

Classification thématique de MÉGAMATHS

megamaths.fr / © 2022 DJM / ctq080317c

Rubrique : nombres

Extrait du volume II d'Algèbre & arith. pour l'agrég. int.[1]

Devinette : quels sont ces 3 nombres ?

Cette devinette a été demandée par un jury d'oral du CAPES interne de la session 2007. Elle nous fait retourner sur l'écriture décimale d'un nombre entier et fait appel à un peu d'arithmétique.

QUESTION

La somme de trois nombres impairs consécutifs est un nombre de quatre chiffres identiques. Quels sont ces trois nombres ?

RÉPONSE

Il s'agit de trouver un entier impair n pour lequel il existe $a \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ tel que $(n-2) + n + (n+2) = \overline{aaaa} = 1111a$, c'est-à-dire $3n = 1111a$. Si cela est vrai, 3 est premier avec 1111 et divise 1111a donc divise a d'après le théorème de Gauss. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} a = 3k \\ n = 1111k. \end{cases}$$

L'hypothèse $a \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ impose de choisir k dans $\{0, 1, 2, 3\}$, et l'imparité de n nous permet de rejeter les cas où $k = 0$ ou 2. Il reste seulement deux cas possibles, lorsque $k \in \{1, 3\}$. On obtient alors $n = 1111$ ou 3333. Il ne reste plus qu'à vérifier que ces deux nombres conviennent :

$$1109 + 1111 + 1113 = 3333 \quad \text{et} \quad 3331 + 3333 + 3335 = 9999.$$

References

- [1] D.-J. Mercier, Agrégation interne de mathématiques, Algèbre & arithmétique II, IP, 2022.