Révisons les équations différentielles linéaires

En cette semaine d'avril 2012, je lisais quelques commentaires d'oraux de Fabien Herbaut et je suis tombé sur la leçon intitulée *Exemples d'utilisation des nombres complexes*. Il s'agissait d'un oral 2 du CAPES externe 2011, et le candidat avait surtout proposé des exercices de géométrie. Un examinateur profita de l'entretien qui suit l'exposé pour lui demander s'il connaissait d'autres domaines où l'on pouvait utiliser des nombres complexes avec profit. Et il y en avait : on utilise les nombres complexes en électricité, en trigonométrie pour obtenir de belles formules, en analyse pour intégrer des fonctions comme $\cos^n x$ en linéarisant cette puissance du cosinus, ou encore pour résoudre des équations du second degré.

Les nombres complexes interviennent aussi dans la résolution des équations différentielles linéaires de degré n à coefficients constants, puisqu'il s'agit alors de commencer à écrire l'équation caractéristique, puis la résoudre pour obtenir les solutions de la forme $e^{\lambda x}$, puis en déduire toutes les solutions possibles et imaginables de notre problème...

Je me suis donc surpris à réviser les équations différentielles linéaires, et à imaginer quelques questions simples qui pourraient être posées à l'oral pour savoir si un candidat a entendu parler de cette partie des programmes.

La première question qui m'est venue à l'esprit est cette question posée à l'écrit d'un CAPLP :

> **Question 1** — (Ecrit du CAPLP externe 2011) On considère l'équation différentielle suivante, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:
>
> $$y' - 2y - 1 = 0. \quad (E)$$
>
> On note g une fonction positive définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Peut-on affirmer que, si g est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$, alors g est croissante sur $\mathbb{R}$? Justifiez votre réponse complètement.

On essaie d'enfumer le candidat, puisqu'il n'y a aucune raison de savoir quoi que ce soit sur la résolution de ces équations pour répondre à cette question : si g, positive, est solution de (E), alors $g'(x) = 2g(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Et cela prouve que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
Certains se sont cependant fait prendre et ont perdu du temps sur cette question, comme le signale le rapport du jury :

> « Certains candidats ont établi la solution générale de l'équation (E), à savoir $y = Ke^{2x} - 1/2$, avec K une constante réelle. La fonction g étant supposée positive sur $\mathbb{R}$, ils ont discuté de la valeur de K afin que g soit positive. Il est cependant clair que la fonction y n'est pas positive sur $\mathbb{R}$. Il suffisait d'exprimer g' en fonction de g et d'utiliser les propriétés de cette dernière afin de répondre correctement et de façon très rapide. Cette question a pénalisé les candidats qui recherchent des techniques mathématiques au détriment du raisonnement. » [10]

Il n'est pas inutile de bien savoir résoudre des équations différentielles du type $ay' + by + c = 0$, et les deux questions suivantes sont à poser :

> **Question 2** — Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$? Démontrez complètement ce que vous affirmez.

↬ **Réponse 2** — Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $y = ke^{ax}$, où k est une constante quelconque. Il est facile de vérifier que toute fonction de la forme $y = ke^{ax}$ est solution de (E), puisque si $y = ke^{ax}$, alors $y' = kae^{ax} = ay$. Réciproquement, si y est une solution quelconque de (E), on peut définir la fonction $z = ye^{-ax}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables, et :

$$z' = y'e^{-ax} - aye^{-ax} = 0,$$

donc z est une fonction constante sur son intervalle de définition, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il existe donc un réel k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ye^{-ax} = k,$$

et l'on a bien $y = ke^{ax}$ (en utilisant toujours l'abus qui consiste à écrire une image pour parler d'une application, mais il faut bien dire qu'ici, cet abus est bien pratique !).

Question 3 — Déterminez toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y' + 5y + 8 = 0$.

↬ **Réponse 3** — La forme générale des solutions de l'équation homogène associée $y' + 5y = 0$ est $y = ke^{-5x}$, et il est facile de vérifier que la fonction constante $y = -8/5$ est une solution particulière de l'équation (E) : $y' + 5y + 8 = 0$. On peut donc affirmer que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = ke^{-5x} - 8/5$ (comme on le voit dans le cours, les solutions de l'équation différentielle linéaire avec second membre sont les sommes des solutions générales de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre).

Et quoi de plus naturelle que de se poser des questions sur la résolution d'équations du type $y'' + ay' + by = 0$, et plus généralement $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f(x)$? Commençons par des évidences qui doivent pouvoir être dites facilement, avec décontraction :

Question 4 — Soient a et b deux réels. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

Montrer qu'une solution de (E), a priori seulement deux fois dérivable, sera en fait indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

↬ **Réponse 4** — Si y est une solution de (E), c'est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, mais comme $y'' = -ay' - by$, la dérivée seconde y'' sera aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que y est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $y''' = -ay'' - by'$. On peut alors facilement montrer que y est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ en raisonnant par récurrence.

Question 5 — Soient a et b deux réels. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

On note $S_{\mathbb{R}}$ (resp. $S_{\mathbb{C}}$) l'ensemble des solutions réelles (resp. complexes) de (E), définies sur tout $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Montrer que $S_{\mathbb{R}}$ et $S_{\mathbb{C}}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, suivant le cas.

↬ **Réponse 5** — L'ensemble $S_{\mathbb{R}}$ est formé de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tandis que $S_{\mathbb{C}}$ est formé de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrons seulement que $S_{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel, le cas de $S_{\mathbb{C}}$ se traitant de la même façon. L'ensemble $S_{\mathbb{R}}$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc tout revient à vérifier que $S_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Tout d'abord $S_{\mathbb{R}}$ n'est pas vide puisque contient la fonction nulle. Ensuite, si y et z appartiennent à $S_{\mathbb{R}}$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, l'implication :

$$\left.\begin{array}{l} y'' + ay' + by = 0 \\ z'' + az' + bz = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ (y+\lambda z)'' + a\,(y+\lambda z)' + b\,(y+\lambda z) = 0$$

montre que $y + \lambda z$ appartient encore à $S_{\mathbb{R}}\ (E)$. Cela permet de conclure.

Question 6 — Soient a et b deux réels. Montrer que les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ coïncident avec les parties réelles des solutions complexes de cette équation.

↬ **Réponse 6** — Si y est une solution réelle de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y'' + ay' + by = 0,$$

alors y est la partie réelle d'elle-même, et peut aussi être considérée comme une solution complexe de l'équation. Toute solution réelle est donc la partie réelle d'une solution complexe.

Réciproquement, si y est une solution complexe de (E), alors :

$$\operatorname{Re} y = \frac{y + \overline{y}}{2}$$

est une solution réelle de (E) : c'est bien une solution de (E) puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire des solutions y et $\overline{y}$ de (E) (et que l'on sait que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel), et c'est bien une solution réelle puisque les valeurs qu'elle prend sont réelles. Ainsi toute partie réelle d'une solution complexe est une solution réelle.

Il est temps maintenant de donner le résultat complet du cours au sujet de ces équations différentielles linéaires de degré 2 ou n. La Question 7 propose une méthode pour chercher toutes les solutions quand le degré de l'équation est d'ordre 2, et la Question 8 permet de s'entraîner à dire tout ce que l'on sait au sujet des équations d'ordre n, sans redémontrer le Théorème du cours que l'on utilise et retourner à la résolution des systèmes différentiels d'ordre 1 comme on devrait. On trouvera, si on le désire, un discours complet sur ces équations différentielles et la preuve des résultats rappelés dans la Question 8 en lisant les chapitres 12 et 15 de [4]. Le but est ici de réviser rapidement tout cela :

Question 7 — On désire résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E): \quad y'' + ay' + by = 0$$

où a et b sont des nombres complexes. Une solution complexe de (E) est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui vérifie (E).

a) Montrer qu'une fonction exponentielle $x \mapsto e^{\lambda x}$ est une solution de (E) si et seulement si λ est une solution de l'équation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Cette dernière équation est appelée *équation caractéristique* de (E). On notera α et β les racines complexes de cette équation caractéristique, et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant du trinôme $\lambda^2 + a\lambda + b$.

b) En remplaçant a et b par leurs expressions en fonction de α et β, montrer que (E) équivaut à $(y' - \beta y)' = \alpha(y' - \beta y)$. En déduire toutes les solutions complexes de (E).

c) On suppose maintenant que a et b sont réels. Utilisez la méthode et les résultats de la question précédente pour déterminer toutes les solutions réelles de (E), c'est-à-dire toutes les fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient (E).

↬ **Réponse 7** — a) La fonction $e^{\lambda x}$ est solution de (E) si et seulement si :

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0.$$

En simplifiant par $e^{\lambda x}$, qui ne s'annule jamais, on obtient la condition équivalente $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

b) Comme $a = -(\alpha + \beta)$ et $b = \alpha\beta$,

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad y'' - (\alpha+\beta)\, y' + \alpha\beta y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y'' - \beta y' = \alpha\left(y' - \beta y\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(y' - \beta y\right)' = \alpha\left(y' - \beta y\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{C} \quad y' - \beta y = Ce^{\alpha x}.\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}y' - \beta y = Ce^{\alpha x} \quad &\Leftrightarrow \quad y' e^{-\beta x} - \beta y e^{-\beta x} = Ce^{(\alpha-\beta)x} \\ &\Leftrightarrow \quad (ye^{-\beta x})' = Ce^{(\alpha-\beta)x}\end{aligned}$$

d'où la discussion :

- Si $\Delta \neq 0$, les racines α, β sont distinctes et y est solution de (E) si et seulement si :

$$ye^{-\beta x} = \frac{C}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)x} + D$$

où $C, D \in \mathbb{C}$. Cela s'écrit encore $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ où A, B sont des constantes complexes.

- Si $\Delta = 0$, alors $\alpha = \beta$ et l'équation (E) équivaut à $ye^{-\beta x} = Cx + D$ où $D \in \mathbb{C}$, ou encore $y = (Ax + B)\, e^{\alpha x}$ avec $A, B \in \mathbb{C}$.

c) • Si a et b sont réels, on peut raisonner comme dans la question précédente lorsque $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, en prenant seulement garde de ne faire intervenir que des coefficients C, D, A, B réels. On en conclut que :

- Si $\Delta > 0$, $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$,
- Si $\Delta = 0$, $y = (Ax + B)\, e^{\alpha x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

• Si $\Delta < 0$, la méthode donnée en b) ne fonctionne plus puisque l'équation caractéristique n'a plus de racines réelles. Mais on sait (et il est facile de démontrer) que les solutions réelles d'une équation différentielle linéaire de degré quelconque, à coefficients réels constants, s'obtiennent en prenant les parties réelles des solutions complexes (Question). En utilisant le résultat démontré en b), on s'aperçoit alors que toutes les solutions réelles de (E) seront de la forme :

$$y = \mathrm{Re}(Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x})$$

où α, β sont les racines complexes (non réelles) de l'équation caractéristique, et où $A, B \in \mathbb{C}$. Posons $\alpha = u+iv$ et $\beta = u-iv$, avec $(u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Posons aussi $A = A_1+iA_2$ et $B = B_1+iB_2$. Alors :

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{Re} e^{ux}(A(\cos vx + i\sin vx) + B(\cos vx - i\sin vx)) \\ &= e^{ux}(A_1\cos vx - A_2\sin vx + B_1\cos vx + B_2\sin vx) \\ &= e^{ux}\left(A'\cos vx + B'\sin vx\right) \end{aligned}$$

où $A' = A_1 + B_1$ et $B' = B_2 - A_2$. En fait A' et B' peuvent être des réels quelconques puisqu'il est toujours possible de résoudre un système de Cramer pour obtenir des réels A_1, A_2, B_1, B_2 tels que $A' = A_1 + B_1$ et $B' = B_2 - A_2$, ce qui permet d'utiliser les lignes écrites ci-dessus.

En conclusion, si $\Delta < 0$, et si l'on pose $\alpha = u + iv$ et $\beta = u - iv$ avec u et v réels, alors $y = e^{ux}(A\cos vx + B\sin vx)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ (attention : dans cette conclusion, on a repris les notations A et B mais il s'agit de constantes différentes de celles avec lesquelles on vient de travailler).

Remarque — Dans le dernier cas où $\Delta < 0$, les solutions obtenues peuvent aussi s'écrire sous la forme $y = Ke^{ux}\cos(vx+\varphi)$ où $K, \varphi \in \mathbb{R}$. Le réel K est lié à l'amplitude du phénomène, et φ désigne la *phase initiale* (quand $x = 0$). En effet, si l'on travaille avec une solution y non nulle, alors $A^2 + B^2 \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} y &= e^{ux}(A\cos vx + B\sin vx) \\ &= e^{ux}\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos vx + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin vx\right). \end{aligned}$$

On sait qu'il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\varphi = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, et l'on obtient :

$$\begin{aligned} y &= e^{ux}\sqrt{A^2+B^2}(\cos\varphi\cos vx - \sin\varphi\sin vx) \\ &= e^{ux}\sqrt{A^2+B^2}\cos(vx+\varphi) \end{aligned}$$

comme on le désirait.

Question 8 — On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants :

$$(E) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f(x)$$

où les a_i appartiennent à $\mathbb{C}$ et où $f(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On demande de répondre très précisément aux questions suivantes sans démontrer quoi que ce soit, donc en faisant référence au cours que l'on a appris.

a) Quelle est la structure générale des solutions de (E) ?

b) Qu'appelle-t-on équation sans second membre associée à (E) ? On appellera (H) cette équation sans second membre.

c) Qu'appelle-t-on équation caractéristique de (H) ?

d) Quelle est la forme générale des solutions de (H) ? Que peut-on dire de celles-ci ?

e) Lorsque $f(x) = Q(x)e^{\mu x}$ où $\mu \in \mathbb{C}$ et où $Q(x)$ est un polynôme en x, sous quelle forme peut-on chercher une solution particulière de (E) ?

↬ **Réponse 8** — *Les questions enchaînées auxquelles on doit répondre ici peuvent très bien être posées par un jury d'oral pour vérifier que le candidat connaît les résultats du cours* *concernant les équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants. Les preuves de ces résultats ne sont pas demandées. S'il le désire, le lecteur pourra retrouver ces preuves, et d'autres résultats sur les systèmes linéaires d'ordre* 1, *dans le chapitre 15 de mon livre [4], ainsi que des développements dans le cas particulier où $n = 2$ dans le chapitre 12.*

a) Il est facile de vérifier qu'une fonction est solution de (E) si et seulement si c'est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre (E) et d'une solution quelconque de l'équation sans second membre :

$$(H) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0.$$

b) Comme on vient de le dire, l'équation sans second membre associée à (E) est (H). On dit aussi que (H) est l'*équation différentielle homogène associée* à (E).

c) L'*équation caractéristique* de (H) est $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0 = 0$.

d) Une fonction $y(x)$ est une solution (complexe) de (H) si et seulement si elle s'écrit :

$$y(x) = \sum_{i=1}^{p} P_i(x)\, e^{\lambda_i x} \quad (*)$$

où les λ_i sont les racines de l'équation caractéristique, et où les $P_i(x)$ sont des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{C}$, de degré strictement inférieur à la multiplicité r_i de λ_i dans l'équation caractéristique.

Il s'ensuit que l'ensemble S_H des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension n (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant que l'on s'intéresse à des solutions réelles ou complexes). Compte tenu de la réponse donnée en a), on peut affirmer que l'ensemble S_E des solutions de (E) est un espace affine de dimension n et de direction S_H. La forme générale des solutions de (H) donnée par $(*)$ montre en outre que le système $\left(x^{s_i} e^{\lambda_i x}\right)_{1\leq i\leq p, 0\leq s_i<r_i}$ est une base de S_H dans le cas complexe.

Remarque — On peut rajouter que :

- Lorsque les coefficients $a_i$sont réels, les solutions réelles de (H) s'obtiennent en prenant les parties réelles des solutions complexes que l'on vient de décrire (Question).

- Si $(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, il existe une et une seule solution de (E) qui satisfait les conditions initiales $\left(y(x_0), y'(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0)\right) = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ (conditions de Cauchy), ce que l'on exprime en disant qu'il y a existence et unicité du problème de Cauchy attaché à l'équation différentielle (E).

e) La méthode générale permettant de construire une solution particulière de l'équation sans second membre est la *méthode de variation des constantes*. Elle consiste à écrire la forme générale des solutions de (H), puis à considérer que les constantes qui interviennent sont des fonctions de x, pour injecter ensuite la fonction obtenue dans (E) et obtenir des conditions.

Mais quand le second membre de (E) est de la forme $f(x) = Q(x)\, e^{\mu x}$, c'est-à-dire le produit d'un polynôme par une exponentielle, il est beaucoup plus facile de rechercher une solution particulière de (E) de la forme $y(x) = P(x)\, e^{\mu x}$ où $P(x)$ est une fonction polynomiale de degré $\deg Q + \operatorname{mult}(\mu)$, où $\operatorname{mult}(\mu)$ désigne la multiplicité de μ dans le polynôme caractéristique de (H).

Remarque — Dans le cours, on vérifie aussi que la valuation de $P(x)$ peut être choisie égale à $\operatorname{mult}(\mu)$, et que, dans ce cas, le polynôme $P(x)$ est déterminé de façon unique ([4], Th. 248).

Et voici quatre questions d'application immédiate que l'on peut facilement poser :

Question 9 — Résoudre l'équation différentielle $y'' - 7y' + 10y = 0$.

↬ **Réponse 9** — (Méthode rappelée dans les Questions et)
L'équation caractéristique est $x^2 - 7x + 10 = 0$. Elle admet deux racines réelles 2 et 5, donc les solutions complexes (resp. réelles) sont les fonctions $x \mapsto Ae^{2x} + Be^{5x}$ où A et B sont des constantes complexes (resp. réelles).

Question 10 — Résoudre l'équation différentielle $y'' - 16y' + 64y = 0$.

↬ **Réponse 10** — (Méthode rappelée dans les Questions et)
L'équation caractéristique est $(x-8)^2 = 0$. Elle n'admet que 8 pour racine, donc les solutions sont de la forme $y = (Ax + B)\, e^{8x}$ avec A et B réels ou complexes suivant que l'on cherche des solutions réelles ou complexes.

Question 11 — Résoudre l'équation différentielle $y'' - 6y' + 13y = 0$.

↬ **Réponse 11** — (Méthode rappelée dans les Questions et)
L'équation caractéristique est $x^2 - 6x + 13 = 0$. Le discriminant du trinôme du premier membre est $\Delta = 36 - 52 = -16$, donc les solutions de l'équation caractéristique sont $3 \pm 2i$. Les solutions complexes de l'équation différentielle proposée seront alors de la forme $y = Ae^{(3+2i)x} + Be^{(3-2i)x}$ avec $A, B \in \mathbb{C}$, et les solutions réelles seront les parties réelles des solutions complexes, c'est-à-dire les fonctions de la forme $y = e^{3x}\,(A\cos 2x + B\sin 2x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Question 12 — Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Pouvez-vous dire quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$? Justifiez complètement ce que vous affirmez. On vous autorise à utiliser un théorème général du cours sans avoir à le démontrer.

↬ **Réponse 12** — *Voilà une façon de savoir si on connaît les solutions de cette équation différentielle et le résultat général concernant la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants. Cette question est typiquement une question que l'on peut poser à l'oral.*

Première réponse (application d'un résultat général du cours) — Le cours nous donne la forme générale des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n (Questions ou). On applique ce résultat à l'équation $(E) : y'' + \omega^2 y = 0$. L'équation caractéristique associée à (E) est $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, et admet deux solutions distinctes $\pm i\omega$, donc y est de la forme :

$$y = Ae^{i\omega} + Be^{-i\omega}$$

où $A, B \in \mathbb{C}$. Les solutions complexes sont obtenues avec A et B complexes. Les solutions réelles sont les parties réelles des solutions complexes, si bien que si $\omega = u + iv$, alors :

$$y = e^{iu}(A\cos vx + B\sin vx)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ cette fois-ci. On peut écrire ces solutions sous la forme $y = Ke^{ux}\cos(vx + \varphi)$ où $K, \varphi \in \mathbb{R}$ (ces deux écritures des solutions réelle de (E) sont expliquées dans la réponse à la Question).

Seconde réponse (preuve complète suivant un procédé judicieux) — Dans les années 2005, l'équation différentielle $(E) : y'' + \omega^2 y = 0$ était traitée en terminale scientifique et constituait une équation de référence. Une résolution directe était proposée qui évitait le recours à des résultat aussi généraux que ceux des Questions ou . Voici comment l'on procédait :

a) On remarque que les fonctions $\cos\omega x$ et $\sin\omega x$ sont des solutions particulières de (E), et par linéarité, que toutes les fonctions de la forme $A\cos\omega x + B\sin\omega x$ sont encore des solutions de (E).

b) Réciproquement, on montre que toute solution y de (E) est de la forme $A\cos\omega x+B\sin\omega x$. Pour cela on démontre d'abord que, si $S_{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des solutions réelles de (E), alors :

$$\left.\begin{array}{l} y\in S_{\mathbb{R}} \\ y(0)=y'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=0. \quad (*)$$

En effet, dès que $y\in S_{\mathbb{R}}$, la fonction $y'^2+\omega^2y^2$ est constante puisque :

$$\left(y'^2+\omega^2y^2\right)'=2y'\left(y''+\omega^2y\right)=0,$$

et l'hypothèse $y(0)=y'(0)=0$ permet d'affirmer que la fonction $y'^2+\omega^2y^2$ est identiquement nulle. d'où $y=0$.
Cela étant, si $y\in S_{\mathbb{R}}$, la fonction :

$$z=y-\left(y(0)\cos\omega x+\frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega x\right)$$

appartient à $S_{\mathbb{R}}$ et vérifie $z(0)=z'(0)=0$. L'implication $(*)$ donne alors $z=0$, d'où :

$$y=y(0)\cos\omega x+\frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega x.$$

Remarque — Le résultat démontré au début du b) montre que l'application linéaire :

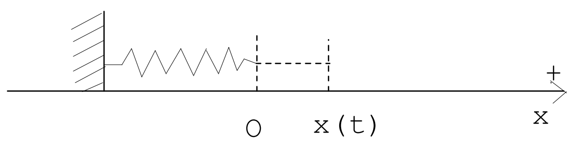
$$\begin{array}{cccc} f: & S_{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & y & \mapsto & (y(0),y'(0)) \end{array}$$

est injective, ce qui impose à l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}$ d'être de dimension inférieure ou égale à 2. Comme le couple de fonctions $(\cos\omega x,\sin\omega x)$ forme un système libre de $S_{\mathbb{R}}$, on peut affirmer que $\dim S_{\mathbb{R}}=2$ et que $(\cos\omega x,\sin\omega x)$ est une base de cet espace.

Pour terminer notre petit voyage différentiel, prenons un ressort, accrochons une masse à son extrémité, tirons cette masse et relâchons le tout bestialement pour profiter du mouvement ! Nous voilà plongé dans ces phénomènes oscillatoires qui sont si friands des fonctions sinus et cosinus. Un peu de frayeur, donc, avec l'exercice suivant :

Question 13 — Parlons un peu de mouvements oscillatoires.

a) Sur un oscillateur mécanique, une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité d'un ressort de raideur k ($k\in\mathbb{R}_+^*$) de façon à pouvoir coulisser sans frottements sur un axe horizontal Ox, comme sur la figure ci-dessous. On note $x(t)$ l'abscisse de la masse m à la date t, et l'on suppose que le ressort est dans sa position d'équilibre quand $x(t)=0$, c'est-à-dire quand la masse m est à l'origine O du repère de Ox. On tire la masse jusqu'à un point d'abscisse x_0, puis on la relâche à la date t_0. Déterminez l'équation horaire du mouvement de la masse m.



b) On suppose maintenant qu'il existe une force de frottement dû à l'air. Pour cela on rajoute des ailerons à la masse m. On suppose que la force de résistance $\overrightarrow{f}$ dû à l'air est proportionnelle à la vitesse $\overrightarrow{v}$ du solide, ce qui s'écrit $\overrightarrow{f} = -r\overrightarrow{v}$ où r est une constante réelle strictement positive. Déterminez la nouvelle équation horaire qui régit le mouvement.

c) Les résultats obtenus correspondent-ils à notre intuition ?

↬ **Réponse 13 —** a) Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$$

où $\overrightarrow{\gamma}$ est l'accélération et $\overrightarrow{F}$ la résultante de toutes les forces qui s'appliquent sur le point mobile. Si $x(t)$ représente la loi horaire de ce mouvement, on a donc :

$$mx'' = -kx$$

soit $x'' = -\omega^2 x$ en posant $\omega = \sqrt{k/m}$. Cette équation différentielle admet des solutions de la forme $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

b) Le principe fondamental de la dynamique donne maintenant :

$$mx'' = -kx - rx'$$

avec les conditions initiales $(x(0), x'(0)) = (x_0, 0)$. On doit donc résoudre l'équation différentielle :

$$(E): \quad x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0.$$

L'équation caractéristique de (E) s'écrit :

$$(C): \quad \lambda^2 + \frac{r}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

où le premier membre est un trinôme du second degré de discriminant :

$$\Delta = \frac{r^2 - 4mk}{m^2}.$$

D'où la discussion :

• Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $r^2 > 4mk$, le mouvement est très amorti. Si l'on appelle α et β les deux racines de (C), on constate qu'elles sont toutes les deux négatives puisque $\alpha\beta = k/m > 0$ et $\alpha + \beta = -r/m < 0$. En supposant que $\alpha < \beta < 0$, on obtient :

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \quad \text{avec } \alpha < \beta < 0.$$

On remarque que la dérivée $x'(t) = A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}$ s'annule si et seulement si $B\beta e^{(\beta-\alpha)t} = -A\alpha$, et que cette dernière équation admet au plus une solution. Comme par hypothèse $x'(0) = 0$, on peut affirmer que $x'(t)$ garde un signe constant quand $t \geq 0$, et que $x(t)$ est une fonction monotone sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$, on en déduit que le solide va retourner immédiatement vers sa position d'équilibre sans effectuer d'oscillation. Le mouvement oscillatoire est dit *apériodique* (FIG. 15).

• Si $\Delta = 0$,

$$x(t) = (At + B)e^{\alpha t}$$

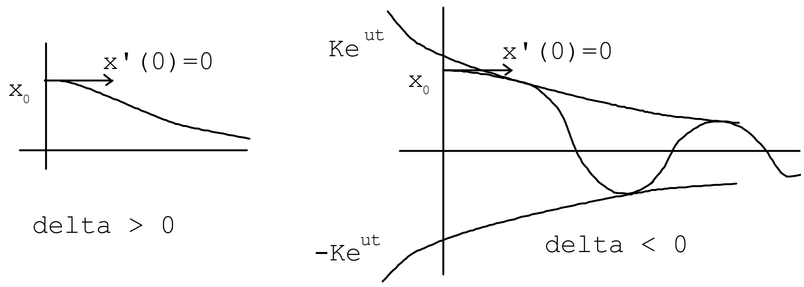


FIG. 15 – Divers types de mouvements suivant le signe de Δ

où $\alpha = -r/2m < 0$. La dérivée $x'(t) = (\alpha At + A + \alpha B)\, e^{\alpha t}$ s'annule en au plus une seule valeur de t, de sorte que le mouvement soit du même type que le précédent. On parle ici de mouvement oscillatoire *apériodique critique*.

• Si $\Delta < 0$, les racines de (C) sont de la forme $u \pm iv$ avec $u = -r/2m < 0$, et l'équation du mouvement sera :

$$x(t) = e^{ut}(A\cos vt + B\sin vt) = Ke^{ut}\cos(vt+\varphi)\,. \quad (*)$$

On parle de mouvement *pseudo-périodique* de pseudo-période $2\pi/v$, et l'on dit que v est une pseudo-pulsation. La masse oscille indéfiniment autour de sa position d'équilibre mais les amplitudes des oscillations diminuent inexorablement. La FIG. 16 montre le graphe d'une telle fonction sinusoïdale amortie.

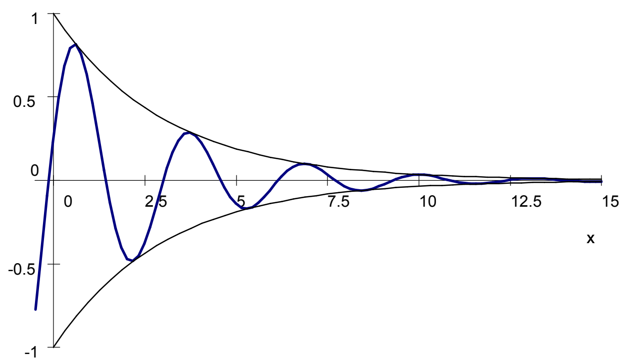
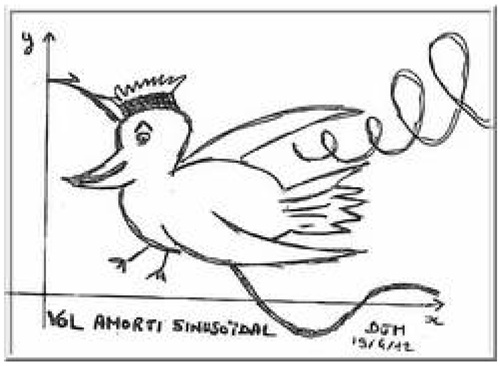


FIG. 16 – $y = e^{-x/3}\cos(2x+5)$

Comme $u < 0$, on obtient $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. On remarque que le graphe $\mathcal{G}$ de la fonction $x(t)$ est coincé entre les courbes représentatives des fonctions $t \mapsto \pm Ke^{ut}$, et l'on peut vérifier que les courbes $\mathcal{G}$ et Ke^{ut} sont tangentes en chacun de leurs points de contact. En effet $\mathcal{G}$ coupe le graphe de la fonction $t \mapsto Ke^{ut}$ en des points d'abscisse t tels que $\cos(vt+\varphi) = 1$, c'est-à-dire lorsque $t = t_k$ avec $t_k = (k2\pi - \varphi)/v$, et un calcul donne $x'(t_k) = Kue^{ut_k}$.

c) Dans le cas où il n'y a pas de frottements, la seule force qui agit sur le point massique m est la résistance du ressort. On parle alors de mouvement *oscillatoire non amorti*, ou de mouvement *oscillatoire harmonique*. Les oscillations de m sont éternelles et toujours de même amplitude. Un tel modèle n'est pas réaliste dans le sens où il existe toujours des forces de frottement, sauf si l'on travaille dans le vide. Si l'on tient compte de ces forces de frottement, on constate que l'amplitude des oscillations diminue avec le temps, voire qu'il n'y a plus d'oscillation du tout mais un retour direct vers l'état d'équilibre. Cela correspond tout à fait à l'intuition que l'on peut avoir de ce phénomène. On obtient alors un mouvement *oscillatoire amorti*.



Bibliographie

[1] Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement, Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, dite commission Kahane, janvier 2000.

[2] J. Escoffier, Probabilités et statistiques pour le CAPES et l'agrégation interne, Ellipses, 2006.

[3] S. Francinou, S. Nicolas & H. Gianella, Exercices de mathématiques des oraux de l'école polytechnique et des écoles normales supérieures : Algèbre, tome 1, Cassini, 2008.

[4] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. II, Publibook, 2006.

[5] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. III, Publibook, 2007.

[6] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. IV, Publibook, 2008.

[7] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. IV : Géométrie affine et euclidienne, Publibook, 2010.

[8] A. Delcroix, D.-J. Mercier, A. Omrane, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. V : Analyse, Intégration, Géométrie, Publibook, 2011.

[9] D.-J. Mercier, Cahiers de mathématiques du supérieur, Vol. I, Publibook, 2010.

[10] Rapport du Jury du CAPLP externe Mathématiques Sciences Physiques 2011 présenté par Frédéric Thollon, président du jury, Ministère de l'Education Nationale, 2011.