Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S – Enseignement obligatoire

Suites numériques

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 29 avril 2008

Tableau récapitulatif des exercices

⋆ indique que cette notion a été abordée dans l'exercice

N°	Lieu	Année	ROC	QCM VF	Suites récurrentes	Suites arithmétiques	Suites géo-métriques	Suites ad-jacentes	Point fixe	Fonc-tions
1	Nouvelle-Calédonie	Mars 2008			⋆	⋆				
2	Amérique du Sud	Nov 2007								⋆
3	Nouvelle-Calédonie	Nov 2007	⋆							⋆
4	Antilles-Guyane	Sept 2007		⋆						
5	La Réunion	Sept 2007			⋆			⋆	⋆	
6	France	Juin 2007			⋆				⋆	⋆
7	La Réunion	Juin 2007			⋆				⋆	⋆
8	Nouvelle-Calédonie	Mars 2007								⋆
9	Nouvelle-Calédonie	Nov 2006			⋆				⋆	⋆
10	Antilles-Guyane	Juin 2006			⋆		⋆	⋆		
11	La Réunion	Juin 2006			⋆				⋆	⋆
12	Amérique du Nord	Mai 2006			⋆	⋆				⋆
13	Antilles-Guyane	Sept 2005				⋆	⋆			
14	Amérique du Nord	Juin 2005			⋆			⋆	⋆	⋆
15	France	Juin 2005	⋆					⋆		
16	La Réunion	Juin 2005		⋆	⋆	⋆	⋆	⋆		
17	Inde	Avril 2005								⋆
18	Nouvelle-Calédonie	Mars 2005			⋆		⋆	⋆		
19	Amérique du Sud	Nov 2004			⋆				⋆	⋆
20	Nouvelle-Calédonie	Nov 2004			⋆		⋆	⋆		
21	Antilles-Guyane	Juin 2004			⋆		⋆	⋆		
22	France	Juin 2004			⋆					
23	La Réunion	Juin 2004						⋆		⋆
24	Liban	Juin 2004								
25	Inde	Avril 2004			⋆					
26	Centres étrangers	Juin 2003					⋆			
27	Inde	Avril 2003			⋆					⋆
28	Centres étrangers	Juin 2002			⋆		⋆	⋆		
29	Amérique du Sud	Nov 2001			⋆				⋆	

Exercice 1 Nouvelle – Calédonie, Mars 2008 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,6[$ par :

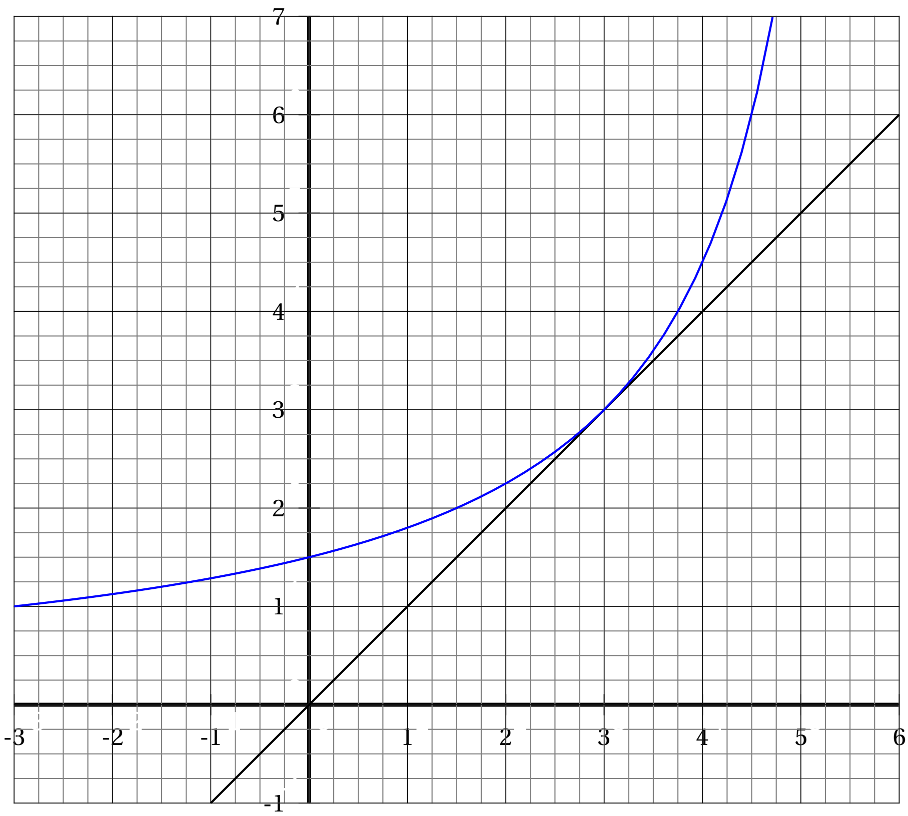
$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 &= -3 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée annexe et est accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur ce document, les points $M_0(u_0\,;\,0)$, $M_1(u_1\,;\,0)$, $M_2(u_2\,;\,0)$, $M_3(u_3\,;\,0)$ et $M_4(u_4\,;\,0)$.
   Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?
2. a. Démontrer que si $x < 3$, alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.
   En déduire que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ pour tout entier naturel n.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Annexe



Exercice 2 Amérique du Sud, Novembre 2007 (6 points)

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_1(x) = 2x - 2 + \ln\left(x^2+1\right)$.
   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Déterminer la dérivée de f_1.
   c. Dresser le tableau de variations de f_1.
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :
$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$$
   a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0\,;\,+\infty[$
   d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.
4. Étude de la suite (α_n)
   a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
   b. En déduire qu'elle est convergente.
   c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Exercice 3 Nouvelle – Calédonie, Novembre 2007 (6 points)

Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a\,;\,+\infty[$. Compléter la phrase suivante :
   « On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si … »
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a\,;\,+\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$
et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. On a représenté en annexe la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse $1,5$. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad e^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

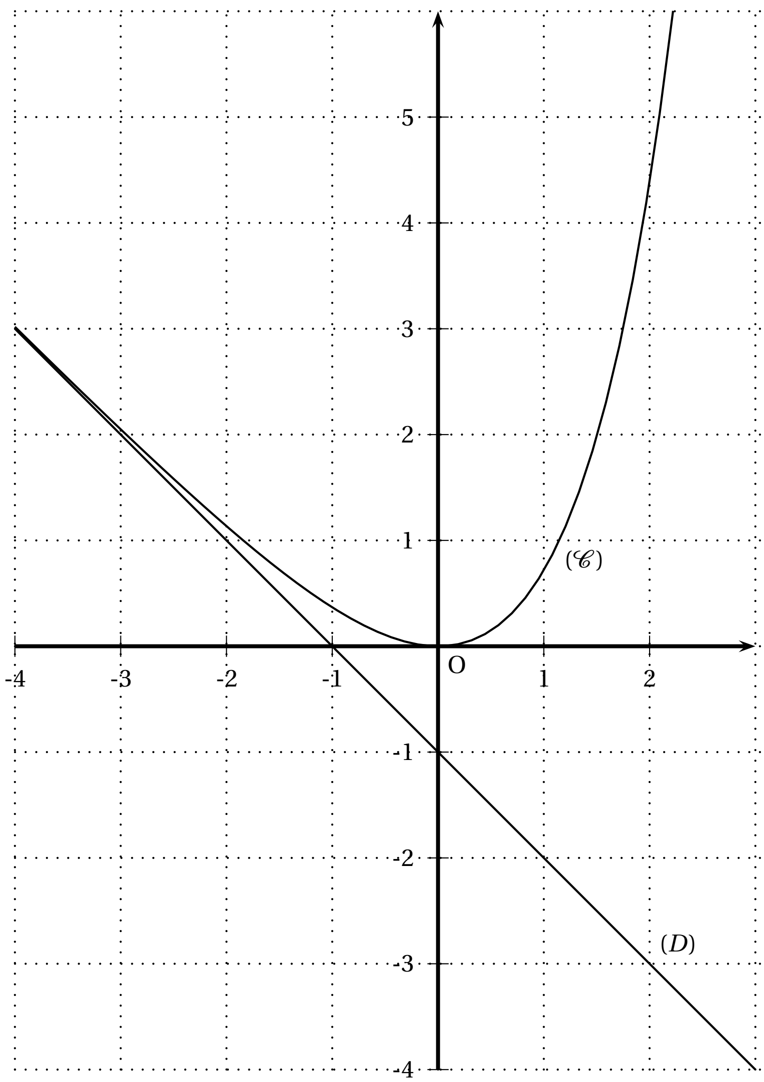
$$e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

Annexe



Exercice 4 Antilles – Guyane, Septembre 2007 (4 points)

Soit $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite.
On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions, donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.
Une bonne réponse donne 0,75 *point, une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point et l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Tout total négatif est ramené à zéro.

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Si $v_0 = \ln a$ alors :
   a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ b. $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ c. $u_0 = -a+1$ d. $u_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$
2. Si v est strictement croissante, alors :
   a. u est strictement décroissante et majorée par 2
   b. u est strictement croissante et minorée par 1
   c. u est strictement croissante et majorée par 2
   d. u est strictement décroissante et minorée par 1
3. Si v diverge vers $+\infty$, alors :
   a. u converge vers 2
   b. u diverge vers $+\infty$
   c. u converge vers 1
   d. u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$
4. Si v est majorée par 2, alors :
   a. u est majorée par $1+\mathrm{e}^{-2}$
   b. u est minorée par $1+\mathrm{e}^{-2}$
   c. u est majorée par $1+\mathrm{e}^{2}$
   d. u est minorée par $1+\mathrm{e}^{2}$

Partie B (1 point)

Démontrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $\ln(u_n) + v_n > 0$.

Exercice 5 La Réunion, Septembre 2007 (6 points)

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.
   a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan en annexe, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\,;\,0)$. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.
   b. Démontrer que si la suite u est convergente, alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

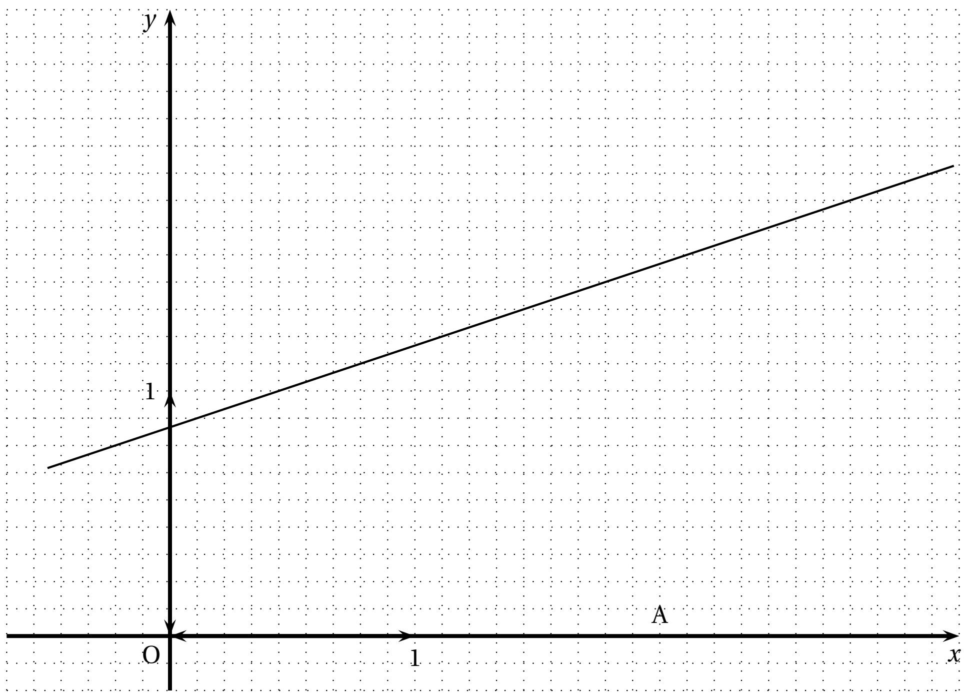
2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right),\ \text{c'est-à-dire que : } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}277\ 7\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.
En utilisant le **a**, démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au **1** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

Annexe



Exercice 6 France, Juin 2007 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document en annexe que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A – Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B – Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction *f*

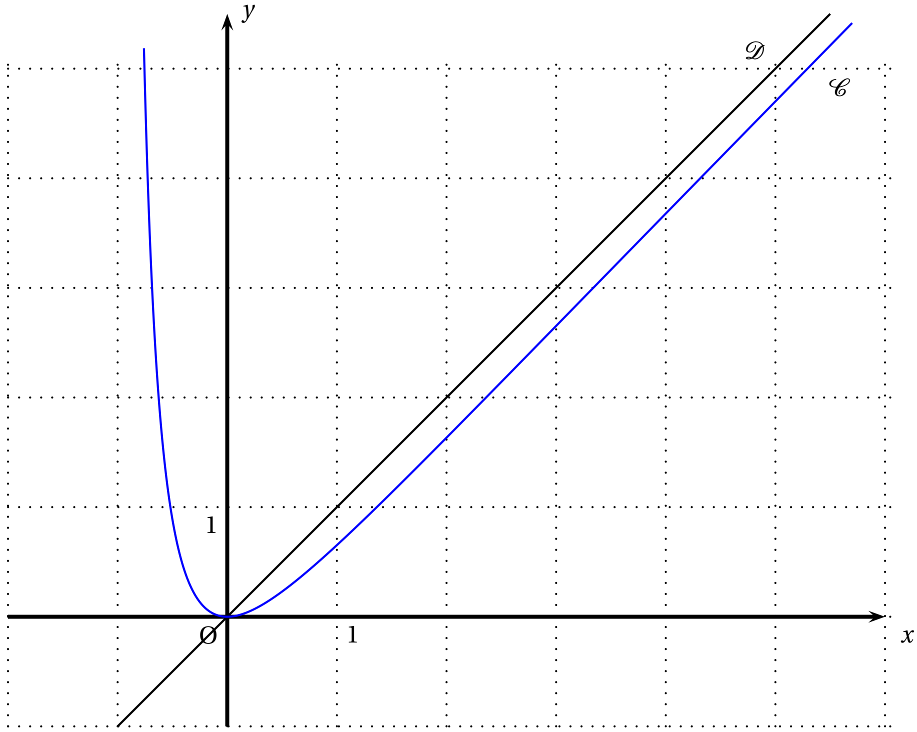
1. Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   a. Sur le graphique en annexe, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0 , u_1, u_2 et u_3.
   b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.
   c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.
   e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.

Annexe

À compléter et à rendre avec la copie



Exercice 7 La Réunion, Juin 2007 (4 points)

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.
On considère la suite u définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1. Étudier la monotonie de la suite u.

2. a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$.
   Étudier le sens de variations de la fonction h.
   En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $-1 < u_n < 0$.
3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

Exercice 8 Nouvelle – Calédonie, Mars 2007 (7 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}.$$
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. a. Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}.$$
   b. Vérifier que :
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n).$$
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :
$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}.$$
2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n.$$

b. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

c. En déduire l'égalité :

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}.$$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n).$$

e. Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 9 Nouvelle – Calédonie, Novembre 2006 (5 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ (on prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O;\vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation :

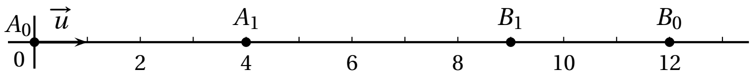
$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

En déduire sa valeur.

Exercice 10 Antilles – Guyane, Juin 2006 (5 points)

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $\left(O ; \overrightarrow{u}\right)$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.



Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n ; 2)$ et $(B_n ; 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n ; 1)$ et $(B_n ; 3)$.

1. Sur le graphique, placer les points A_2, B_2.
2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}.$$

On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = b_n - a_n.$$

   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.
   b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).
   b. Étudier les variations de la suite (b_n).
3. Que peut-on déduire des résultats précédents quant à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = 3a_n + 4b_n.$$

Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

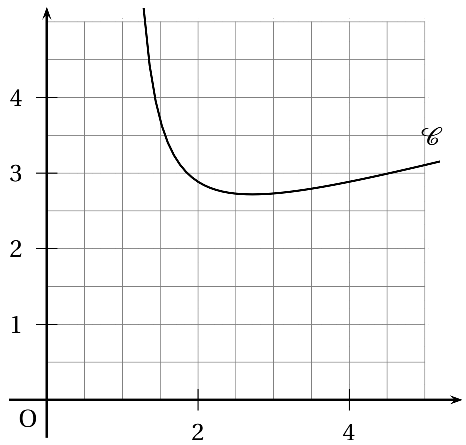
Exercice 11 La Réunion, Juin 2006 (4 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

1. a. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   a. On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).



   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \mathrm{e}$ (on pourra utiliser la question 1. b).
   c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $\left(f(u_n)\right)$, démontrer que $f(\ell) = \ell$.
2. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 12 Amérique du Nord, Mai 2006 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} (1) & \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\,;\,+\infty[,\ f'(x) = 4 - \left[f(x)\right]^2 \\ (2) & f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A – Étude d'une suite

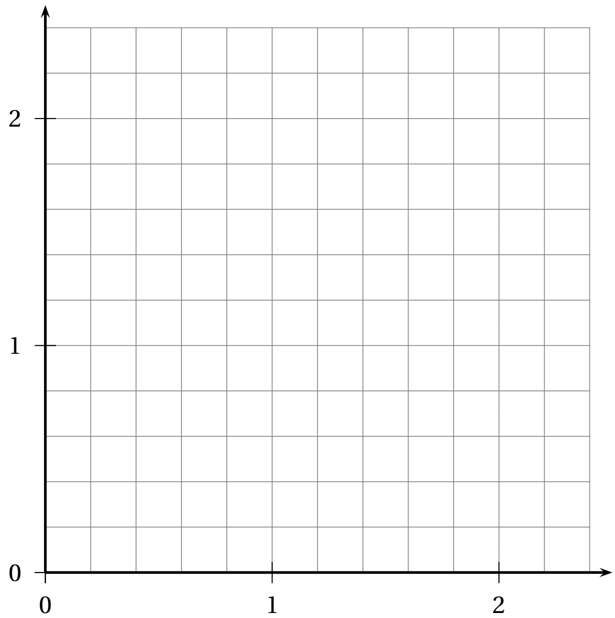
Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

1. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

   b. Placer, sur le graphique ci-dessous, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.



   c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0 ; 2]$ alors $p(x) \in [0 ; 2]$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.
   c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n).
   d. La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B – Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2\dfrac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).
2. a. Montrer que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
   b. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.
3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $\mathscr{C}_g$ à l'origine.
4. Tracer, dans le repère précédent, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie **B**.

Exercice 13 Antilles – Guyane, Septembre 2005 (5 points)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

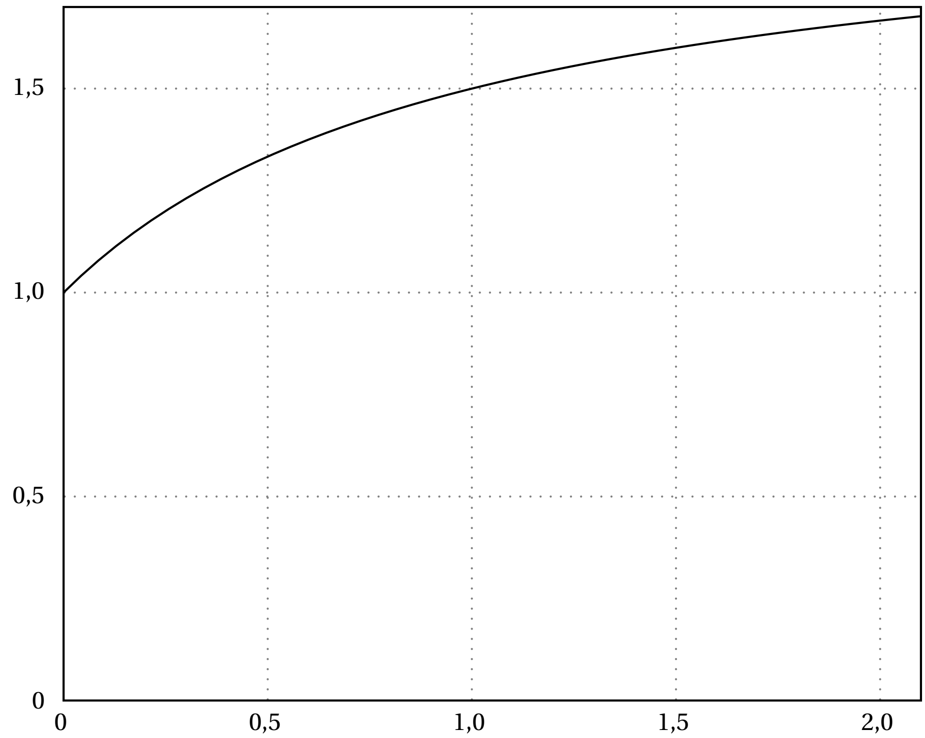
1. a. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant n-2$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
   c. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
   d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice 14 Amérique du Nord, Juin 2005 (6 points)

Le graphique fourni en fin d'énoncé sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1\,;2]$ alors $f(x) \in [1\,;2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   a. Le graphique donné ci-dessous représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?
   b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.
   d. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
   e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
   Déterminer la valeur exacte de α.



Exercice 15 France, Juin 2005 (4 points)

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A – Question de cours

On suppose connus les résultats suivants :
(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;
(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = -\frac{2}{u_n}.$$

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice 16 La Réunion, Juin 2005 (4 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 *point, chaque réponse fausse enlève* 0,25 *point. Donner trois propositions ou plus à une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.*
Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :
   a. $\left(\dfrac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$.
   b. $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c. $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$.
   d. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$.
2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 1$.
   Alors :
   a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$.
   b. La suite (v_n) est minorée.
   c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.
   d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 & = 1,5 \\ u_{n+1} & = 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$
   a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.
   b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.
   c. La suite (v_n) est majorée.
   d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.
4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :
   $$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}. \text{ Alors :}$$
   a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.
   b. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.
   c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.
   d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

Exercice 17 Inde, Avril 2005

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0,95 u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}.$$

   a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
   c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.
   d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
   b. Que peut-on en déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}.$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18 Nouvelle-Calédonie, Mars 2005

Partie A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

$$A_1 \text{ milieu du segment } [A_0B_0] \quad \text{et} \quad B_1 \text{ barycentre de } \{(A_0\,;1)\,,(B_0\,;2)\}.$$

1. Placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.
   Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n lorsque n devient très grand ?
2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\,;\vec{\imath}\right)$ avec $\vec{\imath} = \dfrac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 12$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.
   Montrer qu'elle est constante.

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les parties **A** et **B**, préciser la limite des points A_n et B_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 19 Amérique du Sud, Novembre 2004

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   c. Construire Γ dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
2. a. Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
   b. Dans le cas où $m = \dfrac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

   $$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   où α est le réel défini à la question **A.2.b**.

   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.
   a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.

b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n \mathrm{e}^{-v_n}$.
Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $u_n = v_n$?
Si oui, préciser laquelle.

Exercice 20 Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

   a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

   b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 21 Antilles-Guyane, Juin 2004

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$.

Soit $\mathcal{D}$ une droite munie d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Exprimer u_n en fonction de n.
3. Comparer a_n et b_n. Étudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interpréter géométriquement ces résultats.
4. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.

6. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 22 France, Juin 2004

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 23 La Réunion, Juin 2004

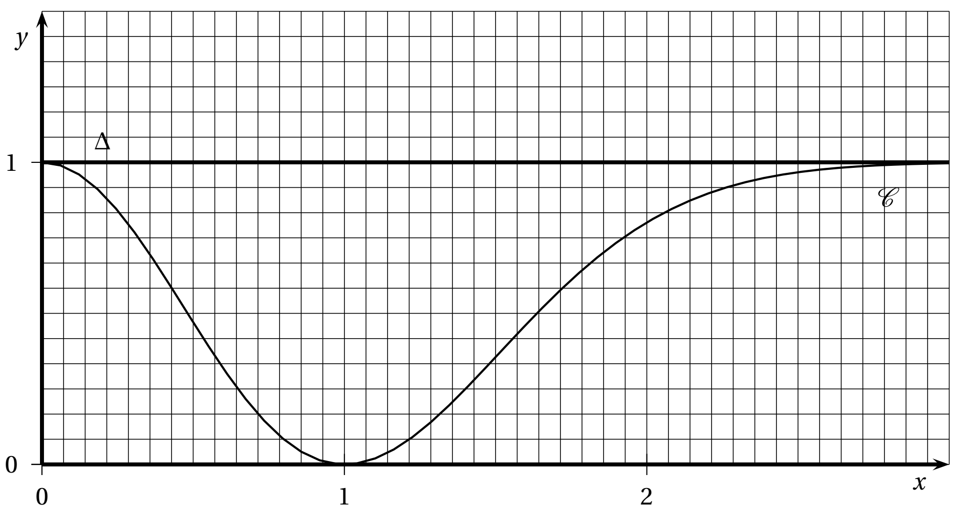
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}.$$

Son tableau de variation est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	0	↗ 1

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et son asymptote Δ, d'équation $y = 1$, sont tracées ci-dessous.



Partie A – Lecture graphique

1. k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.
2. n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

Partie B – Définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n, respectivement comprises dans les intervalles $[0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.
2. Sur le graphique, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et v_n, pour n appartenant à l'ensemble $\{2\,;3\,;4\}$.
3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   Procéder de même pour la suite (v_n). En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 24 Liban, Juin 2004

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.
   a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k :
   $$\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}.$$
   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k :
   $$\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$
   c. Montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$
2. a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
   $$\frac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1.$$
   (on pourra écrire $\dfrac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).
   b. En déduire que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

Exercice 25 Inde, Avril 2004

1. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Exprimer S_n en fonction de n.
Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26 Centres étrangers, Juin 2003

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \dfrac{1}{2}$.

c. Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$.

d. En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$.

On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \ldots + u_n$.

2. On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est convergente.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$:

$$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$:

$$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n \leqslant 4u_5$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

Exercice 27 Inde, Avril 2003

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.
   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0\,;2]$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{P}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto x(2-x)$.
   c. Utiliser $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2 et u_3.
2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;1[$.
   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c. Que peut-on en déduire ?
3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = 1 - u_n.$$
   a. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

Exercice 28 Centres étrangers, Juin 2002

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}.$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
   b. Déterminer la limite de la suite w.
2. a. Montrer que la suite u est croissante.
   b. Montrer que la suite v est décroissante.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
3. Montrer que les suites u et v convergent et ont la même limite que l'on appellera ℓ.
4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   a. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.
   b. Déterminer alors la valeur de ℓ.

Exercice 29 Amérique du Sud, Novembre 2001

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{array}\right. .$$

1. a. Montrer que (u_n) est majorée par 4.
   b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
   c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

   b. Retrouver le résultat du **1.c**.
   c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = n^2\,(4 - u_n).$$