A_i sur les B_i.

Preuve : On utilise qu'un point M du plan est parfaitement déterminé par sa distance à chacun des points d'une base affine de ce plan.



FIN

- A. Antibi, La constante macabre ou comment a-t-on découragé des générations d'élèves ? Ed. Math'Adore, 2003.
- A. Antibi, Les notes : "la fin du cauchemar" ou "en finir avec la constante macabre", Ed. Math'Adore, 2007.
- Hilbert D., Les principes fondamentaux de la géométrie, Annales Scientifiques de l'ENS, 3ème série, tome 17, 1900, pp. 103-209.
- D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2008.
- D.-J. Mercier, Fondamentaux de géométrie pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Publibook, 2009.
- D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. IV : Géométrie affine et euclidienne, Publibook, 2010.

Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours

http://megamaths.perso.neuf.fr/exgeo/revueLMEC.html