Document proposé à titre personnel

par Dany-Jack Mercier

dany-jack.mercier@hotmail.fr

MégaMaths

http ://megamaths.perso.neuf.fr/

Problèmes de lieux géométriques

Oral 1 du CAPES externe

Dany-Jack Mercier

Table des matières

Introduction

AU SUJET DE CE FASCICULE

Voici une proposition de leçon d'oral 1 du CAPES pour la session 2011. Il s'agit de la leçon n°39 (de la liste 2011) intitulée "problème de lieux géométriques".

Le plan proposé ici comporte une introduction et des exemples de recherche de lieux de points. Il permet d'utiliser Geogebra dans au moins une activité pour montrer que l'on sait utiliser des TICE à bon escient.

On trouvera ensuite un développement, constitué des réponses aux problèmes de recherche des lieux proposés dans le plan, suivies de questions du jury qui permettent de tester ses connaissances au sujet de lieux de points très classiques. Autant de questions auxquelles il vaut mieux savoir répondre.

Ce travail sur la leçon n°39 s'achève avec des compléments qui permettent de s'entraîner sur plusieurs recherches de lieux géométriques, certains pouvant être utilisés pour construire son propre plan, si on le désire et si l'on s'en rappelle le jour du concours.

Attention : ce fascicule, considéré comme une aide trop spécifique à la préparation d'une leçon d'oral 1, n'est pas un document autorisé pendant la préparation de l'oral du CAPES externe, le jour du concours. Le but de ce travail est de proposer un exemple de ce que l'on peut présenter à l'oral et de fournir une aide pour approfondir ce thème en orientant sa réflexion.

Initialement, ce travail était destiné à mes étudiants. Je compte, à terme, l'utiliser pour construire un recueil de leçons qui pourrait voir le jour en 2012, et cette mise en ligne en juin 2011 permettra à tous ceux qui préparent la session 2011 d'avoir dès maintenant accès à ce document.

---

[0] oral1lieux v1.00

LES EPREUVES ORALES AU CAPES

Depuis la session 2011, la première épreuve orale du CAPES externe consiste en une préparation de deux heures trente où le candidat dispose d'un ordinateur, et d'un oral d'une heure divisée en trois parties distinctes :

- *un plan* où le candidat expose ses idées sur le sujet qu'il a tiré au sort. En quinze minutes, il s'agit de montrer ses connaissances tout en évitant le hors sujet.

- *un développement* d'une durée de quinze minutes, sur des parties du plan qui auront été choisies par le jury. Il s'agit de montrer que l'on est capable de traiter plus précisément une partie du plan, de donner une démonstration d'un théorème que l'on aurait cité, bref que l'on sait de quoi l'on a parlé dans la première partie de l'épreuve.

- *un entretien* de trente minutes avec le jury. Celui-ci pourra poser des questions au sujet de l'exposé et du thème abordé. Les premières questions sont, en général, des demandes de précision concernant le plan ou le développement, ou des remarques sur des erreurs que l'on a commises et que l'on demande de corriger. Les questions sont généralement enchaînées pour permettre de savoir jusqu'où vont les connaissances du candidat. C'est le moment où l'on peut dévoiler des lacunes qui peuvent être pénalisantes. Viennent ensuite d'autres questions plus générales et plus variées : des demandes d'explications sur certains points que le candidat a oublié ou évité d'exposer, des exercices proposés avec quelques indications pour voir comment le candidat réagit au tableau, des questions sur les programmes scolaires, sur les méthodes à employer dans les petites classes, etc. Enfin, si tout va bien, il peut y avoir des questions plus difficiles pour voir jusqu'où vont les connaissances du candidat. Rassurons-nous, il n'est pas nécessaire de répondre à certaines questions difficiles pour réussir son oral, lorsque toutes les étapes précédentes se sont bien déroulées, ces questions n'étant souvent posées pour décider si l'on mettra une très bonne ou une excellente note.

Assez parlé, il est temps de passer à l'action !

Dany-Jack Mercier, le 5 juin 2011

Chapitre 1

Plan

Prérequis[1] — Connaissances en géométrie suivant le niveau où l'on se place (barycentres, produit scalaire, puissance d'un point par rapport à un cercle, études de courbes paramétrées, ...).

Cadre — On travaille dans un espace affine euclidien E de dimension 2 ou 3 suivant le contexte.

1.1 Introduction

Un *lieu géométrique* est un ensemble de points $\mathcal{E}$ du plan ou de l'espace qui vérifient certaines conditions. Ces conditions sont en général données par :

- une *construction géométrique* qui précise comment obtenir un point de $\mathcal{E}$, c'est par exemple le cas lorsqu'on s'intéresse à des configurations mobiles où un point M de $\mathcal{E}$ est construit à partir d'un point N qui décrit une courbe donnée.

- *des équations paramétrées* qui expriment les coordonnées des points de $\mathcal{E}$ en fonction d'un ou plusieurs paramètres.

- *un ensemble d'équations et d'inéquations* que doivent vérifier les coordonnées cartésiennes (x, y) des points de $\mathcal{E}$. Ces équations font souvent intervenir des distances entre des points.

Résoudre un problème de lieu géométrique, c'est déterminer complètement ce lieu géométrique.

[1] Leçon n°39 de la liste des leçons d'oral 1 pour la session 2011 du CAPES externe.

1.2 Quelques exemples classiques

▶ Dès la classe de sixième, on sait qu'un *cercle* est le lieu des points situés à une distance donnée d'un point donné, et l'on connaît (et utilise) les deux définitions de la *médiatrice d'un segment.*

▶ En quatrième, on démontre que l'ensemble des points M tels que le triangle ABM soit rectangle en M est le cercle de diamètre $[AB]$.

▶ On définit une conique de foyer un point F, de directrice une droite D, et d'excentricité un réel strictement positif e, comme étant l'ensemble des points M tels que le rapport MF/MH soit égal à e, H désignant le projeté orthogonal de M sur H.

▶ L'exercice suivant, proposé dans un plan, se résout de la même manière dans un espace affine euclidien de dimension quelconque :

Exercice 1.1 *Soient O un point du plan, $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et $k \in \mathbb{R}$. Déterminez l'ensemble des points M de E tels que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u} = k$.*

1.3 Avec la fonction scalaire de Leibniz

Etant donnés n points A_1, ..., A_n et n réels α_1, ..., α_n, quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que ([2]) :

$$\alpha_1 MA_1^2 + ... + \alpha_n MA_n^2 = k \quad (*)$$

où k est un réel donné à l'avance ? L'idée principale est ici de voir si le système pondéré $A_1\,(\alpha_1)$, ..., $A_n\,(\alpha_n)$ possède un barycentre ou pas, et de l'utiliser s'il en possède un. On envisage donc deux cas :

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, on appelle G le barycentre de $A_1\,(\alpha_1)$, ..., $A_n\,(\alpha_n)$, et $(*)$ devient, grâce à la relation de Chasles :

$$(\alpha_1 + ... + \alpha_n)\, MG^2 = k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, GA_i^2$$

ce qui s'écrit $MG^2 = k'$ où k' est un réel qui dépend des données du problème. L'ensemble $\mathcal{E}$ est alors un cercle, un point, ou l'ensemble vide.

[2] La fonction φ qui au point M associe le réel $\alpha_1 MA_1^2 + ... + \alpha_n MA_n^2$ est appelée *fonction scalaire de Leibniz* associée au système de points pondérés $A_1\,(\alpha_1)$, ..., $A_n\,(\alpha_n)$.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, on ré-écrit $(*)$ en utilisant la relation de Chasles et en "coupant" en n'importe quel point O fixé à l'avance. On obtient :

$$2\overrightarrow{MO}.\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}\right) = k - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, OA_i^2$$

ce qui nous amène à chercher les points M tels que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u} = k'$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur et k' un réel connus. On obtient une droite orthogonale à $\overrightarrow{u}$ d'après l'Exercice 1.1.

Voici trois recherches de lieux géométriques qui utilisent le résultat que l'on vient d'établir :

Exercice 1.2 *Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminez l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MA/MB = k$.*

Exercice 1.3 *Soit ABC un triangle non isocèle en A. Déterminer le lieu $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que :*

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}.$$

Exercice 1.4 *Quel est l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles donnés de centres distincts ? Que dire si les cercles se coupent en deux points distincts ou sont tangents ?*

Le lieu des points obtenu dans ce dernier exercice est appelé l'*axe radical des deux cercles*. Accessoirement, on peut demander :

Exercice 1.5 *Connaissez-vous une construction géométrique de l'axe radical de deux cercles ?*

1.4 Le problème de la réciproque

Quand on cherche un lieu de points, il est essentiel de ne *jamais oublier de vérifier l'inclusion réciproque*. Si $\mathcal{E}$ est le lieu des points qui vérifient une certaine propriété $\mathcal{P}$, il est normal de commencer par dire que, si M appartient à $\mathcal{E}$, alors M vérifie ceci ou cela, pour finir par s'apercevoir que M appartient à un certain ensemble $\mathcal{L}$ que l'on sait décrire.

Ce faisant, on montre seulement une inclusion, à savoir que $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, et il ne faut pas croire que le problème est résolu ! Il reste encore à montrer l'inclusion contraire $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$, et c'est seulement après que cette vérification est effectuée que l'on peut conclure à l'égalité $\mathcal{E} = \mathcal{L}$.

Une telle stratégie de recherche correspond à un raisonnement par *analyse-synthèse* : pour découvrir les points M qui satisfont une propriété $\mathcal{P}$, on suppose que M est l'un de ces points (même si, à ce stade, on ne sait pas encore s'il en existe) et l'on cherche des conditions que ce point M doit vérifier. Ces conditions signifient que M appartient à un certain ensemble $\mathcal{L}$. On achève l'analyse du problème en affirmant que :

> Si notre problème admet un point-solution M, alors ce point appartient à l'ensemble $\mathcal{L}$.

Il s'agit ensuite de faire la synthèse, c'est-à-dire de choisir un point M quelconque dans $\mathcal{L}$, et montrer que ce point vérifie la propriété $\mathcal{P}$ (autrement dit qu'il appartient à $\mathcal{E}$). Ce n'est qu'après avoir effectué cette vérification que l'on pourra prétendre à l'égalité $\mathcal{E} = \mathcal{L}$.

▶ *Premier exemple* — On a parlé plus haut de l'ensemble des points M tels que la triangle ABM soit rectangle en M. Pour démontrer ce résultat, on ne doit pas seulement montrer une implication, mais une double implication[3].

▶ *Deuxième exemple* — Voici une activité[4] que l'on peut proposer en classe de quatrième pour faire prendre conscience de l'importance de la réciproque. Cette activité donne l'occasion d'emmener ses élèves en salle informatique pour leur demander de visualiser le lieu des points sur un logiciel de géométrie dynamique comme Geogebra© ([5]) :

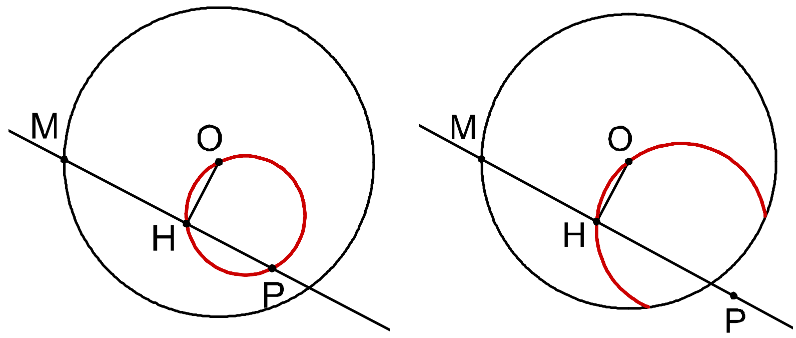
Exercice 1.6 *Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et un point P n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. Tracer le projeté orthogonal H de O sur la droite (MP). Quelle est le lieu décrit par les points H quand M parcourt $\mathcal{C}$?*

---

[3] Voir Question 3.1 du jury à la page 21.

[4] Relevée sur Educnet [2].

[5] On peut bien sûr envisager de présenter une activité de ce style sur Geogebra pendant son exposé oral devant le jury. C'est à la mode et ne mange pas trop de pain ! Ceci dit, le temps de préparation impose de faire un tri : dans cet exposé on pourra montrer sa dextérité TICE en utilisant Geogebra pour présenter l'Exercice 1.6 ou l'Exercice 1.8, mais certainement pas les deux à la fois.



Deux situations à envisager pour l'Ex. 1.6

► *Troisième exemple* — On connaît l'existence d'une partition de l'espace par un plan médiateur d'un segment. La description des sous-ensembles de cette partition en termes de distances se montre en prenant garde aux réciproques. Ne risque-t-on pas d'oublier celles-ci quand on cherche l'exercice suivant :

Exercice 1.7 *Soit P le plan médiateur d'un segment $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA < MB$.*

1.5 La cycloïde

Un point fixe d'un cercle qui roule sans glisser à vitesse constante sur une droite décrit une *cycloïde.*

L'activité suivante donne l'occasion d'utiliser Geogebra© pour visualiser rapidement la courbe. Elle peut être proposée en classe, comme thème de travail en salle informatique, en évitant la question c) si l'étude d'une courbe paramétrée ne figure pas au programme, ou en utilisant cette question pour faire réfléchir les élèves sur l'étude du sens de variations des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point mobile qui sera confrontée aux résultats lus à l'écran (cela peut constituer une excellente activité de découverte).

Exercice 1.8 *Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Un cercle de rayon R roule sans glisser sur l'axe Ox, dans le sens de $\overrightarrow{i}$ et à vitesse constante v. A la date t, ce cercle est nommé $\mathcal{C}_t$ et son centre est appelé O_t. A la date $t = 0$, $\mathcal{C}_0$ est de centre $O_0\,(0, R)$. Soit M le point de contact entre $\mathcal{C}_0$ et l'axe Ox. On s'intéresse à la courbe $\mathcal{E}$ décrite par le point M, supposé lié au cercle, quand celui-ci se déplace. A la date t, le point M prend* *la position $M(t)$ sur le cercle $\mathcal{C}_t$.*

a) Exprimer les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $M(t)$ en fonction de t et des données du problème.

b) Lorsque $R = v = 1$, visualiser $\mathcal{E}$ sur un logiciel de géométrie dynamique.

c) Etudier la courbe $\mathcal{E}$ tracée au b), et retrouver ce qui a été observé.

Je terminerai l'exposé en disant qu'il est facile d'imaginer des prolongements à ce dernier exercice.

Il suffit en effet de supposer que le point M lié au cercle n'est plus sur le cercle, mais à l'intérieur ou à l'extérieur de celui-ci, pour obtenir suivant le cas une cycloïde raccourcie ou allongée dont on peut étudier les propriétés (voir Section 4.7).

On peut aussi avoir l'idée de faire rouler le cercle $\mathcal{C}$ sur un autre cercle Γ, à l'intérieur ou à l'extérieur de celui-ci... Tous ces travaux sur des courbes paramétrées historiques obtenues par des études de mouvements bien réels peuvent faire l'objet d'un TER (Travail d'Etude et de Recherche) avec utilisation des TICE.