Extrait de mon livre :
Cours de géométrie
4e édition

dany-jack.mercier@hotmail.fr

Chapitre 10

Triangles et cercles

Dans ce Chapitre, nous nous plaçons dans un plan affine euclidien.

10.1 Triangles

10.1.1 Médiatrices, hauteurs et médianes d'un triangle

Théorème 10.1 *Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point O centre d'un unique cercle passant par A, B, C.*

Preuve — Notons Δ_A (resp.Δ_B, Δ_C) la médiatrice du segment $[BC]$ (resp. $[CA]$, $[AB]$). Δ_A et Δ_B sont sécantes en un point O (si Δ_A était parallèle à Δ_B, (BC) serait parallèle à (CA) et A, B, C seraient alignés) tel que $OB = OC$ et $OC = OA$. On déduit $OB = OA$ et $O \in \Delta_C$. ■

Le cercle passant par les sommets d'un triangle est appelé **cercle circonscrit** au triangle. La **hauteur** issue de A d'un triangle ABC est, par définition, la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé. Notons H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C.

Théorème 10.2 *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.*

Preuve — Il suffit d'appliquer l'identité de Stewart :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

avec $M = H$, où H désigne l'intersection des hauteurs issues de A et B du triangle ABC, pour obtenir $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$, de sorte que H appartienne aussi à la hauteur issue de C. ■

Dans un triangle, une **médiane** est une droite joignant l'un des sommets au milieu du côté opposé.

Théorème 10.3 *Les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle et situé au* $\frac{1}{3}$ *de la base de chacune d'elle. On a* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Preuve — Soit G l'isobarycentre des points A, B, C. Par associativité du barycentre, G est le barycentre de $A\,(1)$, $A'\,(2)$ donc $G \in (AA')$ et :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

On montre de même que G appartient à (BB') et à (CC'). ∎

10.1.2 Droite et cercle d'Euler

Considérons un triangle ABC de centre de gravité G et de cercle circonscrit $\mathcal{C}$. Soit O le centre de $\mathcal{C}$. Les points A', B', C' désignent les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. L'homothétie h de centre G et de rapport -2 transforme A', B', C' en A, B, C et la médiatrice Δ de $[BC]$ en une droite parallèle à Δ passant par A, c'est-à-dire en la hauteur issue de A. Les trois médiatrices concourent en O, donc les trois hauteurs passeront par $h\,(O)$. Ainsi $h\,(O) = H$ où H désigne l'orthocentre de ABC, et :

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

On a montré :

Théorème 10.4 *Les points O, H et G sont alignés et* $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

La droite passant par O, H et G est appelée **droite d'Euler** du triangle. Le **cercle d'Euler**, ou **cercle des neufs points**, est le cercle $\mathcal{C}'$ circonscrit au triangle $A'B'C'$.

Théorème 10.5 *Le cercle d'Euler* $\mathcal{C}'$ *du triangle ABC a pour centre le milieu* ω *du segment* $[OH]$. *Il passe par les milieux* A', B', C' *des côtés, par les milieux des segments* $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$, *et par les pieds des hauteurs du triangle ABC.*

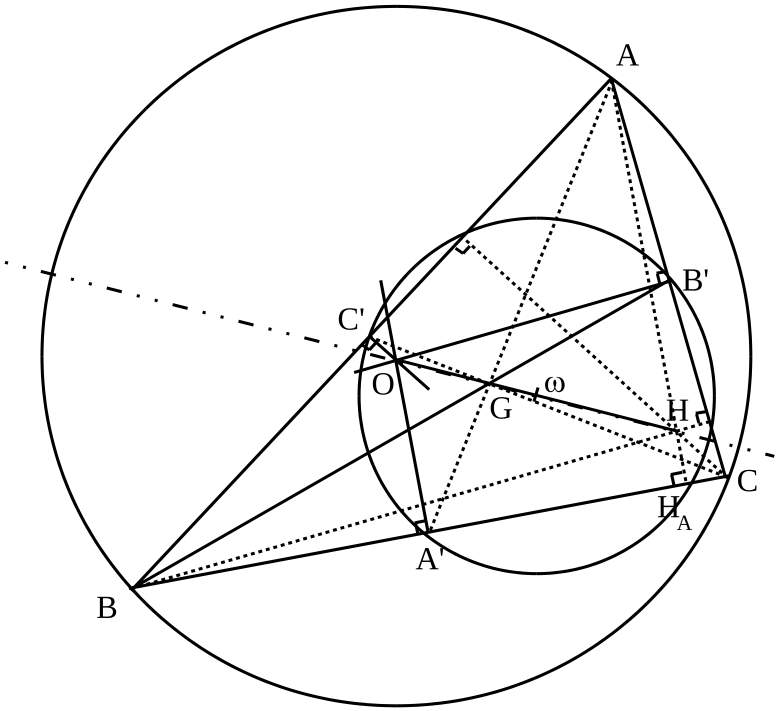
Preuve — Soit ω le centre de $\mathcal{C}'$. L'homothétie h^{-1} transforme le cercle $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ et l'on a :

$$\omega = h^{-1}\,(O) \Rightarrow \overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO} \Rightarrow \overrightarrow{O\omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$$

de sorte que ω soit bien le milieu de $[OH]$. Il existe exactement deux homothéties de rapports opposés transformant le cercle $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. L'une d'elle est $h^{-1} = h_{G,-1/2}$. L'autre sera donc $h_1 = h_{T,1/2}$ avec :

$$\begin{aligned} h_{T,1/2}(O) = \omega \quad &\Rightarrow \quad \overrightarrow{T\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{TO} \\ &\Rightarrow \quad \overrightarrow{O\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OT} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OT} = 2\overrightarrow{O\omega} = \overrightarrow{OH} \;\Rightarrow\; T = H. \end{aligned}$$

Si I est le milieu de $[AH]$, $h_1(A) = I$ et $A \in \mathcal{C}$ entraînent $I \in \mathcal{C}'$ puisque $\mathcal{C}' = h_1(\mathcal{C})$.



Soit H_A le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. Comme ω est le milieu de $[OH]$ et comme $HH_AA'O$ trapèze rectangle, on déduit $\omega H_A = \omega A'$ d'où $H_A \in \mathcal{C}'$. En effet, ω milieu de $[OH]$ se projette orthogonalement sur le milieu Z de $[H_AA']$, et le théorème de Pythagore appliqué deux fois permet d'écrire :

$$\omega H_A^2 = \omega Z^2 + ZH_A^2 = \omega Z^2 + ZA'^2 = \omega A'^2. \;\blacksquare$$

10.1.3 Bissectrices

Nous avons déjà défini la notion de bissectrice d'un couple de droites (ou de demi-droites) vectorielles. Cette notion se traduit naturellement dans le cadre affine : par exemple, la bissectrice d'un couple de demi-droites de même origine $([OA),[OB))$ peut être définie comme étant la droite passant par l'origine commune O et de direction la bissectrice (vectorielle) du couple formé par les deux demi-droites vectorielles $(\mathbb{R}\overrightarrow{OA},\mathbb{R}\overrightarrow{OB})$. Il reste néanmoins intéressant de redéfinir ces notions de bissectrices en restant dans un cadre spécifiquement affine.

Définition 10.1 *On dira qu'une réflexion s_Δ* ***échange les droites*** *D* ***et*** *D' si et seulement si $s_\Delta(D)=D'$ (ou ce qui revient au même, $s_\Delta(D')=D$).*

Théorème 10.6 *Il existe exactement deux réflexions échangeant deux droites concourantes D et D'. Les axes de ces réflexions sont perpendiculaires entre eux et passent par l'intersection O de D et D'. Ils sont dirigés par les vecteurs $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ où A et B sont des points qui appartiennent respectivement à D et D', sont distincts de O et vérifient $OA=OB$.*

Preuve — Procédons par analyse et synthèse, et référons-nous à la FIG. 10.1.

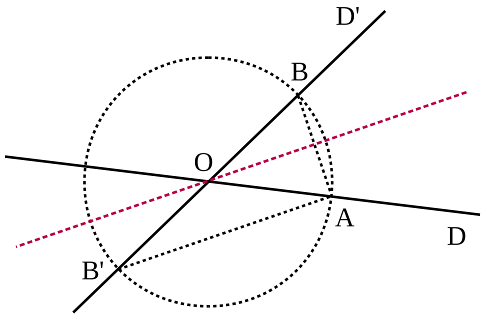


FIG. 10.1 – Configuration formée par 2 droites sécantes

Analyse — Si Δ est solution, comme s_Δ est bijective :

$$s_\Delta\left(D\cap D'\right)=s_\Delta(D)\cap s_\Delta\left(D'\right)=D'\cap D$$

et l'on aura $s_\Delta(O)=O$. Cela prouve que O appartient à Δ. Choisissons un point A sur D, distinct de O. L'image $s_\Delta(A)$ appartiendra à D' et vérifiera $OA=Os_\Delta(A)$ puisqu'une réflexion conserve les distances. Si B et B' désignent les deux points de D' situés à la distance OA de O, on obtient $s_\Delta(A)\in\{B,B'\}$, et Δ est soit la médiatrice Δ_1 de $[AB]$, soit celle Δ_2 de $[AB']$.

Synthèse — Il est facile de vérifier que s_{Δ_1} et s_{Δ_2} échangent bien les droites D et D'. Par exemple :

$$s_{\Delta_1}(D) = s_{\Delta_1}((OA)) = (s_{\Delta_1}(O)\, s_{\Delta_1}(A)) = (OB) = D'.$$

Remarques — 1) Les égalités $OA = OB = OB'$ montrent que le triangle ABB' est rectangle en A (Théorème 9.5). Les droites Δ_1 et Δ_2 sont donc perpendiculaires.

2) La médiatrice Δ_1 de $[AB]$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ puisque :

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = ||\overrightarrow{OB}||^2 - ||\overrightarrow{OA}||^2 = 0.$$

De même, la médiatrice Δ_2 est dirigée par $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

On pose commodément :

Définition 10.2 *Les axes de symétrie Δ_1 et Δ_2 obtenus au Théorème précédent sont appelés **bissectrices du couple de droites** (D, D').*

On peut tout recommencer en remplaçant les droites D et D' par des demi-droites. On obtient alors :

Théorème 10.7 *Il existe une et une seule réflexion échangeant les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. Si $OA = OB$, l'axe de cette réflexion passe par O et admet $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ comme vecteur directeur lorsque $[OA)$ et $[OB)$ ne sont pas opposées. Si $[OA)$ et $[OB)$ sont opposées, cet axe est la perpendiculaire à (AB) passant par O.*

Définition 10.3 *L'axe de symétrie obtenu au Théorème précédent est appelé **bissectrice du couple de demi-droites** $([OA), [OB))$.*

Notons $-[AC)$ la demi-droite opposée à $[AC)$.

Définition 10.4 *On appelle **bissectrice intérieure** (resp. **bissectrice extérieure**) de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC la bissectrice du couple de demi-droites $([AB), [AC))$ (resp. $([AB), -[AC))$).*

Bien évidemment, le couple des bissectrices intérieures et extérieures de l'angle $\widehat{A}$ coïncident avec le couple des bissectrices du couple de droites $((AB), (AC))$. Nous achevons cette Section en donnant deux caractérisations importantes des bissectrices d'un couple de droites. Pour ces deux Théorèmes, D et D' désignent deux droites affines sécantes en O.

Théorème 10.8 ***(Caractérisation angulaire)***
La droite Δ est une bissectrice du couple (D, D') si et seulement si elle contient le point O et vérifie $(D, \Delta) = (\Delta, D')$ (π) (égalité d'angles orientés de droites), i.e. $2(D, \Delta) = (D, D')$ (π).

Preuve — Comme une réflexion inverse les angles, les équivalences suivantes seront vraies pour toute droite Δ passant par O :

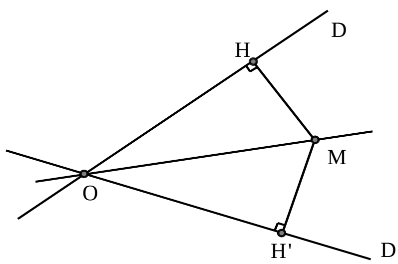
$$\begin{aligned}\Delta \text{ bissectrice de } \left(D, D'\right) &\Leftrightarrow D' = s_\Delta (D) \\ &\Leftrightarrow \left(\Delta, D'\right) = (\Delta, s_\Delta (D)) \Leftrightarrow \left(\Delta, D'\right) = (D, \Delta) .\end{aligned}$$

La relation de Chasles donne ensuite $2(D, \Delta) = (D, D')$. ■

Théorème 10.9 ***(Caractérisation métrique)***
L'ensemble des points équidistants de deux droites sécantes D et D' est la réunion des bissectrices du couple (D, D').

Preuve — Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points équidistants de D et D', O le point d'intersection de D et D' et H (resp. H') le projeté orthogonal de M sur D (resp. D').

Le point O est à la fois dans $\mathcal{E}$ et sur les bissectrices de (D, D'). Un point M de $(D \cup D') \setminus \{O\}$ n'est ni équidistant de D et D', ni sur une des bissectrices de (D, D'). On élimine ces cas particuliers et l'on considère maintenant un point M qui n'appartient pas à $D \cup D'$.



• Si $M \in \mathcal{E}$, les triangles rectangles MHO et $MH'O$ ont même hypoténuse OM et vérifient $MH = MH'$. Le Théorème de Pythagore donne $OH = OH'$. Ainsi O et M se trouvent chacun à égale distance des extrémités du segment $[HH']$. Cela montre que (OM) est la médiatrice de $[HH']$, et donc que la réflexion s par rapport à la droite (OM) transforme la droite $D = (OH)$ en $D' = (OH')$. La droite (OM) sera bien une bissectrice du couple (D, D') d'après la Définition 10.2.

• Supposons que M appartienne à l'une des bissectrices Δ de (D, D'). Par conservation de l'orthogonalité, l'image de la perpendiculaire (MH) à D passant par M par la réflexion $s_{(OM)}$ sera la perpendiculaire à $D' = s_{(OM)}(D)$ en $M = s_{(OM)}(M)$, c'est-à-dire (MH'). Par conséquent :

$$H \in D \cap (MH) \Rightarrow s_{(OM)}(H) \in D' \cap \left(MH'\right) \Rightarrow s_{(OM)}(H) = H'.$$

On en déduit $MH = MH'$ puisque $s_{(OM)}$ conserve les distances. ■

Remarque — Attention, l'ensemble des points du plan équidistants de deux demi-droites distinctes de même origine n'est pas la bissectrice de ces deux demi-droites.

10.1.4 Cercles inscrits et exinscrits

Dans cette Section, on considère un triangle non aplati ABC et l'on appelle D_A, D_B et D_C (resp. D'_A, D'_B et D'_C) les bissectrices intérieures (resp. extérieures) de ce triangle issues respectivement de A, B et C. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs des côtés du triangle.

Théorème 10.10 *Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point I situé à l'intérieur du triangle et admettant les coordonnées barycentriques (a, b, c) dans le repère (A, B, C).*

Preuve — Soit I le point de coordonnées barycentriques (a, b, c) dans le repère (A, B, C). On a :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Soient M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Le quadrilatère $AMIN$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux, i.e. un losange. Ainsi la droite (AI) sera l'axe de symétrie du couple de demi-droites $([AB), [AC))$, donc, par définition, la bissectrice intérieure D_A issue de A du triangle ABC. On montrerait de la même façon que I appartient aux bissectrices intérieures D_B et D_C issues respectivement de B et C. On a montré l'inclusion $\{I\} \subset D_A \cap D_B \cap D_C$.

Deux bissectrices intérieures du triangle ne peuvent pas être confondues. En effet, $D_A = D_B$ entraîne $D_A = (AB)$. La réflexion $s_{(AB)}$ par rapport à (AB) vérifie alors :

$$s_{(AB)}((AB)) = s_{D_A}((AB)) = (AC),$$

d'où $(AB) = (AC)$, ce qui est absurde puisque le triangle n'est pas aplati. L'inclusion précédente est donc une égalité : $D_A \cap D_B \cap D_C = \{I\}$. ■

Théorème 10.11 *Deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure d'un triangle sont concourantes dès qu'elles sont issues de sommets différents du triangle. Les coordonnées barycentriques du point de concours J_A des bissectrices D_A, D'_B, et D'_C dans le repère (A, B, C) sont $(-a, b, c)$.*

Preuve — Montrons par exemple que les bissectrices D_A, D'_B, et D'_C sont concourantes. Soit J_A le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients $-a$, b, c. On a :

$$\overrightarrow{AJ_A} = \frac{b}{-a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{-a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

et l'on obtient $J_A \in D_A$ en raisonnant comme au Théorème 10.10 .On a aussi :

$$\overrightarrow{BJ_A} = \frac{-a}{-a+b+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{-a+b+c}\overrightarrow{BC}.$$

En posant :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{-a}{-a+b+c}\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{BN} = \frac{c}{-a+b+c}\overrightarrow{BC},$$

on obtient encore un losange BMJ_AN, avec $M \in -[BA)$ et $N \in [BC)$ (où $-[BA)$ désigne la demi-droite opposée de $[BA)$), d'où l'on déduit $J_A \in D'_B$. On prouverait de la même manière que $J_A \in D'_C$. On a montré l'inclusion $\{J_A\} \subset D_A \cap D'_B \cap D'_C$. Cette inclusion est, en fait, une égalité, puisque deux bissectrices extérieures d'un triangle ne peuvent pas être confondues. En effet, $D'_B = D'_C$ implique $D'_B = (BC)$, d'où $s_{(BC)}((BC)) = s_{D'_B}((BC)) = (BA)$, puis $(BC) = (BA)$, ce qui est absurde. ■

Théorème 10.12 *Il y a exactement quatre cercles tangents aux trois côtés d'un triangle (non aplati) ABC. Les centres de ces cercles sont le point de concours des trois bissectrices intérieures, et les points de concours de deux bissectrices extérieures et d'une bissectrice intérieure du triangle (ces bissectrices étant issues de chacun des trois sommets du triangle).*

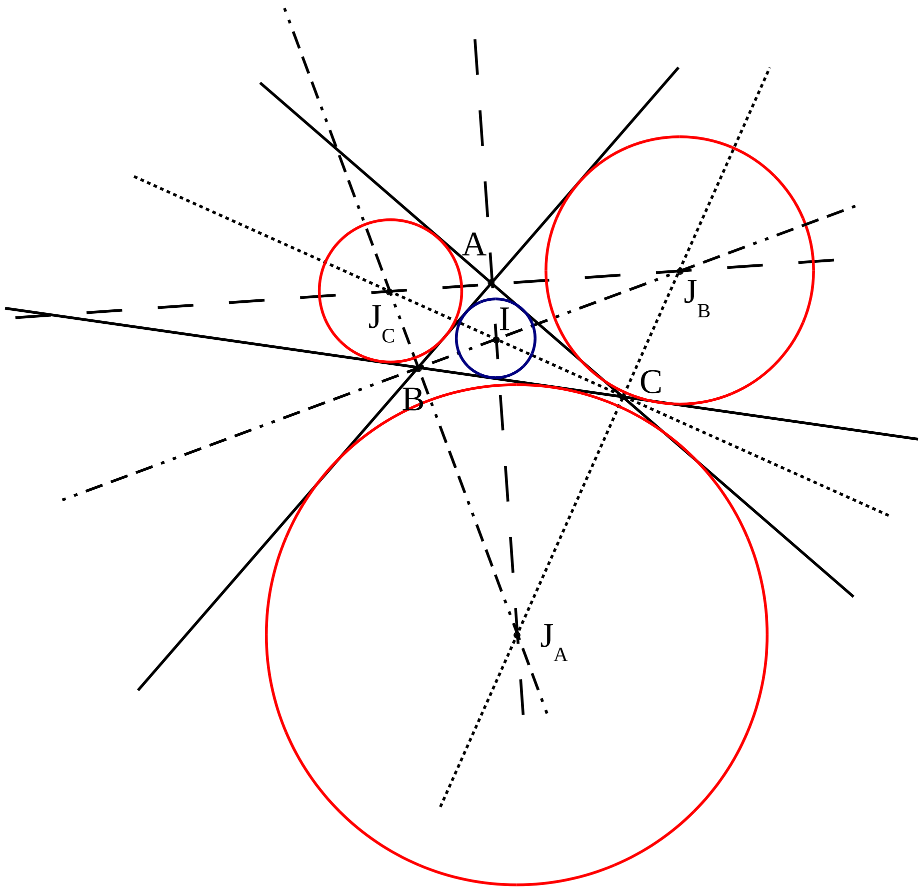
Preuve — Le point Ω est centre d'un cercle tangent aux côtés si et seulement si c'est un point équidistant des côtés (AB), (AC) et (BC). D'après le Théorème 10.9, les centres des cercles cherchés appartiendront donc aux intersections $\Delta_A \cap \Delta_B \cap \Delta_C$ où $\Delta_A \in \{D_A, D'_A\}$, $\Delta_B \in \{D_B, D'_B\}$ et enfin $\Delta_C \in \{D_C, D'_C\}$. Compte tenu des Théorèmes précédents, on obtient immédiatement quatre centres de cercles tangents aux côtés, à savoir : I, J_A, J_B, J_C avec :

$$\begin{aligned} D_A \cap D_B \cap D_C &= \{I\}, \quad D_A \cap D'_B \cap D'_C = \{J_A\}, \\ D'_A \cap D_B \cap D'_C &= \{J_B\}, \quad D'_A \cap D'_B \cap D_C = \{J_C\}. \end{aligned}$$

Il n'y a pas d'autres centres possibles car les autres intersections $\Delta_A \cap \Delta_B \cap \Delta_C$, du type $D'_A \cap D'_B \cap D'_C$ ou $D'_A \cap D_B \cap D_C$, sont vides. En effet :

✓ Si $\Omega \in D'_A \cap D'_B \cap D'_C$, alors $\Omega \in D'_A \cap D'_B$ donc $\Omega = J_C$. Par suite $J_C \in D'_C$. On sait par ailleurs que $J_C \in D_C$, de sorte que $D_C = (CJ_C) = D'_C$, ce qui est absurde puisque les bissectrices intérieures et extérieures issues d'un même sommet sont perpendiculaires.

✓ Si $\Omega \in D'_A \cap D_B \cap D_C$, alors $\Omega \in D_B \cap D_C$ donc $\Omega = I$. Par suite $I \in D'_A$. Comme on sait que I appartient à D_A, on déduit $D_A = (AI) = D'_A$, ce qui est impossible. ■



Avec les notations des Théorèmes précédents :

Définition 10.5 *Le cercle de centre I et tangent aux côtés du triangle ABC est appelé* ***cercle inscrit*** *au triangle ABC. Le point I est le* ***centre du cercle inscrit****. Les cercles de centres J_A, J_B, J_C et tangent aux côtés du triangle*

ABC sont appelés ***cercles exinscrits*** *au triangle ABC. Les points J_A, J_B, J_C sont les* ***centres des cercles exinscrits.***

10.1.5 Pieds des bissectrices d'un triangle

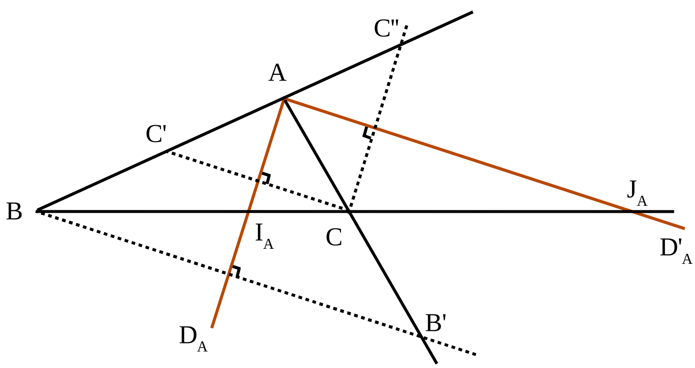
On conserve les notations de la Section 10.1.4.

Lemme 10.1 *La bissectrice intérieure D_A issue de A coupe le côté opposé $[BC]$ en un point I_A tel que $b\overrightarrow{I_AB} + c\overrightarrow{I_AC} = \overrightarrow{0}$.*

Preuve — Ce Lemme est un corollaire du Théorème 10.10. Nous donnons ici une seconde preuve qui utilise le régionnement du plan par la médiatrice et le Théorème de Thalès.

Par définition, la droite D_A est l'axe de l'unique réflexion s qui échange les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, de sorte que $s(B) = B' \in [AC)$.

La droite D_A partage le plan en deux demi-plans $\mathcal{P}_B$ (contenant B) et $\mathcal{P}_{B'}$ (contenant B'). Comme $A \in D_A$, $B' \in \mathcal{P}_{B'}$ et $C \in [AB') \setminus \{A\}$, on déduit que C appartient à $\mathcal{P}_{B'}$. Puisque $C \in \mathcal{P}_{B'}$ et $B \in \mathcal{P}_B$, le segment $[BC]$ coupe la frontière D_A en un point I_A (propriétés générales des demi-plans). Nous venons de démontrer que la bissectrice intérieure D_A coupe le segment $[BC]$ en un point I_A.



Soit D'_A la bissectrice extérieure issue de A du triangle ABC. Par définition, D'_A est l'axe de la réflexion qui transforme la demi-droite $[AC)$ en la demi-droite opposée à $[AB)$. Le symétrique C'' de C par rapport à D'_A appartient donc à la droite (AB), et A est situé entre les points B et C''. Les droites D_A et (CC'') sont perpendiculaires à D'_A, donc parallèles, et l'on peut appliquer le Théorème de Thalès pour obtenir :

$$\frac{\overline{I_AB}}{\overline{I_AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC''}}.$$

Comme $A \in [BC'']$, les mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{AC''}$ sont de signes contraire. De plus $AC'' = AC$ puisque les segements $[AC'']$ et $[AC]$ sont symétriques par rapport à D'_A. On en déduit que :

$$\frac{\overline{I_A B}}{\overline{I_A C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC''}} = -\frac{AB}{AC''} = -\frac{AB}{AC} - \frac{c}{b}. \blacksquare.$$

Remarque — Le lecteur pourra utiliser le Lemme 10.1 pour démontrer le Théorème 10.10.

Le seul cas où la bissectrice extérieure D'_A ne coupe pas (BC) est celui où ABC est isocèle en A, comme on le vérifie ici :

Lemme 10.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) Le triangle ABC est isocèle en A,
2) La bissectrice intérieure D_A en A est perpendiculaire à (BC),
3) La bissectrice extérieure D'_A est parallèle à (BC).

Preuve — L'équivalence entre 2) et 3) est triviale. Si ABC est isocèle en A, le symétrique B' de B par rapport à D_A est un point de $[AC)$ tel que :

$$AB' = AB = AC,$$

donc $B' = C$ et D_A est la médiatrice de $[BC]$. Cela prouve 2). Réciproquement, si 2) est assurée, le symétrique B' de B par rapport à D_A est un point de $[AC)$ qui appartient à la droite (BC) (puisque celle-ci est perpendiculaire à D_A). Donc $B' = C$ et ABC est isocèle en A. $\blacksquare$

On peut énoncer un résultat analogue au Lemme 10.1 :

Lemme 10.3 *Si ABC n'est pas isocèle en A, la bissectrice extérieure D'_A coupe la droite (BC) en un point J_A situé à l'extérieur du segment $[BC]$ tel que $b\overrightarrow{J_A B} - c\overrightarrow{J_A C} = \overrightarrow{0}$.*

Preuve — L'existence de J_A est assurée par le Lemme 10.2. Soit B' le symétrique de B par rapport à D_A. Par hypothèse $B' \in [AC)$, et le Théorème de Thalès donne :

$$\frac{\overline{J_A B}}{\overline{J_A C}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}. \blacksquare$$

Théorème 10.13 *Les pieds des bissectrices issues de A du triangle ABC sont le(s) point(s) de la droite (BC) qui divise(nt) le segment $[BC]$ dans le rapport c/b, autrement dit sont caractérisés par l'égalité :*

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}.$$

Si ABC n'est pas isocèle en A, les pieds I_A et J_A des bissectrices issues de A divisent harmoniquement le segment $[BC]$.

Preuve — Si ABC n'est pas isocèle en A, les points I_A et J_A vérifient l'égalité que l'on sait être vérifiée par exactement deux points distincts (Section 9.1.6) Si ABC est isocèle en A, la relation s'écrit $MB = MC$ et M est le milieu de $[BC]$. Dans ce cas seule la bissectrice intérieure en A coupe (BC) en M, et les droites D'_A et (BC) sont parallèles. Si ABC n'est pas isocèle en A, les points I_A et J_A sont distincts et :

$$\frac{\overline{I_A B}}{\overline{I_A C}} : \frac{\overline{J_A B}}{\overline{J_A C}} = \left(-\frac{c}{b}\right) : \frac{c}{b} = -1,$$

de sorte que I_A et J_A coupent harmoniquement le segment $[BC]$ (voir Section 9.1.6). ■

Théorème 10.14 *Le lieu $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ est le cercle de diamètre $[I_A J_A]$.*

Preuve — On peut utiliser le Théorème 9.10, ou écrire :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} \quad &\Leftrightarrow \quad bMB - cMC = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad b^2 MB^2 - c^2 MC^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (b\overrightarrow{MB} - c\overrightarrow{MC})(b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MJ_A}.\overrightarrow{MI_A} = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque — Ce cercle $\mathcal{E}$ est centré sur la droite (BC) et passe par A. C'est l'un des trois **cercles d'Apollonius du triangle**. Son centre est appelé **point d'Apollonius du triangle associé à** A. Nous avons déjà démontré que les centres des cercles d'Apollonius étaient alignés (Section 9.1.6) et nous reparlerons de ces cercles à la Section 17.5.

10.2 Cercles

Dans cette Section, nous allons d'abord nous intéresser aux positions relatives d'une droite et d'un cercle (Section 10.2.1), reportant la discussion des positions relatives de deux cercles à la Section 12.3.2 (cette discussion nécessite de connaître les conditions de constructibilité d'un triangle de longueurs données). Nous évoquerons ensuite la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle, puis envisagerons quelques constructions à la règle et au compas, et quelques applications.

Le cercle de centre O et de rayon r sera noté $\mathcal{C}(O, r)$.

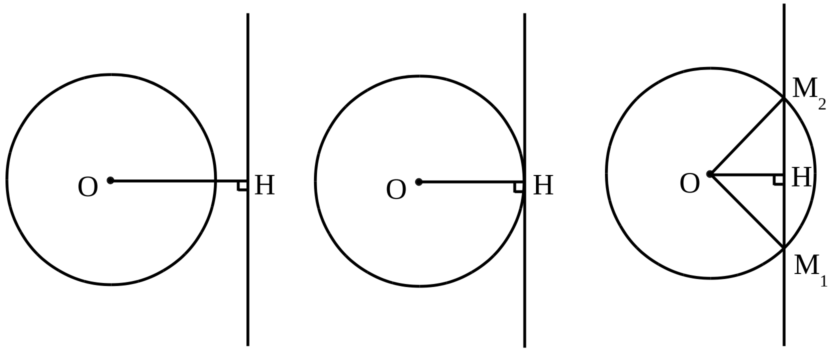
10.2.1 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Soient $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ (avec $r > 0$) et D un droite. Soit H le projeté orthogonal de O sur D. On sait que $d = OH$ représente la distance de O à D.

• S'il existe un point M commun à $\mathcal{C}$ et D, le Théorème de Pythagore donne $OM^2 = OH^2 + MH^2$, d'où $OH \leq OM$, et cela s'écrit $d \leq r$. Ainsi :

$$d > r \Rightarrow \mathcal{C} \cap D = \varnothing.$$

• Si $d = r$, $OH = r$ et $H \in \mathcal{C} \cap D$. Réciproquement, si $M \in \mathcal{C} \cap D$, alors $OM^2 = OH^2 + MH^2$ donne $MH = 0$, c'est-à-dire $M = H$. On peut alors conclure à $\mathcal{C} \cap D = \{H\}$.



• Si $d < r$, le Théorème de Pythagore et sa réciproque permettent d'écrire (faire un dessin à main levée) :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \cap D \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} OM = r \\ OM^2 = OH^2 + MH^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} OM = r \\ MH = \sqrt{r^2 - d^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad M \in \{M_1, M_2\} \end{aligned}$$

où M_1 et M_2 sont les deux points de la droite D situés à la distance $\sqrt{r^2 - d^2}$ de H. En conclusion :

$$\mathcal{C} \cap D = \begin{cases} \varnothing & \text{si } d > r, \\ \{H\} & \text{si } d = r, \\ \{M_1, M_2\} & \text{si } d < r \end{cases}$$

et l'on peut énoncer :

Théorème 10.15 *Soient D une droite et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r strictement positif. Soit d la distance de O à D, et H le projeté orthogonal de O sur D. L'intersection $\mathcal{C} \cap D$ est :*

a) l'ensemble vide si $d > r$,

b) le singleton $\{H\}$ si $d = r$,

c) une paire si $d < r$.

Définition 10.6 *Une droite D est appelée* ***tangente*** *au cercle $\mathcal{C}$ au point A si $\mathcal{C} \cap D = \{A\}$.*

Avec cette Définition :

Théorème 10.16 *Une droite D passant par un point A de $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ est tangente au cercle si et seulement si elle est perpendiculaire au rayon $[OA]$.*

Preuve — Si D est tangente à $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C} \cap D = \{A\}$ et le Théorème 10.15 montre que A est le projeté orthogonal de O sur D, et donc que D est perpendiculaire à (OA). Réciproquement, si D passe par un point A de $\mathcal{C}$ et si (OA) est perpendiculaire à D, alors A est le projeté orthogonal de O sur D, donc $d = r$ et le Théorème 10.15 donne $\mathcal{C} \cap D = \{A\}$. ■

10.2.2 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soient M un point du plan, et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Une droite D passant par M et sécante au cercle le coupera en deux points A et B, éventuellement confondus si cette sécante est une tangente. Alors :

Théorème 10.17 *Le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est indépendant du choix de la sécante, et vaut $MO^2 - r^2$.*

Preuve — Si A et B sont distincts, notons I le milieu de $[AB]$. En utilisant deux fois le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
\overline{MA}.\overline{MB} &= \left(\overline{MI} + \overline{IA}\right)\left(\overline{MI} + \overline{IB}\right) \\
&= MI^2 - IA^2 \\
&= \left(MO^2 - OI^2\right) - \left(AO^2 - OI^2\right) \\
&= MO^2 - r^2.
\end{aligned}$$

Si $A = B$ (i.e. si D est tangente au cercle en A), le Théorème de Pythagore donne immédiatement $\overline{MA}.\overline{MA} = MA^2 = MO^2 - r^2$. ■