Paradoxe probabiliste de Monty Hall

Monty Hall était un animateur de show télévisé aux USA dans les années 1960. Il proposait de gagner ce qui se trouvait derrière trois portes fermées. Une seule de ces portes cachait un lot intéressant pour le candidat, disons une voiture, alors que les deux portes s'ouvraient sur des lots insignifiants. Le but du jeu était de gagner la voiture.

Le candidat devait choisir une porte au hasard. Puis, pour ménager le suspense, l'animateur ouvrait une des deux portes non choisies par le candidat, sans dévoiler la voiture. Il proposait alors au candidat de conserver son choix ou d'en changer. Que valait–il mieux faire ?

A priori, la chance de gagner la voiture est de $1/3$ au début du jeu, et comme une des portes est dévoilée en cours de jeu, redéfinir ou non son choix en cours de jeu ne permet de toute façon que d'atteindre une probabilité de succès de $1/2$. II ne semble donc pas utile de redéfinir son choix puisque, si on décide de le faire, on conserve toujours la même probabilité $1/2$ de gagner.

Mais les choses ne sont pas si simples, car les dés sont pipés. En effet, le présentateur sait déjà derrière quelle porte se trouve la voiture, donc ouvrira une des deux portes non désignées par le candidat en utilisant cette connaissance. Cela change tout.

Pour le comprendre, utilisons des probabilités composées. Appelons :

- V_i l'événement "la voiture se trouve derrière la porte n°i",
- O_i l'événement "le présentateur ouvre la porte n°i".

Supposons que le candidat débute le jeu en choisissant la porte n°3. Il aura gagné si la voiture se trouve bien derrière la porte n°3, autrement dit si l'événement V_3 est réalisé. Mais en choisissant la porte n°3, il permet au présentateur d'ouvrir l'une des portes n°1 ou n°2.
Trois cas se produisent alors :

a) Si la voiture se trouve derrière la porte n°3, le présentateur ouvrira l'une des deux portes n°1 ou n°2 au hasard. Cela signifie que $\mathrm{p}_{V_3}(O_1) = \mathrm{p}_{V_3}(O_2) = 1/2$, le symbole $\mathrm{p}_B(A)$ désignant la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B a eu lieu (on dit que $\mathrm{p}_B(A)$ est la probabilité de A sachant B). Et bien sûr la probabilité de O_3 sachant V_3 est $\mathrm{p}_{V_3}(O_3) = 0$.

b) Si la voiture est derrière la porte n°2, le présentateur est obligé d'ouvrir la porte n°1 (puisqu'il ne peut pas dévoiler la voiture ni ne peut ouvrir la porte n°3 qui a été choisie par le candidat pendant la première phase du jeu). Donc $\mathrm{p}_{V_2}(O_1) = 1$ et $\mathrm{p}_{V_2}(O_2) = 0$. On a bien sûr toujours $\mathrm{p}_{V_2}(O_3) = 0$ puisque le présentateur ne peut pas ouvrir la porte n°3.

c) Si la voiture est derrière la porte n°1, le présentateur est obligé d'ouvrir la porte n°2 (pour les mêmes raisons qu'au cas précédent), donc $\mathrm{p}_{V_1}(O_1) = 0$; $\mathrm{p}_{V_1}(O_2) = 1$ et $\mathrm{p}_{V_1}(O_3) = 0$.

En utilisant les formules des probabilités composées :

$$\mathrm{p}_{O_1}(V_3) = \frac{\mathrm{p}(V_3 \cap O_1)}{\mathrm{p}(O_1)} = \frac{\mathrm{p}_{V_3}(O_1) \times \mathrm{p}(V_3)}{\mathrm{p}_{V_1}(O_1)\,\mathrm{p}(V_1) + \mathrm{p}_{V_2}(O_1)\,\mathrm{p}(V_2) + \mathrm{p}_{V_3}(O_1)\,\mathrm{p}(V_3)}.$$

Comme $\mathrm{p}(V_1) = \mathrm{p}(V_2) = \mathrm{p}(V_3) = 1/3$, et compte tenu des probabilités conditionnelles calculées plus haut, on obtient :

$$\mathrm{p}_{O_1}(V_3) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

[0] [b1110509] 9 mai 2011 Site Web MegaMaths
© 2011, Dany-Jack Mercier, copie autorisée uniquement pour votre usage personnel

On a aussi :

$$\mathrm{p}_{O_2}(V_3) = \frac{\mathrm{p}(V_3 \cap O_2)}{\mathrm{p}(O_2)} = \frac{\mathrm{p}_{V_3}(O_2) \times \mathrm{p}(V_3)}{\mathrm{p}_{V_1}(O_2)\,\mathrm{p}(V_1) + \mathrm{p}_{V_2}(O_2)\,\mathrm{p}(V_2) + \mathrm{p}_{V_3}(O_2)\,\mathrm{p}(V_3)}$$

donc :

$$\mathrm{p}_{O_2}(V_3) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

c'est-à-dire la même probabilité que précédemment, ce qui est normal vu la symétrie des rôles de O_1 et O_2. La probabilité que la voiture se trouve derrière la porte n°3 (comme le candidat l'a choisi au début du jeu) est donc de 1/3. Elle n'a pas évolué : c'est la même probabilité qu'au début du jeu.
Par contre :

$$\mathrm{p}_{O_1}(V_2) = \frac{\mathrm{p}(V_2 \cap O_1)}{\mathrm{p}(O_1)} = \frac{\mathrm{p}_{V_2}(O_1) \times \mathrm{p}(V_2)}{\mathrm{p}_{V_1}(O_1)\,\mathrm{p}(V_1) + \mathrm{p}_{V_2}(O_1)\,\mathrm{p}(V_2) + \mathrm{p}_{V_3}(O_1)\,\mathrm{p}(V_3)}$$

donc :

$$\mathrm{p}_{O_1}(V_2) = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

La probabilité que la voiture se trouve derrière la porte n°2 sachant que le présentateur à ouvert la porte n°1 est maintenant de 2/3. Comme $\mathrm{p}_{O_1}(V_3) = 1/3$ et $\mathrm{p}_{O_1}(V_2) = 2/3$, le candidat aura toujours intérêt à reconsidérer son choix en tenant compte de la porte qui a été ouverte par le présentateur (ici la porte n°1, mais le calcul serait le même si le présentateur avait ouvert la porte n°2, car on démontrerait encore que, dans ce cas, $\mathrm{p}_{O_2}(V_1) = 2/3$).

Conclusion — Le candidat aura *deux fois plus de chance de gagner* s'il modifie son choix après que le présentateur ait ouvert une des deux portes non choisies en premier lieu.

UNE AUTRE APPROCHE

Appelons A, B, C les trois portes et supposons que le candidat choisisse la porte C. La voiture est placée au hasard derrière l'une des trois portes A, B ou C. On désire calculer la probabilité pour que le candidat gagne la voiture en adoptant la stratégie suivante : changer systématiquement de choix de porte quand le présentateur lui en donne la possibilité.

De trois choses l'une :

- Si la voiture est derrière la porte A, le présentateur ouvre la porte B, et le candidat change son choix et le porte sur la porte A, donc il gagne. Je noterai R le résultat du tirage, et je dirai que $R = 1$ s'il s'agit d'une réussite, et $R = 0$ s'il s'agit d'un échec. Dans ce premier cas, on a donc $R = 1$.

- Si la voiture est derrière la porte B, le présentateur ouvre la porte A, et le candidat porte son choix sur la porte B, donc il gagne. Ici $R = 1$.

- Si la voiture est derrière la porte C, le présentateur ouvre indifféremment la porte A ou la porte B, et le candidat porte son choix sur la porte qui n'a pas été choisie par le présentateur. Faisant cela, il est sûr de perdre puisque son premier choix C était le bon. Dans ce cas, $R = 0$.

Finalement, on peut représenter ces choix successifs dans un tableau (voir FIG. 1) où l'on voit bien que le candidat gagne dans deux situations sur trois (et que ces situations sont équiprobables),

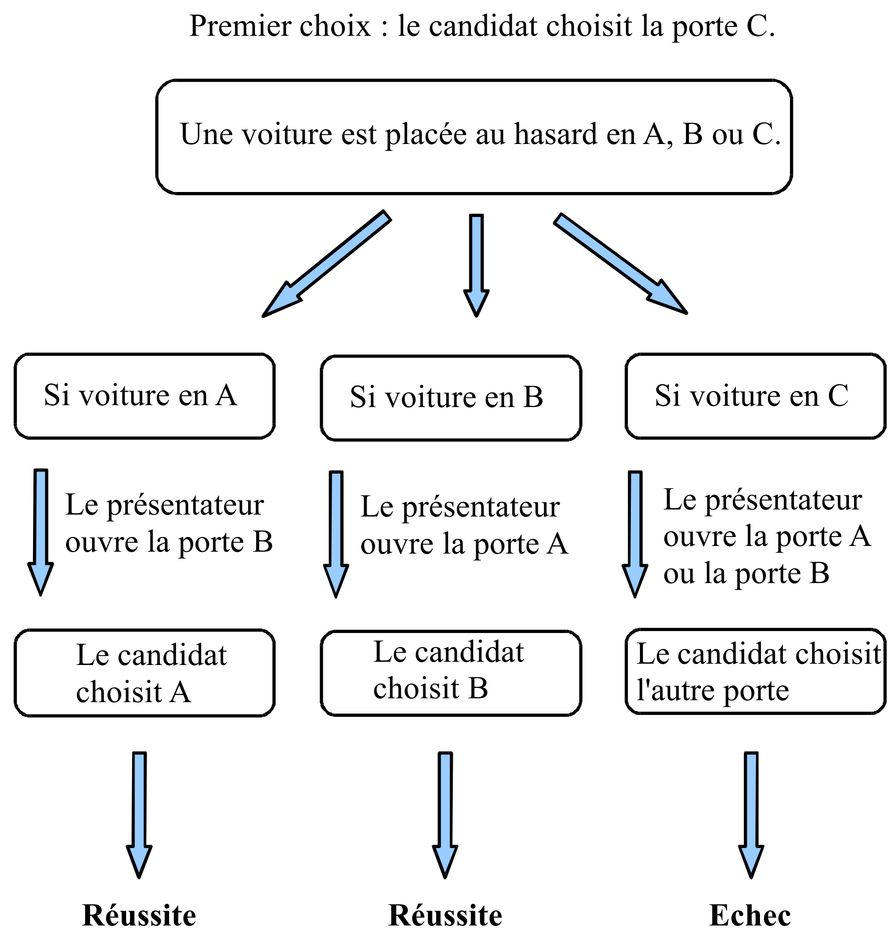

Figure 1: Le candidat gagne deux fois sur trois

et donc que sa probabilité de gagner est 2/3 (en décidant de changer systématiquement de choix de porte dès qu'on le lui demande).

Avec un tableur — Sur Excel, la commande =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) permet d'attribuer aléatoirement à une cellule donnée T un chiffre compris entre 1 et 3. Si T=1 (resp. 2, 3), on dira que la voiture a été placée derrière la porte A (resp. B, C) (T = tirage au sort de la place de la voiture).
Sur la même ligne et dans une autre cellule R, la commande =SI(T=3;0;1) permet d'attribuer la valeur 0 si T=3, et la valeur 1 si T=1 ou 2. Pour nous R=0 représente un échec et R=1, une réussite (R = résultat du jeu).
On recopie la ligne 1000 fois vers le bas, ce qui revient à effectuer 1000 tirages au sort, puis l'on calcule la fréquence d'appartition du résultat R=1 pour obtenir une approximation de la probabilité de gagner la voiture.
Comme attendu, on trouve une fréquence voisine de 2/3.

NB — Pour relancer les choix aléatoires des cellules T, il suffit d'appuyer sur la touche F9.