Classification thématique de MÉGAMATHS
megamaths.fr / © 2022 DJM / ctq1120906a
Rubrique : équations & inéquations
Extrait du volume II d'Algèbre & arith. pour l'agrég. int.[1]

Cet étudiant se trompe en étudiant le signe d'une fonction

On propose la rédaction d'un étudiant qui doit étudier le signe d'une fonction où intervient un radical. L'erreur la plus flagrante devrait être localisée en 10 secondes en parcourant son développement. Et ensuite, il faudra passer plus de temps pour proposer une réponse complète à cette question. Avez-vous envie de jouer ?.

QUESTION

Signe d'une expression

Pour étudier le signe de la fonction $g(h) = \sqrt{h^2 - 6h + 13} + 2h - 6$, un étudiant propose le développement suivant :

$$\begin{gathered} \text{«}\ \sqrt{h^2 - 6h + 13} + 2h - 6 = 0 \\ \sqrt{h^2 - 6h + 13} = 6 - 2h \\ h^2 - 6h + 13 = 36 - 24h + 4h^2 \\ 3h^2 - 18h + 23 = 0. \end{gathered}$$

Les solutions sont $h_1 = 3 - 2\sqrt{3}/3$ et $h_2 = 3 + 2\sqrt{3}/3$, donc le signe de la fonction g est positif pour $h \in \left]-\infty, h_1\right] \cup \left[h_2, +\infty\right[$ et négatif pour h appartenant à $[h_1, h_2]$. ». Analysez ce raisonnement, puis proposez une correction.

RÉPONSE

On peut faire trois observations :

Première observation — L'étudiant se jette sur l'expression de $g(h)$ sans se poser la question de chercher les valeurs de h pour lesquelles cette expression a un sens. Pour que le radical $\sqrt{h^2 - 6h + 13}$ soit bien défini, il faut et il suffit que $h^2 - 6h + 13$ soit positif. On vérifie que ce trinôme reste positif quel que soit h, donc on peut affirmer que g est une application définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Il aurait fallu le préciser.

Deuxième observation — L'étudiant résout une équation et non une inéquation, ce qui lui permet d'obtenir des solutions de cette équation mais ne lui donnera pas la possibilité de prédire le signe de l'expression $g(h)$ quand h varie. La conclusion qu'il donne est donc abusive, et demanderait à être démontrée.

Troisième observation — Il y a plus grave, puisque le raisonnement proposé pour résoudre l'équation $g(h) = 0$ est faux. On constate une perte d'équivalence entre la seconde et la troisième équation écrite, au moment où l'on élève les deux membres de l'équation au carré. Avec ce raisonnement, tout ce que l'on peut affirmer est que :

$$\text{Si } h \text{ est solution de l'équation } g(h) = 0, \text{ alors } h \in \{h_1, h_2\}.$$

La réciproque doit être vérifiée, autrement dit le raisonnement n'est pas achevé et l'étudiant doit encore démontrer que les réels h_1 et h_2 sont bien des solutions de l'équation $g(h) = 0$.

Cela étant, cet étudiant sait des choses. Il sait par exemple résoudre une équation du second degré à coefficients réels, mais comme il n'explicite pas sa méthode de résolution, on peut imaginer qu'il n'a fait qu'utiliser sa calculatrice pour effectuer ce calcul formel, voire l'a aussi utilisé pour y lire le signe de g.

Cet étudiant devra retravailler sa solution pour prendre conscience de la nécessité d'une réciproque quand on ne procède pas par équivalences, et revenir sur le fait d'élever au carré les deux membres d'une égalité.

- On doit résoudre l'inéquation $g(h) \geq 0$, qui s'écrit encore :

$$\sqrt{h^2 - 6h + 13} \geq 6 - 2h. \quad (*)$$

On envisage deux cas suivant le signe de $6 - 2h$:

- Si $6 - 2h \geq 0$, autrement dit si $h \leq 3$, $(*)$ équivaut successivement à :

$$h^2 - 6h + 13 \geq (6 - 2h)^2$$
$$h^2 - 6h + 13 \geq 36 - 24h + 4h^2$$
$$3h^2 - 18h + 23 \leq 0.$$

Le discriminant réduit du trinôme $3h^2 - 18h + 23$ est $\Delta' = 9^2 - 3 \times 23 = 12$, donc les racines de ce trinôme sont :

$$\frac{9 \pm \sqrt{12}}{3}$$

soit $h_1 = 3 - 2\sqrt{3}/3$ et $h_2 = 3 + 2\sqrt{3}/3$. Ce trinôme sera donc négatif quand h se trouve entre ses racines :

$$g(h) \geq 0 \iff h \in [h_1, h_2].$$

Comme $h_1 \simeq 1,845$ et $h_2 \simeq 4,155$, et comme nous travaillons sous l'hypothèse que $h \leq 3$, nous pouvons seulement affirmer que :

$$g(h) \geq 0 \iff h_1 \leq h \leq 3.$$

• Si $6 - 2h \leq 0$, autrement dit si $h \geq 3$, le second membre de $(*)$ est toujours négatif de sorte que l'inégalité $(*)$ est toujours vérifiée (le premier membre est une racine carrée positive !). Tous les h supérieurs ou égaux à 3 sont donc des solutions de notre inéquation.

En conclusion $g(h) \geq 0$ si et seulement si $h \geq h_1$. La visualisation sur écran de la courbe représentative de g corroborera ce résultat.

References

[1] D.-J. Mercier, Agrégation interne de mathématiques, Algèbre & arithmétique II, IP, 2022.