Dérivées des fonctions sinus et cosinus par les aires

• Montrons que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Soit $x \in]0, \pi/2[$. Un repère orthonormal étant fixé, on trace un point M sur le cercle trigonométrique et dans le premier quart de plan (FIG. 1). Posons $M\,(\cos x, \sin x)$. L'aire du secteur angulaire saillant OMI est $x/2$.

En comparant les aires des triangles OIM et OTI, et celle du secteur angulaire saillant OMI, on obtient :

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad (*)$$

d'où : $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.

Il suffit de faire tendre x vers 0 par valeurs positives dans ces inégalités pour obtenir :

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

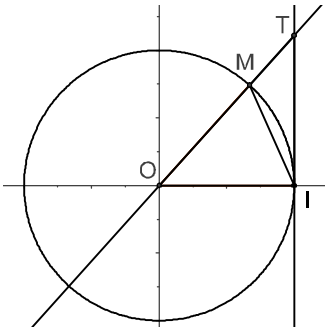

Figure 1: Prouver que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Comme

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{X\to 0_+} \frac{\sin(-X)}{-X} = \lim_{X\to 0_+} \frac{\sin X}{X} = 1,$$

on obtient bien que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

• Connaître la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0 permet de calculer les fonctions dérivées de $\cos x$ et $\sin x$. En effet :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2}{h} \sin\frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \cos x$$

et :

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2}{h} \sin\frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\sin x.$$

• On notera au passage que les limites de $\cos x$ et $\sin x$ quand x tend vers 0 se déduisent facilement de la majoration $\sin x \leq x$ obtenu dans $(*)$. Comme M est dans le premier quart de plan, $0 \leq \sin x$, donc $0 \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$, d'où $\lim_{x\to 0_+} \sin x = 0$. L'imparité de la fonction sinus permet d'obtenir la même limite quand $x \to 0_-$.

[0] [b1110505] 2 avril 2011 Site Web MegaMaths

© 2011, Dany-Jack Mercier, copie autorisée uniquement pour votre usage personnel