Le flocon de Von Koch

La courbe fractale connue sous le nom de *flocon de Von Koch*, du nom de son inventeur le mathématicien suédois Helge Von Koch (1870-1924), est un exemple de courbe de longueur infinie qui limite une surface finie.

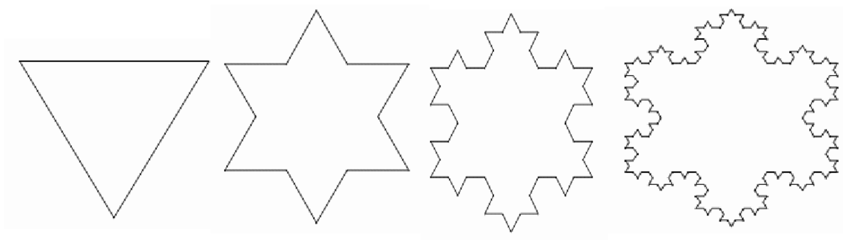

Figure 1: Les quatre premières étapes de la construction

On commence en dessinant un triangle équilatéral de côté a. On divise chacun de ses côtés en trois parties égales, et l'on construit un triangle équilatéral sur le "segment du milieu" de chaque côté, à l'extérieur de la figure. On recommence avec la figure obtenue, et ainsi de suite...

La FIG. 1 montre les quatre premières étapes de la construction. Que se passe-t-il quand n tend vers $+\infty$?

A l'étape n, notons :
N_n le nombre de côté de la figure obtenue,
l_n la longueur d'un côté,
p_n le périmètre de la figure,
A_n son aire.

A l'étape n°1 :

$$N_1 = 3 \; ; \quad l_1 = a \; ; \quad p_1 = N_1 l_1 = 3a \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

A l'étape n, $N_n = 4 \times N_{n-1} = 4 \times 4 \times N_{n-2} = ... = 4^{n-1} \times N_1 = 3 \times 4^{n-1}$, et $l_n = a/3^{n-1}$, donc le périmètre de la figure est :

$$p_n = N_n \times l_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} a.$$

L'aire A_n est obtenue en ajoutant à A_{n-1} les aires des N_{n-1} petits triangles équilatéraux dessinés à l'extérieur de la figure obtenue à l'étape $n-1$. Ces petits triangles équilatéraux sont de côtés l_n et il y en a N_{n-1}, donc :

$$A_n = A_{n-1} + N_{n-1} \times \frac{l_n^2\sqrt{3}}{4} = A_{n-1} + \alpha\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{3^3 a^2\sqrt{3}}{4^3}.$$

[0] [b1110531-oral01] 31 mai 2011 Site Web MegaMaths

Par suite :

$$\begin{aligned} A_n &= \alpha\left(\frac{4}{9}\right)^n + \alpha\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + ... + \alpha\left(\frac{4}{9}\right)^2 + A_1 \\ &= \alpha\left(\frac{4}{9}\right)^2 \left[\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-3} + ... + 1\right] + A_1. \end{aligned}$$

Comme :

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-3} + ... + 1 = \frac{1-(4/9)^{n-1}}{1-4/9} = \frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right),$$

on trouve, tous calculs faits :

$$A_n = \frac{3a^2\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

L'aire de la figure-limite sera :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{3a^2\sqrt{3}}{20} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{5} = \frac{8}{5}A_1,$$

soit les huit cinquièmes de l'aire du triangle équilatéral de départ, bien que le périmètre de la figure-limite soit infini, puisque $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.