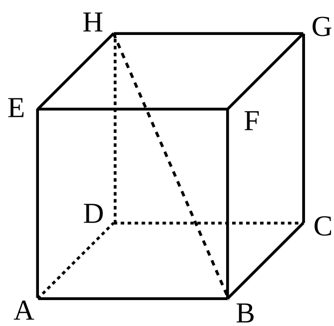
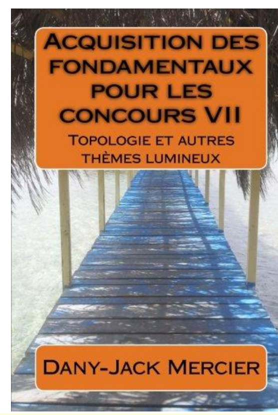
Question 108 *(Ecrit du CAPES 2014) a) Soit ABC un triangle non aplati. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et l'on note I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. D'après le théorème de la médiane, on sait que :*

$$c^2 + b^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2}.$$

En déduire que les médianes issues de B et C sont perpendiculaires si et seulement si $c^2 + b^2 = 5a^2$.

b) On considère le cube $ABCDEFGH$ dessiné plus bas. En utilisant le résultat de la question précédente, expliquer comment, sur la figure ci-dessous, on peut construire uniquement à l'aide de la règle le point A' projeté orthogonal du point A sur la droite (BH).





Question 109 *Démontrer qu'un triangle est isocèle si, et seulement si, il possède deux médianes de même longueur.*

3.4 Configurations planes

Question 110 *En restant au niveau du collège, démontrer que le cercle de diamètre $[AB]$ est égal à l'ensemble des points M tels que le triangle ABM est rectangle en M.*

Question 111 *Soient A et B deux points distincts dans le plan. Connaissez-vous les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto MA + MB$? A quelle condition l'ensemble des points M tels que $MA + MB = k$ est-il vide ?*

Question 112 *Soient A et B deux points distincts dans le plan. Connaissez-vous les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto |MA - MB|$? A quelle condition l'ensemble des points M tels que $|MA - MB|$ est-il vide ?*

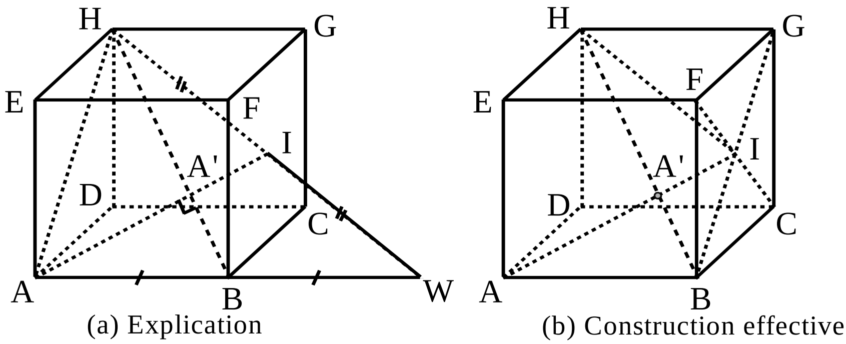


FIG. 7.8 – Construction de A'

milieux I et W de $[HW]$ et $[AW]$, montre que (BI) est parallèle à (AH), et que $BI = AH/2$.

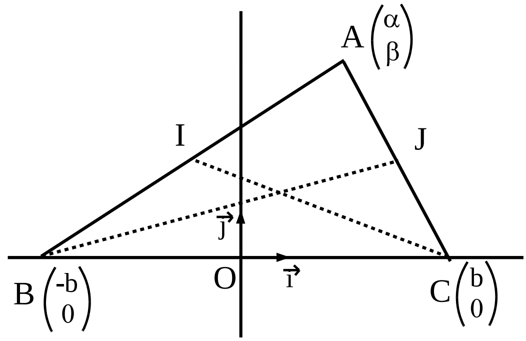
Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme, donc (BG) est aussi parallèle à (AH). Les droites (BI) et (BG) sont donc parallèles et passent par le même point B, donc sont confondues. Les points B, I, G sont donc alignés, et comme $BI = AH/2 = BG/2$, on peut affirmer que I est le milieu de $[BG]$, c'est-à-dire l'intersection des diagonales du carré $BCGF$.

Réponse 109 Si l'exercice est posé à l'oral, il est important d'avoir rapidement une idée pour débuter un raisonnement. On s'aperçoit vite qu'il est facile de démontrer qu'un triangle isocèle possède deux médianes de même longueur en utilisant les propriétés des symétries axiales. Nous laisserons au lecteur le soin d'expliciter cette solution.

La réciproque n'étant pas facile à imaginer géométriquement, il ne faudra pas hésiter à utiliser un repère et des coordonnées. Dans ce cas, il faut bien noter qu'on est libre de choisir le repère le plus adapté à la situation, celui qui simplifiera les calculs autant qu'il est possible. Comme ici on s'intéresse à des longueurs, il faudra choisir un repère orthonormal « adapté ».

La réciproque peut aussi se démontrer en utilisant une formule de la moyenne qui exprime la longueur d'une médiane en fonction des côtés du triangle. Voici ces deux solutions présentées en ménageant des équivalences :

Première solution (utilisation d'un repère) — Soit ABC un triangle quelconque. Choisissons un repère orthonormal d'origine le milieu O de $[BC]$ et de premier axe (BC), comme sur la figure suivante :



Posons :

$$A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix};\quad B\begin{pmatrix}-b\\ 0\end{pmatrix};\quad C\begin{pmatrix}b\\ 0\end{pmatrix}$$

de sorte que les coordonnées des milieux I et J de $[AB]$ et $[AC]$ soient :

$$I\begin{pmatrix}(\alpha-b)/2\\ \beta/2\end{pmatrix};\quad J\begin{pmatrix}(\alpha+b)/2\\ \beta/2\end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\begin{cases} BJ^2 = \left(\dfrac{\alpha+b}{2}+b\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\alpha+3b}{2}\right)^2 + \dfrac{\beta^2}{4} \\ CI^2 = \left(b-\dfrac{\alpha-b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3b-\alpha}{2}\right)^2 + \dfrac{\beta^2}{4}. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} BJ = CI \quad &\Leftrightarrow \quad BJ^2 = CI^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha+3b)^2 = (3b-\alpha)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \qquad (\text{car } b \neq 0 \text{ puisque } B \neq C) \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ appartient à la médiatrice de } [BC] \\ &\Leftrightarrow \quad ABC \text{ isocèle en } A. \end{aligned}$$

Seconde solution (formule de la médiane) — Si MAB est un triangle et si I est le milieu de $[AB]$, alors :

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

donc :

$$MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Ici, avec les notations de la FIG. **??**, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} BJ^2 = CI^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 2(AB^2 + BC^2) - AC^2 = 2(AC^2 + BC^2) - AB^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 3AB^2 = 3AC^2 \\ &\Leftrightarrow \quad AB = AC \\ &\Leftrightarrow \quad ABC \text{ isocèle en } A. \end{aligned}$$

7.4 Configurations planes

Réponse 110 Cet énoncé est démontré en quatrième en utilisant les propriétés du rectangle et ses caractérisations usuelles. On sait en particulier que :

- un quadrilatère dont les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu est un rectangle,

- un quadrilatère qui possède trois angles droits est un rectangle.

($\Leftarrow$) Si MAB est un triangle rectangle en M, notons I le milieu de $[AB]$. La perpendiculaire à (MA) passant par A coupe la perpendiculaire à (MB) passant par B en W. Le quadrilatère $MAWB$ possède trois angles droits, c'est donc un rectangle, et ses diagonales se coupent en leur milieu, donc $IM = IA = IB$.

($\Rightarrow$) Supposons que M appartienne au cercle de diamètre $[AB]$. Notons I le milieu de $[AB]$. La droite (MI) recoupe le cercle en W, et le quadrilatère $MAWB$ possède deux diagonales égales qui se coupent en leur milieu. C'est donc un rectangle et l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

Réponse 111 L'ensemble $\mathcal{E}_{2a}$ des points M tels que $MA + MB = 2a$ est l'ellipse de foyers A et B et d'excentricité $e = c/a$, si l'on pose $c = AB/2$ et si l'on suppose que $c < a$. On a $\mathcal{E}_{2a} = [AB]$ si $c = a$.
L'ensemble $\mathcal{E}_{2a}$ est vide si $c > a$, ce qui est normal puisque s'il existe un point M tel que $MA + MB = 2a$, alors le triangle ABM est constructible donc $AB \leq MA + MB$, c'est-à-dire $2c \leq 2a$ ([1]).

Réponse 112 L'ensemble $\mathcal{E}_{2a}$ des points M tels que $|MA - MB| = 2a$ est l'hyperbole de foyers A et B et d'excentricité $e = c/a$, si l'on pose $c = AB/2$

[1] Pour travailler cette question à fond, voir [4] ou [5], ou encore la Question 263 de [9].