Le nombre e comme limite de la série de terme général 1/n!

On désire démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

• *Première méthode : accroissements finis* — Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Le Théorème des accroissements finis appliqué avec la fonction :

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x},$$

donne la majoration :

$$|f(1)-f(0)|\leq \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$$

soit :

$$\left|u_n e^{-1}-1\right|\leq \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right| \quad (*)$$

en posant $u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$. La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée :

$$f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\quad \left|f'(x)\right|\leq\frac{x^n}{n!}e^{-x}\leq\frac{1}{n!}.$$

L'inégalité $(*)$ donne alors :

$$\left|u_n e^{-1}-1\right|\leq\frac{1}{n!}.$$

Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité pour obtenir :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n e^{-1})=1$$

ce qui s'écrit aussi $\lim_{n\to+\infty}u_n=e$.

Remarque — Cette méthode se généralise très bien pour montrer que quel que soit $x\in\mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$. La propriété est triviale si $x=0$. Si x n'est pas nul, avec la même fonction f que précédemment, on obtient :

$$|f(x)-f(0)|\leq \operatorname*{Sup}_{t \text{ entre } 0 \text{ et } x}\left|f'(t)\right|$$

soit :

$$\left|u_n(x)\,e^{-x}-1\right|\leq \operatorname*{Sup}_{t \text{ entre } 0 \text{ et } x}\left|f'(t)\right| \quad (\flat)$$

[0] [b1110506] 12 mai 2011 Site Web MegaMaths

où $u_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$. Pour tout t situé entre 0 et x, on a :

$$\left|f'(t)\right| \leq \frac{|t|^n}{n!} e^{-t} \leq \frac{|x|^n}{n!} \operatorname{Sup}(1, e^{|x|})$$

de sorte que ($\flat$) donne :

$$\left|u_n(x) e^{-x} - 1\right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \operatorname{Sup}(1, e^{|x|}).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(|x|^n / n!) = 0$, on en déduit bien que $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = e^x$.

• *Deuxième méthode : formule de Taylor avec reste intégral* — Nous allons montrer le résultat plus général suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right).$$

La première idée qui vient à l'esprit est d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral (encore appelée formule de Taylor-Laplace) suivant laquelle, si $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^{n+1} sur $[a, x]$ (où $a < x$), alors :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt,$$

cette formule restant vraie lorsque $x < a$ si l'on prend alors soin de définir f sur l'intervalle $[x, a]$. Appliqué avec $a = 0$ et $f(x) = e^x$, la formule de Taylor devient :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n \quad \text{avec } R_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\, dt$$

et tout revient à montrer que $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$. De deux choses l'une :

- Si $x \geq 0$,

$$|R_n| \leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n\, dt \leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x x^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n!} e^x.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(x^{n+1}/n!) = 0$, on en déduit bien que $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

- Si $x < 0$,

$$|R_n| \leq \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} e^t\, dt \leq \frac{1}{n!} \int_x^0 |x|^n\, dt = \frac{|x|^{n+1}}{n!}$$

et $|x|^{n+1}/n!$ tend encore vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui permet encore de conclure.