Quatre questions autour du Théorème de la droite des milieux

Ce matin du vendredi 27 avril 2012, un étudiant est passé au tableau pour démontrer le Théorème de la droite des milieux. Il utilise un parallélogramme « construit de façon judicieuse », ce qui lui permet de proposer une réponse simple et agréable, celle qu'on peut lire dans la Question 1. Mais est-ce bien juste ?

Je pose la question puis on y réfléchit tous ensemble. Personne ne s'y attendait à cet endroit, pourtant un jury d'oral peut sauter sur l'occasion pour demander de préciser la définition d'un parallélogramme que l'on utilise, et si on en a le droit. D'ailleurs, il y a juste quelques jours, un visiteur du site MégaMaths m'a laissé un commentaire fourni concernant son oral du CAPES interne et les quatre oraux auxquels il a pu assister. Et j'ai noté que le jury avait réagit quand la candidate avait proposé une preuve qui utilisait cette définition abusive d'un parallélogramme. Il raconte :

> « Un examinateur demande la définition d'un parallélogramme… Est-ce que (AB) // (CD) est suffisant ? Que manque-t-il et quelle définition donneriez-vous exactement ? La candidate rajoute « côtés parallèles et égaux », mais cela fait tiquer le jury. »

Cela nous motive pour réfléchir sur la preuve du Théorème de la droite des milieux en quatrième à travers les quatre questions suivantes. La première question sert à aiguiser notre sens critique et ne pas rester KO si le jury interroge de cette façon (la question est vicieuse à souhait si on ne l'a pas déjà rencontrée !).

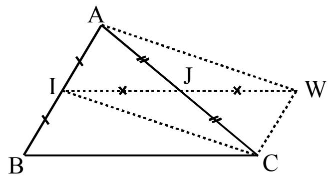
La seconde est l'occasion de voir ce que l'on peut répondre au jury, ou ce que l'on peut dire à ses élèves de collège à qui on se doit de ne rien cacher... On ne va quand même pas tricher avec eux pour leur faire croire que l'on obtient toujours un parallélogramme quand... Enfin vous verrez ci-dessous.

La troisième est une question plus gratuite que l'on ne se pose généralement pas, mais comme nous sommes entre « grands », et entre nous, tout est permis !

Et je termine avec une quatrième question directement sortie de mon TD sur les triangles de ce matin, donc placée avec tous les autres exercices de TD de l'année 2011-12 dans les volumes AGA I et II ([13] et [14]), mais aussi dans le volume 5 de *Acquisition des fondamentaux pour les concours* [10].

Il est temps de s'y mettre...

> **Question 1** — Un jury d'oral demande au candidat de démontrer que la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, comme il pourrait le faire en classe de quatrième. Le candidat propose la démonstration suivante :
> « Si I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$, je trace le symétrique W de I par rapport à J. Le quadrilatère $IAWC$ possède des diagonales qui se coupent en leur milieu. Il s'agit donc d'un parallélogramme et je peux affirmer que les segments $[IA]$ et $[CW]$ sont égaux et parallèles. Comme I est le milieu de $[AB]$, j'en déduis que les segments $[BI]$ et $[CW]$ sont égaux et parallèles. Cela prouve que le quadrilatère $BIWC$ est un parallélogramme, et donc que $IW = BC$. Comme $IJ = IW/2$, j'obtiens $IJ = BC/2$. »



Certains membres du jury hochent de la tête, puis l'un d'entre eux demande au candidat s'il est bien sûr que son raisonnement est complet ? Est-il seulement juste ? Que va répondre le candidat ?

↬ **Réponse 1** — On trouve parfois cette preuve dans des manuels de quatrième, mais elle est incomplète, et donc fausse en l'état, parce qu'elle sous-entend qu'un quadrilatère qui possède deux côtés opposés égaux et parallèles, est un parallélogramme. Cette affirmation est vraie seulement si l'on suppose que le quadrilatère n'est pas croisé (Questions 2 et 3).

Qui plus est, cette preuve induit l'élève à l'erreur, car lui fait utiliser un résultat faux qu'il risque d'utiliser à son tour en supposant implicitement qu'il ne travaille pas avec un quadrilatère croisé. Ce qui doit au moins être dit, mais sera vraisemblablement seulement observé sur la figure.

Le jury a donc raison de s'inquiéter et de questionner le candidat. S'il est préparé, celui-ci pourra répondre qu'il a préféré simplifier le problème en sous-entendant implicitement que le quadrilatère $IAWC$ était convexe, ceci pour ne pas affoler les élèves tout en leur montrant la « beauté de ce raisonnement très court ». Il pourra aussi rajouter :

- qu'il connaît un autre moyen de procéder (voir Question 4 plus bas) ;

- qu'il peut démontrer proprement que le quadrilatère $BIWC$ n'est pas croisé en utilisant des propriétés classiques des demi-plans (voir ci-dessous).

Complément — Montrons que le quadrilatère $BIWC$ n'est pas croisé. Il s'agit de montrer que B et C sont dans le même demi-plan de frontière (IW). La droite (IW) partage le plan en deux demi-plans ouverts $\mathcal{P}_A$ qui contient A, et $\mathcal{P}_*$ qui ne contient pas A. Comme le milieu I de $[AB]$ appartient à la frontière (IW), il est facile de voir que $B \in \mathcal{P}_*$ (en effet si $B \in \mathcal{P}_A$ alors $[AB] \subset \mathcal{P}_A$ par convexité du demi-plan $\mathcal{P}_A$, donc $I \in \mathcal{P}_A$, ce qui est absurde ; et si $B \in (IW)$ alors $B = I = A$, ce qui est encore absurde). De même J est le milieu de $[AC]$ et $J \in (IW)$, donc $C \in \mathcal{P}_*$. Finalement B et C appartiennent au demi-plan $\mathcal{P}_*$, donc $BIWC$ n'est pas croisé.

Question 2 — L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « Un quadrilatère $ABCD$ qui possède deux côtés opposés égaux et parallèles, est un parallélogramme » ? Justifiez votre réponse.

↬ **Réponse 2** — La FIG. 18 montre qu'il ne suffit pas d'avoir $AB = CD$ et $(AB) \, // \, (CD)$ pour pouvoir affirmer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. L'affirmation proposée est donc fausse.

- Si A, B et C sont tracés, le point D vérifiera $AB = CD$ et $(AB) \, // \, (CD)$ si, et seulement si, il appartient à la parallèle à (AB) passant par C, et se trouve à la distance AB de C. Il existe deux points D et D' qui vérifient ces conditions, situés de part et d'autre de C. On obtient donc deux tracés possibles (FIG. 18) et si l'un des quadrilatères obtenus est un parallélogramme ($ABCD$ sur la figure), l'autre est croisé et n'est donc pas un parallélogramme ($ABCD'$ sur la figure).

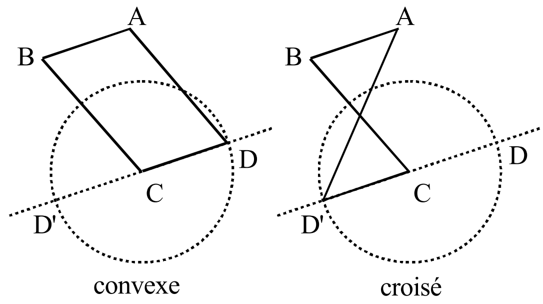


FIG. 18 – Deux cas de figure

- On en déduit que l'affirmation sera vraie si l'on ajoute une hypothèse, par exemple : « $ABCD$ n'est pas croisé », ou si l'on préfère : « les points A et D appartiennent au même demi-plan de frontière (BC) » (voir Question).

Question 3 — Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ tel que $AB = CD$, (AB) parallèle à (CD), et tel que les points A et D appartiennent au même demi-plan de frontière (BC), est un parallélogramme.

↬ **Réponse 3** — Soit $\mathcal{P}_A$ le demi-plan de frontière (BC) contenant A. La parallèle à (BC) issue de A coupe (CD) en un point D'' (puisque (AB) et (CD) sont parallèles). Par construction, le quadrilatère $ABCD''$ est un parallélogramme (ses côtés opposés sont parallèles), donc il est convexe et les points A et D'' sont dans le même demi-plan de frontière (BC). Ainsi $D'' \in \mathcal{P}_A$. Comme on a aussi $D \in \mathcal{P}_A$, on en déduit que :

$$]CD) =]CD'') = (CD) \cap \mathcal{P}_A.$$

Comme $AB = CD = CD''$, et comme il existe un et seul point de la demi-droite $]CD)$ situé à la distance AB de C, on déduit $D = D''$.

Question 4 — On se place au niveau de la classe de quatrième. Plus précisément, on suppose que l'on dispose des propriétés et caractérisations usuelles du rectangle, ainsi que de l'équivalence entre les assertions « le triangle ABM est rectangle en M » et « M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ », mais on demande que le Théorème de Thalès ou sa réciproque ne soient pas utilisés dans les raisonnements proposés. En respectant ces contraintes, démontrer les trois résultats suivants connus sous le nom de « Théorème de la droite des milieux » :

a) La droite joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

b) Si I (resp. J) est le milieu de $[AB]$ (resp. $[AC]$), alors $BC = 2IJ$.

c) La droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

↬ **Réponse 4** — a) Les notations sont celles de la FIG. 19. Dans le triangle rectangle AHC, le milieu J de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle AHC, donc $AJ = JH$. Si W désigne le milieu de $[AH]$, (WJ) sera la médiatrice de $[AH]$. De même, (WI) est la médiatrice de $[AH]$. Les droites (WI) et (WJ) passent toutes les deux par W et sont parallèles (puisque perpendiculaires à la même troisième droite (AH)), donc sont confondues. Ainsi $(WI) = (WJ)$, et les points I, W et J seront alignés sur une droite perpendiculaire à (AH), donc parallèle à (BC).

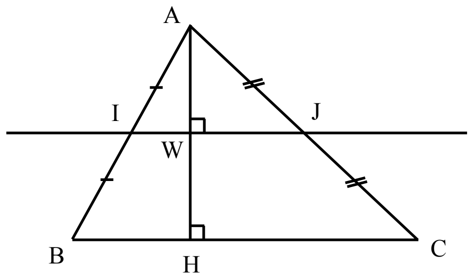


FIG. 19 – Droite des milieux

b) Plaçons-nous dans le cas de la FIG. 19 où $H \in [BC]$ (les deux autres cas de figures se traitant de la même façon) et notons U et V les milieux de $[HC]$ et $[HB]$. On vérifie comme précédemment que (UJ) et (VI) sont les médiatrices respectives de $[HC]$ et $[HB]$. On en déduit que les quadrilatères $WHUJ$ et $WHVI$ possèdent chacun trois angles droits, donc sont des rectangles. Par conséquent :

$$\begin{cases} WJ = HU = UC \\ IW = HV = VB \end{cases}$$

et $BC = BH + HC = 2VH + 2HU = 2IW + 2WJ = 2IJ$.

Remarque — Le raisonnement proposé doit être répété dans chacun des trois cas de figures qui correspondent à la position relative de H par rapport aux points B et C. Si l'on ne se place plus au niveau quatrième et si l'on s'autorise à utiliser des mesures algébriques, les trois démonstrations n'en donnent plus qu'une : il suffit de remplacer toutes les distances écrites plus haut par des mesures algébriques pour s'en apercevoir.

c) Si Δ est une droite parallèle à (BC) qui passe par le milieu I de $[AB]$, elle coupe (AC) en un point J'. Si J désigne le milieu de $[AC]$, la question a) montre que (IJ) est parallèle à (BC). Les droites Δ et (IJ) sont donc toutes les deux parallèles à (BC), et passent par le même point I. Elles sont donc égales, et $J' = J$.

Pour approfondir le thème de l'utilisation des demi-plans dans les démonstrations, on pourra se référer à un article que j'avais écrit il y a quelques années pour l'APMEP, intitulé *Demi-plans, convexité et polygones* [5].

Bibliographie

[1] Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement, Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, dite commission Kahane, janvier 2000.

[2] M. Cuénod et Y. Drevous, Eléments de mathématiques puisés à leurs origines, une approche pédagogique, Ed. Ressources & développement, 2006.

[3] J. Escoffier, Probabilités et statistiques pour le CAPES et l'agrégation interne, Ellipses, 2006.

[4] S. Francinou, S. Nicolas & H. Gianella, Exercices de mathématiques des oraux de l'école polytechnique et des écoles normales supérieures : Algèbre, tome 1, Cassini, 2008.

[5] D.-J. Mercier, Demi-plans, convexité et polygones, APMEP **430**, pp. 630-642, septembre-octobre 2000.

[6] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. II, Publibook, 2006.

[7] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. III, Publibook, 2007.

[8] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. IV, Publibook, 2008.

[9] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. IV : Géométrie affine et euclidienne, Publibook, 2010.

[10] A. Delcroix, D.-J. Mercier, A. Omrane, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. V : Analyse, Intégration, Géométrie, Publibook, 2011.

[11] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. VI : cuvée spéciale, un brin d'analyse, de géométrie et de probabilités, Publibook, à paraître.

[12] D.-J. Mercier, Cahiers de mathématiques du supérieur, Vol. I, Publibook, 2010.

[13] D.-J. Mercier, Mise à niveau AGA - Révision équilibrée des thèmes d'algèbre, de géométrie et d'arithmétique, volume I, Lulu, 2011.

[14] D.-J. Mercier, Mise à niveau AGA - Révision équilibrée des thèmes d'algèbre, de géométrie et d'arithmétique, volume II, Lulu, 2011.

[15] Rapport du Jury du CAPLP externe Mathématiques Sciences Physiques 2011 présenté par Frédéric Thollon, président du jury, Ministère de l'Education Nationale, 2012.