Chapitre II
Taux d'évolution - Indices

Objectif

Les taux d'évolution sont des notions dominantes de la vie économique, sociale et même de la vie quotidienne : *augmentation du nombre de chômeurs de 4%, taux bancaires, hausse de 1.2% du CAC 40, inflation annuelle de 2%…*

Source de nombreuses erreurs, la notion de taux, lorsqu'elle est abordée de manière méthodique peut s'avérer extrêmement simple.

Ce chapitre vous permettra d'éviter des erreurs fréquentes et de répondre à de telles questions :

- Si une action baisse de 10%, quelle hausse devra-t-elle subir le lendemain pour retrouver sa valeur initiale ?
- Vaut-il mieux bénéficier d'une réduction de 30 % ou de deux réductions successives de 10% et 20% ?
- Y a-t-il une différence entre une hausse de 5% suivie d'une baisse de 15% et une baisse de 15% suivie d'une hausse de 5% ?
- Quel taux d'évolution représente une inflation annuelle de 2% subie pendant 10 ans ?
- Un produit qui a augmenté de 20% en 5 ans a subi quelle évolution annuelle moyenne ?

I. Rappels de Première : Généralités

Vocabulaire : prendre t% d'une valeur, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple : Si une population comporte 5200 habitants, alors 20% de la population représente $5200\times\frac{20}{100}=1040$ habitants.

On rappelle qu'un pourcentage n'est qu'une nouvelle écriture d'un nombre.

Par exemple $25\%=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=0.25$ ...

Dans ce paragraphe, nous étudierons la manière dont **évoluent** certaines valeurs : prix, population, effectifs…
Nous supposerons **qu'un nombre évolue de** y_1 **vers** y_2 (ou $y_1 \to y_2$).

Définition.

On appelle **variation relative** ou **taux d'évolution** de y_1 à y_2 le nombre $t=\frac{y_2-y_1}{y_1}$.

Exemple : si une valeur P passe du simple au double alors son taux d'évolution est $t=\frac{2P-P}{P}=\frac{P}{P}=1=\frac{100}{100}=100\%$: elle a donc subi une hausse de 100%.

Il est évident que : Si $t<0$ *ou* $y_2<y_1$, on parle de **diminution** ou de **baisse**.
Si $t>0$ *ou* $y_2>y_1$, on parle **d'augmentation** ou de **hausse**.

Remarque : lorsqu'on effectue une hausse ou une baisse de 10% sur un prix P par exemple, l'expérience montre que la plupart des gens mettent en place la démarche suivante :

- On multiplie P par 10%
- On l'ajoute au prix initial P
- On obtient le prix final

Cette méthode est à bannir : elle n'est pas du tout adaptée à des calculs de taux successifs ou réciproques.
La méthode suivante, si vous faite l'effort de l'appliquer, s'avérera beaucoup plus sûre.

Propriété Importante. Soit t un taux d'évolution exprimée en pourcentage (hausse ou baisse).
Lorsque la valeur y_1 subit une évolution t, alors sa valeur finale est donnée par $y_2=(1+t)\,y_1$.
Le nombre *c=1+t* est appelé **coefficient multiplicateur**.

Explication : Par définition, le taux d'évolution de y_1 *à* y_2 *est le nombre* $t=\frac{y_2-y_1}{y_1}$. *Par conséquent,* $y_2-y_1=t\times y_1 \Leftrightarrow y_2=ty_1+y_1 \Leftrightarrow y_2=(1+t)\,y_1$.

Exemple :

Pour baisser une valeur de 10%, on la multiplie par $1-\frac{10}{100}=0.9$: *c'est normal, elle vaut 90% de sa valeur initiale puisqu'on en enlève 10% !*

Une hausse de 19,6% se traduit par une multiplication du prix initial par $1-\frac{19.6}{100}=1.196$: *c'est normal, elle vaut 119.6% de sa valeur initiale puisqu'on en ajoute 19.6%.*

Remarque : notons tout de suite que si pour aller de y_1 à y_2 on **multiplie** par c, alors pour revenir de y_2 à y_1 on **divise** par c.

BILAN

Soit t le taux d'évolution (exprimée en pourcentage) de y_1 vers y_2.

Le coefficient multiplicateur associée est c = 1+t.

On a le schéma suivant : $y_1 \underset{\div c}{\overset{\times c}{\rightleftarrows}} y_2$

Si vous retenez cette stratégie d'approche, ce chapitre deviendra extrêmement simple…

II. Rappels de Première : Applications

Application 1 : Si une action baisse de 10%, quelle hausse devra-t-elle subir le lendemain pour retrouver sa valeur initiale ?

Solution détaillée. Soit P_i le prix initial de l'action.

- Le taux d'évolution est ici −10% donc t = -0.1 : le coefficient multiplicateur est alors c = 1 + t = 1 – 0.1 = 0.9.
- On a le schéma $P_i \underset{\div 0.9}{\overset{\times 0.9}{\rightleftarrows}} P_f$ donc $P_i = \frac{1}{0.9} P_f \approx 1.11 P_f$: notons c' le coefficient multiplicateur pour aller de P_f vers P_i. On a $c' \approx 1.11$ donc le taux associé est $t' = c' - 1 \approx 0.11 = 11\%$.

L'action devra subir une hausse d'environ 11% pour revenir à son prix initial.

Plus généralement,

Propriété. Si le taux d'évolution de y_1 $à$ y_2 est t, alors :

1. le coefficient multiplicateur de y_2 à y_1 est $c' = \frac{1}{c}$, *donc, comme c' = 1 + t'*

2. le taux d'évolution *t'* de y_2 $à$ y_1 vérifie $1 + t' = \frac{1}{1+t}$.

t' est appelé **taux d'évolution réciproque**.

Application 2 : Un article subit une baisse de 10% puis une baisse de 20%.
Quel est son taux d'évolution global?

Solution détaillée. Soit P_i le prix initial de l'article.

- Le coefficient multiplicateur associé à la première baisse est $c_1 = 1 - 10\% = 0.9$, le second est $c_2 = 1 - 20\% = 0.8$
- On a le schéma $P_i \overbrace{\rightarrow}^{\times 0.9} P_2 \overbrace{\rightarrow}^{\times 0.8} P_f$ donc on a la relation $P_f = 0.9 \times 0.8 P_i = 0.72 P_i$: le coefficient multiplicateur est donc 0.72.
- Mais c = 1 + t donc t = c – 1 = 0.72 – 1 = -0.28.

L'article a donc subi une baisse globale de 28% : pour répondre à une des questions énoncées dans les premiers objectifs, cette situation est moins intéressante qu'une baisse globale de 30%.

Plus généralement,

Prop. Si le taux d'évolution de y_1 *à* y_2 est t_1, celui de y_2 à y_3 est t_2 alors :
1. le coefficient multiplicateur (global) pour passer de y_1 à y_3 est $c = c_1 \times c_2$ *donc, comme c = 1 + t*
2. le taux d'évolution global t de y_1 *à* y_3 vérifie $1+t = (1+t_1)(1+t_2)$.

On retiendra le schéma suivant : $\underbrace{P_i \overbrace{\rightarrow}^{\times(1+t_1)} P_2 \overbrace{\rightarrow}^{\times(1+t_2)} P_f}_{\times(1+t)}$.

Application 3 : Un article subit une inflation (hausse) annuelle de 2% pendant 10 ans.
Quel est son taux d'évolution globale t ?

Solution. Avec les notations usuelles, on a le schéma suivant :

$$\underbrace{P_i \overbrace{\rightarrow}^{\times(1+2\%)} P_2 \ldots \overbrace{\rightarrow}^{\times(1+2\%)} \ldots \overbrace{\rightarrow}^{\times(1+2\%)} P_{10}}_{\times(1+t)}$$

On a donc $1+t = (1+2\%)^{10} = 1.02^{10} \approx 1.22$ et par conséquent, $t \approx 1.22 - 1 = 0.22$: son évolution globale est donc de 22%.

Conclusion : on peut au passage remarquer que l'ordre des évolutions n'a aucune importance.

- Si une quantité subit une évolution t_1 puis une évolution t_2, le coefficient multiplicateur associé est $(1+t_1)(1+t_2)$.
- Si une quantité subit une évolution t_2 puis une évolution t_1, le coefficient multiplicateur associé est $(1+t_2)(1+t_1)$.

On a donc des coefficients multiplicateurs identiques donc des taux d'évolution identiques !

On généralise facilement la propriété précédente :

Propriété. Si une quantité subit n évolutions successives $t_1, t_2, \ldots, t_n$ alors
1. le coefficient multiplicateur (global) est $c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$ *donc, comme c = 1 + t*
2. le taux d'évolution global t vérifie $1+t = (1+t_1)(1+t_2) \times \ldots \times (1+t_n)$.

On retiendra le schéma suivant : $\underbrace{P_1 \overbrace{\rightarrow}^{\times(1+t_1)} P_2 \overbrace{\rightarrow}^{\times(1+t_2)} \ldots \overbrace{\rightarrow}^{\times(1+t_n)} P_n}_{\times(1+t)}$.

III. Taux d'évolution moyen ou équivalent

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous aurons besoin d'introduire une nouvelle notion mathématique.

Moyenne Géométrique

Propriété (admise). Soit a un nombre strictement positif, n un entier naturel non nul.
L'équation $x^n = a$ d'inconnu x admet une unique solution notée $x = a^{\frac{1}{n}}$ (a puissance $\frac{1}{n}$).

Remarque : c'est naturel ! D'après les résultats sur les puissances, $x^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$.

Par exemple, $x^3 = 5 \Leftrightarrow x = 5^{\frac{1}{3}}$. **A la calculette**, on utilisera la touche ^ ou x^y : vérifiez bien que vous trouvez $5^{\frac{1}{3}} \approx 1.71$ (attention aux parenthèses autour du 1/3).

Définition. Soient c_1, c_2,…, c_n *n* nombres réels strictement positifs.

On appelle moyenne géométrique de ces nombres, le réel $c = (c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n)^{\frac{1}{n}}$.

Taux moyens

Plus que les formules qui suivent, ce sont les méthodes et les exemples qu'il faudrait que vous compreniez…

Définition. Supposons que sur *n* années (ou mois, jours…) un produit subisse une évolution globale *t*.
Le taux d'évolution moyen t_M est le taux d'évolution qu'il devra subir pendant *n* années pour qu'au final, l'évolution soit de t%.
On a le schéma suivant :

$$\underbrace{P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n}_{\times(1+t)}$$ où t est connue et **on cherche** t_M tel que $$\underbrace{P_1 \overset{\times(1+t_M)}{\to} P_2 \overset{\times(1+t_M)}{\to} \ldots \overset{\times(1+t_M)}{\to} P_n}_{\times(1+t)}.$$

D'après les formules précédentes sur les taux successifs, on en déduit que
$(1+t_M)^n = 1+t \Leftrightarrow 1+t_M = (1+t)^{\frac{1}{n}}$, où t est le taux d'évolution globale à l'issu des n évolutions.

Propriété. Avec les notations précédentes, le taux d'évolution moyen t_M est donné par
$1+t_M = (1+t)^{\frac{1}{n}}$ où t est le taux d'évolution globale à l'issu des n évolutions.

Application 1. Un produit qui a augmenté de 20% en 5 ans a subi qu'elle évolution annuelle moyenne ?

> Solution : notons t_M le taux d'évolution moyen annuel. Par hypothèse, t = 20% et 1 + t = 1.2.
>
> Nous avons $\underbrace{P_1 \overset{\times(1+t_M)}{\to} P_2 \overset{\times(1+t_M)}{\to} \ldots \overset{\times(1+t_M)}{\to} P_f}_{\times 1.2}$ donc $(1+t_M)^5 = 1.2$ d'où $1+t_M = 1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.037$.
>
> Finalement, t_M = 1.037 – 1 = 0.037.
>
> *En conclusion, si en 5 ans un produit a augmenté de 20%, en moyenne, il a augmenté de 3.7% par an.*

Application 2. Un produit a augmenté de 35% la première année, puis baissé de 10% l'année suivante. Déterminer le taux d'évolution mensuel moyen.

Solution :
- Calculons d'abord le taux d'évolution globale t : nous avons $t_1 = 1+35\% = 1.35$ et $t_2 = 1-10\% = 0.9$.

Ainsi, $\underbrace{P_i \overset{\times 1.35}{\rightarrow} P_2 \overset{\times 0.9}{\rightarrow} P_f}_{\times(1+t)}$ donc $1+t = 1.35\times 0.9 \Leftrightarrow t = 0.215 = 21.5\%$: le taux d'évolution globale en deux ans est de +21.5%.
- Soit t_M le taux d'évolution mensuel : en deux ans, il y a 24 mois.

En reprenant le schéma classique, on a $\underbrace{P_1 \overset{\times(1+t_M)}{\rightarrow} P_2 \overset{\times(1+t_M)}{\rightarrow} \ldots \overset{\times(1+t_M)}{\rightarrow} P_f}_{\times 1.215}$ donc

$(1+t_M)^{24} = 1.215 \Leftrightarrow t_M = 1.215^{\frac{1}{24}} - 1 \approx 0.81\%$: la hausse moyenne mensuelle est d'environ 0.81%.

IV. Approximations des petits taux

Cette partie sera traitée lors du chapitre sur la dérivation. Et oui, il y a un lien…

V. Indice en base 100

Un chapitre extrêmement simple et pour lequel je vous déconseille encore d'apprendre quelque formule que ce soit !

L'objectif est le suivant : voici un tableau présentant la production d'engrais en tonnes d'une entreprise :

2002	2003	2004	2005	2006
4230	4780	3974	4992	5110

On aimerait, en un coups d'œil, pouvoir décrire l'évolution de l'entreprise depuis sa création (2002)

On voudrait aussi comparer rapidement cette évolution à celle de l'entreprise concurrente suivante :

2002	2003	2004	2005	2006
3200	3780	3250	4000	4230

Le principe des calculs avec indice et le suivant :
- On choisit 2002 comme **année de référence**, et on lui attribue **un indice 100**.
- A l'aide de **produit en croix**, et à partir de cette année de référence, on calcule les indices suivant.

C'est comme si on considérait que l'entreprise produisait 100 unités et qu'on se demandait quelle productions elle aurait les années suivantes (en conservant son évolution).

Par exemple, pour l'entreprise 1 :
On voit donc que **par rapport à l'année 2002** :
> L'entreprise a produit +13% (113-100) en 2003
> L'entreprise a produit -6.05% en 2004
> …
> L'entreprise a produit +20.8% en 2006

2002	2003	2004	2005	2006
4230	4780	3974	4992	5110
100	$100\times\frac{4780}{4230}\approx 113$	93.95	118	120.8

Attention. La lecture immédiate ne se fait qu'**à partir de l'année de référence (indice 100)**.

Par exemple, si l'on veut déterminer le taux d'évolution de la production de l'entreprise entre 2003 et 2005, on applique la formule classique : $t = \dfrac{118-113}{113} \approx 4.42\%$.

Un autre intérêt des indices est de pouvoir comparer les évolutions de différentes entreprises sans en connaître les productions.

On aurait pu par exemple vous fournir les deux tableaux suivants :

	2002	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
Ent. 1	**100**	113	93.95	118	120.8
Ent. 2	**100**	118.1	101.6	125	132.2

Pour des exercices ou des sujets de Bac sur ce chapitre, visitez sur le site les pages ds de stg, exercices de bac ou sujet de Bac.