dany-jack.mercier@hotmail.fr

Chapitre 20

Produit scalaire

20.0.4 Questions A

Question 20.1 *Résoudre* $\overrightarrow{u}^2 = 5$.

Question 20.2 *Résoudre* $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{v}^2$ *où* $\overrightarrow{u}$ *est l'inconnue et* $\overrightarrow{v}$ *un vecteur donné.*

Question 20.3 *Soit E un espace vectoriel euclidien. Ecrire de deux façons différentes le produit scalaire $x.y$ de deux vecteurs en n'utilisant que des normes.*

Question 20.4 *Quelle est l'expression d'un produit scalaire dans une base* <u>*quelconque*</u> $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *?*

Réponse — Avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}).(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}) \\ &= xx'\|\overrightarrow{i}\|^2 + yy'\|\overrightarrow{j}\|^2 + (xy' + yx')\,\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} \\ &= xx'\|\overrightarrow{i}\|^2 + yy'\|\overrightarrow{j}\|^2 + (xy' + yx')\|\overrightarrow{i}\|.\|\overrightarrow{j}\|\cos(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}).\end{aligned}$$

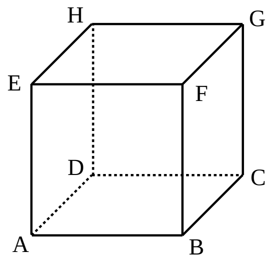
Question 20.5 *[12] Soit E un espace euclidien. Rappeler sans démonstration l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enoncer et démontrer une CNS pour que l'on ait l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Question 20.6 *[12] Soit E un espace euclidien. Rappeler sans démonstration l'inégalité de Minkowski. Enoncer et démontrer une CNS pour que l'on ait l'égalité dans l'inégalité de Minkowski.*

Question 20.7 *[12] Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E, démontrer que $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F = (F^{\perp})^{\perp}$.*

Question 20.8 *[12] (Oral du CAPES 2012) Démontrer les formules qui expriment les développements de* $\cos(a \pm b)$ *et* $\sin(a \pm b)$ *en utilisant uniquement des outils de lycée.*

Question 20.9 *On se donne un cube* $ABCDEFGH$*. Calculer la mesure de l'angle formé par les demi-droites* $[AB)$ *et* $[AG)$*.*



Réponse — On peut supposer que le côté du cube mesure une unité quitte à utiliser un agrandissement ou une réduction. Dans un repère orthonormal adapté à la situation, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ donc } \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}}{||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AG}||} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}) = \arccos(1/\sqrt{3}) = 0,955\,\text{radians}$, ce qui correspond à un peu moins de 55°. Le produit scalaire permet d'avoir rapidement accès aux angles géométriques formés par deux demi-droites de même origine dans l'espace.

Question 20.10 *[12] (Oral du CAPES 2012) On sait que l'on peut définir le produit scalaire en utilisant des normes, des cosinus, ou des projetés orthogonaux. Démontrer l'équivalence entre ces trois définitions.*

Question 20.11 *[12] Définir ce qu'est un espace vectoriel euclidien.*

Question 20.12 *[12] Comment définit-on un produit scalaire ? Existe-t-il des produits scalaires ?*

Question 20.13 *[12] Soit* E *un espace vectoriel euclidien. Enoncez et démontrez le Théorème de Pythagore.*

Question 20.14 *[12] Si* E *est un espace vectoriel euclidien, montrer qu'il existe toujours au moins une base orthonormale de* E*.*

Question 20.15 *[12] Si E représente un espace vectoriel euclidien, montrer que toute famille orthonormale $(e_1, ..., e_p)$ peut être complétée en une base orthonormale.*

Question 20.16 *[12] Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel euclidien E. Quand dit-on que F et G sont orthogonaux ? perpendiculaires ? supplémentaires orthogonaux ?*

Question 20.17 *[12] Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de E. Donnez l'expression du projeté orthogonal $p_D(\overrightarrow{u})$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E sur la droite D de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Démontrez-la.*

Question 20.18 *[12] Soit E un espace vectoriel euclidien. Soient F un sous-espace de E, et $(e_1, ..., e_p)$ une base orthogonale de F. Si $x \in E$, exprimer le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur F en fonction de x et des vecteurs de base e_i. Même question avec l'image $s(x)$ de x par la symétrie orthogonale de base F.*

Question 20.19 *[12] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormale $e = (e_1, e_2, e_3)$. On considère le plan P d'équation $5x - 8y + z = 0$. Trouver une base orthonormale de ce plan.*

20.0.5 Questions B

Question 20.20 *Comment définit-on un produit scalaire ? Existe-t-il des produits scalaires ?*

Question 20.21 *Déterminer tous les produits scalaires de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire définis sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Que peut-on dire matriciellement ?*

Question 20.22 *On se donne $\overrightarrow{u}(1,0)$ et $\overrightarrow{v}(3,1)$. Existe-t-il un produit scalaire tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit une base orthonormale ?*

Question 20.23 *Combien de structures euclidienne peut-on définir sur un plan vectoriel donné ?*

Question 20.24 *Vous proposez la formule $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans le plan en employant des angles orientés. Cette formule reste-t-elle vraie avec des angles géométriques ?*

Question 20.25 *Quel est l'interêt de la formule $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ quand l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ n'est pas orienté ?*

Réponse — Calculer l'écart angulaire entre deux demi-droites de même origine quand on travaille dans un espace affine euclidien de dimension finie n quelconque. Voir Question 20.9.

Question 20.26 *[12] Qu'appelle-t-on « identité du parallélogramme » dans un espace vectoriel euclidien ? Ecrivez-la et démontrez-la.*

Question 20.27 *[12] Comment définissez-bous un espace préhilbertien réel ? Qu'appelle-t-on espace de Hilbert réel ?*

Question 20.28 *[13] Dans l'espace de dimension* 3*, on considère deux droites non coplanaires* D *et* D'*. Montrer qu'il existe une et une seule droite* Δ *à la fois orthogonale et sécante à* D *et à* D'*.*

Réponse — Nous ne reprenons ici que la solution de [13] qui utilise le produit scalaire et du calcul algébrique. Sur la FIG. 20.1 on a dessiné deux droites D et D' non coplanaires. Posons $D = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $D' = A' + \mathbb{R}\overrightarrow{u}'$.

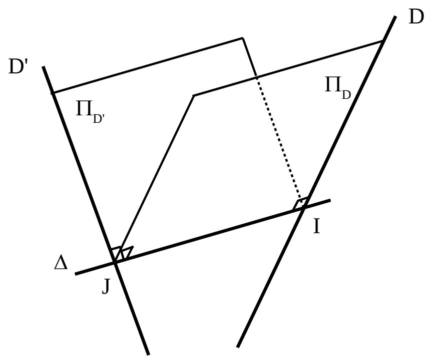


FIG. 20.1 – Perpendiculaire commune

Trouver une perpendiculaire commune (IJ) à D et D' revient à trouver un couple de point $(I,J) \in D \times D'$ tel que $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u}' = 0$ ou, ce qui revient au même, des réels λ et μ qui vérifient le système :

$$(S) \quad \begin{cases} \overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{u} & (1) \\ \overrightarrow{BJ} = \mu\overrightarrow{u}' & (2) \\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u}' = 0. & (3) \end{cases}$$

Les équations (3) s'écrivent :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}).\overrightarrow{u} = 0 \\ (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}).\overrightarrow{u}' = 0 \end{cases}$$

ou encore, en développant et en utilisant les relations (1) et (2) :

$$\begin{cases} -\lambda||\overrightarrow{u}||^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} + \mu(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}') = 0 \\ -\lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}') + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}' + \mu||\overrightarrow{u}'||^2 = 0 \end{cases}$$

soit :

$$(S') \quad \begin{cases} \lambda||\overrightarrow{u}||^2 - \mu(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}') = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} \\ \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}') - \mu||\overrightarrow{u}'||^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}'. \end{cases}$$

Le déterminant du système (S') est :

$$\delta = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}')^2 - ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{u}'||^2.$$

Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte et l'on aura $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}'| < ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{u}'||$ ([7], Th. 86). Le système (S') est donc un système de Cramer qui admettra un unique couple-solution (λ, μ). L'existence et l'unicité des points I et J, et donc de la perpendiculaire commune (IJ), est ainsi démontrée.

Remarques — La droite Δ est appelée perpendiculaire commune à D et D', et le résultat que nous venons de démontrer est connu sous le nom de *Théorème de la perpendiculaire commune.* L'exercice proposé dans le volume IV de la collection *Acquisition des fondamentaux pour les concours* [13] continue en demandant ensuite de déduire que la distance entre D et D' est donnée par :

$$\mathrm{d}\left(D, D'\right) = \frac{|\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}')|}{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'||}$$

où $(A, A') \in D \times D'$ et où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont des vecteurs directeurs de D et D'.

20.0.6 Questions C

Question 20.29 *[12] Rappelez comment on peut définir le produit scalaire dans le plan en utilisant le cosinus d'un angle, puis démontrez la symétrie et la bilinéarité du produit scalaire en utilisant cette définition.*

Question 20.30 *[12] Soit $\varphi : E \times E \rightarrow E$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E de dimension finie. Soit E^* le dual de E.*
Montrer de deux façons différentes que l'application :

$$\widetilde{\varphi} : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E^* \\ x & \mapsto & \varphi(x, .) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est l'image d'une base orthonormale de E par $\widetilde{\varphi}$?

20.1 Une présentation de niveau lycée

L'exercice suivant, extrait du volume III de la collection *Acquisition des fondamentaux pour les concours* [12], propose une présentation simple du produit scalaire qui peut aider à construire son exposé d'oral 1 :

Question 20.31 ***(Définition de la norme et du produit scalaire au lycée)*** *Les réponses doivent être données dans le cadre des programmes du lycée. On se place dans un plan $\mathcal{P}$.*

a) Définir la norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme on peut le faire au lycée.

b) Soient A et B deux points de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan. Démontrer que la distance AB entre A et B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

En déduire l'expression de la norme $||\overrightarrow{u}||$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan en fonction de ses coordonnées (x, y) dans la base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

c) En utilisant les questions précédentes, démontrer que pour tout réel k et pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ du plan :

(1) $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$,

(2) $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$,

(3) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$.

d) Par définition, on dit que le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, suivant :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right).$$

Si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ sont les expressions de deux vecteurs dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, montrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

e) Démontrer que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

f) Si A, B et C sont trois points non alignés du plan, montrer l'équivalence :

$$ABC \text{ rectangle en } A \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

g) ***(Expression à l'aide d'une projection orthogonale)*** *Soient A et B deux points distincts. Démontrer que si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$. Montrer ensuite que si m et n désignent les projetés orthogonaux de deux points M et N sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{mn}$.*

h) ***(Expression à l'aide du cosinus)*** *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, montrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.*

20.2 Témoignage de David

20.2.1 Compte rendu

Voici le compte rendu d'un oral de CAPES passé en juin 2013, envoyé par David.

Bon... j'ai passé mes épreuves orales vendredi et samedi... C'était ma première fois ! Je vous avoue que j'en garde un goût assez amer (dû au stress) surtout en ce qui concerne la leçon.

Plusieurs amis ayant passé le CAPES en 2008 m'avaient mis en garde : attention ! ! ! tu n'as le droit aux livres QUE pour l'épreuve sur dossier. Donc quand je suis arrivé pour l'épreuve de leçon, je n'avais pas pris mes 30kg de bouquins... ERREUR, en fait on y a bien le droit.

Je suis tombé sur le couple : lois normale/ produit scalaire. Evidemment je choisis le produit scalaire. Je construis un petit plan pendant 15 min en listant les résultats intéressant. Je m'aperçois que c'est quasiment le même plan que la leçon de 1S de chez Bordas ! Je me dis que c'est une bonne idée ! Introduire le produit scalaire en 1ere est très intéressant et comme je maitrise le sujet, les questions peuvent fuser sur le programme de terminale, je me préparerai sur mon temps de préparation. Je pense que le produit scalaire dans les espaces de Hilbert n'était pas une bonne idée, c'est le CAPES pas l'agrégation.

Au final, je prépare 3 figures Geogebra (pas le temps d'en faire plus), mon plan, la démo de TOUS les résultats que j'avance, 2 idées pour des exercices d'application faciles (pas le temps d'en faire plus) et j'anticipe quelques questions niveau terminale. Tous cela sous un stress horrible ca je suis un énormément stressé dans ce genre de conditions.

Tout à coup je me retrouve devant le jury sans trop savoir comment. Ils me disent : c'est parti 15 min. Je réponds que n'ayant aucune pendule dans la salle je vais retirer ma montre et la poser sur la table....J'ai perdu une minute à essayer de la retirer sans y arriver... Merci Captain Stress !

Au tableau, je leur parle de la manière dont j'introduirai le produit scalaire, j'utilise une figure Geogebra... Le jury fait la moue. J'annonce les prérequis et mon plan. Il ne me reste plus que 5 minutes... Au final je ne présente qu'une petite moitié de ma leçon.

Question : montrez et démontrez votre partie 3 ($\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\cos\theta$ et théorème de la médiane)

Captain Stress à la rescousse : j'écris AH au lieu de CH, je change un + en x... Je m'aperçois que j'utilise un résultat dans ma partie 2 pour la démonstration or je n'ai pas pu en parler... Bref : mon raisonnement était certes juste mais j'ai écrit n'importe quoi. Je vois la tête du jury... Pas bon, mais un des membres essaye de m'aider : vous êtes sûr de votre produit scalaire là ? Moi : euh... Ah ! Non pardon veuillez m'excuser. Je me suis trompé quand j'ai écrit AH, c'était CH. Je suis allé trop vite.

Ensuite une question sur « le sens des vecteurs » qui m'a un peu perturbé mais je pense qu'au final j'ai donné une réponse potable. Question sur la projection... Je pense avoir pas trop mal justifié ma réponse.
Démonstration du théorème de la médiane : Captain stress était toujours au rendez-vous. Un membre du jury me demande d'expliquer une ligne de la démo. Je regarde et dit : pardon excusez-moi, je n'ai pas écrit ce qu'il fallait. En fait il fallait écrire ceci.

Je constate que le jury remarque que j'arrive à me corriger comme il faut dès que l'on me fait une remarque. Je sens qu'ils sentent que le stress y est pour beaucoup dans cette histoire. On me demande les démos de bilinéarité et la démo d'équivalence entre la définition du produit scalaire par coordonnées et celle par les longueurs au carré. Là ça passe. Puis la question : est ce que l'on a besoin d'un repère orthonormé pour parler de produit scalaire ? Et là, c'est le drame : je dis que non. On peut définir des produits scalaires avec n'importe quelle autre base. Jury : ah tiens donc ! Donc vos résultats sont toujours vrais si je prends une base faite dans un plan maillé par des triangles équilatéraux ? Je sentais le piège arriver, mais je n'arrive pas à répondre correctement, je me sens trop agressé de questions et plombé par le stress qui m'empêche de penser normalement. Voilà comment s'est achevé mon oral 1.

Quant à l'épreuve sur dossier, cela s'est mieux passé, même si je pense que j'aurais pu mieux faire. Je n'ai pas trop aimé l'attitude du jury pour la partie « agir en pantin de l'état » : ils sont assez fermés d'esprit. J'ai en effet parlé de l'expérience de certains professeurs qui communiquent avec les parents d'élèves par méls. Ils m'ont interrompu immédiatement en disant que c'était une mauvaise pratique. Je leur ai dit que je leur faisais part de ce qu'il se pratiquait dans certains établissements et non de ce qu'il faut faire, même si je pense que le mél au professeur ne peut être une solution qu'en cas d'urgence, d'urgence lorsqu'il n'y a pas d'autre moyens...

Bref voilà. Je pourrais rentrer un peu plus dans les détails quand je m'en serais remis. Je suis déçu car je savais faire beaucoup de chose mais le stress a vraiment été mon pire ennemi.

20.2.2 Commentaires

Je reviens seulement sur la dernière question « A-t-on besoin d'un repère orthonormé pour parler de produit scalaire ? ». Vous répondez que l'on peut définir des produits scalaires avec n'importe quelle autre base, et vous avez raison.

Le « Ah tiens donc ! » semble bien agressif, puisque l'important est ici de demander au candidat de justifier son affirmation, et d'expliquer son point de vue. Ou bien le jury a voulu vous déstabiliser pour voir comment vous réagissez, ou bien n'avait-il plus de temps, ou bien travaillait-il inconsciemment dans le cadre spécifique d'une présentation au lycée où l'on admet que l'on dispose déjà de la notion d'angle droit vue au collège, et où l'on construit le produit scalaire uniquement à partir de cette notion supposée acquise une fois pour toute.

La réponse à une telle question d'ordre général est longue, et sera différente suivant le point de vue que l'on adopte : il faut relativiser.

On ne peut pas répondre à la question de « savoir si les résultats obtenus sont toujours vrais avec un repère quelconque », sans se demander de quels résultats on parle ni dans quelle situation on se place.

Par exemple, si l'on travaille dans un repère orthonormal donné $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans un plan affine euclidien donné, et si l'on a envie de rapporter les points à un autre repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ non orthonormal du plan, il est évident que l'écriture algébrique $xx' + yy'$ du produit scalaire ne sera plus valable dans la nouvelle base, puisque le produit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ interviendra forcément dans le développement de $(x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}).(x'\overrightarrow{u}+y'\overrightarrow{v})$, et n'est plus nul. Par contre, rien n'empêche de changer de structure euclidienne en décidant que le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sera orthonormal pour cette nouvelle structure, et travailler dans ce nouveau cadre. Il suffit de définir le produit scalaire de deux vecteurs par la formule :

$$\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = xx' + yy$$

lorsque $\overrightarrow{U} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{V} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$, et le tour est joué. Personne n'empêche de le faire ! Bien sûr, l'orthogonalité n'aura pas le même sens dans l'une ou l'autre des structures, mais ce n'est pas la question.

Je tente de justifier mon point de vue en peu de lignes :

• Il existe *grosso modo* deux façon de faire de la géométrie : en utilisant l'axiomatique d'Euclide-Hilbert (EH), ou en utilisant l'axiomatique espace vectoriels/espaces affines (VA).

• **L'axiomatique EH** est celle qui est adoptée (sans le dire) dans le secondaire dès le collège. On travaille avec des points et des droites, on présente la notion de distance entre deux points et l'on admet que deux droites peuvent être perpendiculaires. Les objets et les notions présentés sont régis par des axiomes spécifiques, comme par exemple l'inégalité triangulaire ou le cinquième postulat d'Euclide.

Dans cette présentation, on sait d'abord ce que sont un point et une droite dans un plan (ou dans l'espace), puis on dit savoir ce que sont deux droites perpendiculaires, puis on définit les vecteurs, puis on définit le produit scalaire en utilisant la notion d'orthogonalité (c'est-à-dire d'angle droit et de distance) héritée des axiomes EH qui définissaient le plan ou l'espace.

• **L'axiomatique VA** est adoptée en post-BAC (sauf si l'on secondarise l'enseignement universitaire comme cela se fait avec le nouveau programme 2013-14 des CPGE, pour adapter l'enseignement aux connaissances des nouveaux bacheliers). Dans cette axiomatique, on définit ce qu'est un espace vectoriel, puis on définit ce qu'est un espace affine. Enfin on définit ce qu'est un produit scalaire dans un espace vectoriel, et ce produit scalaire permet de définir l'orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites, etc.

A chaque pas, on définit un espace et l'on décide de travailler dans celui-ci, ce qui revient à admettre qu'il existe un espace possédant ces propriétés, et donc revient à considérer les items qui définissent ces espaces comme des axiomes, d'où la proximité entre la notion de définition et celle d'axiomes (ne parle-t-on pas d'axiomes d'un espace vectoriel ?)

Dans cette présentation, on sait d'abord ce qu'est un vecteur, puis on définit un point, puis on définit la notion de produit scalaire et enfin celle d'orthogonalité en disant, par définition, que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, puis que deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

• **EH versus VA** : l'axiomatique d'Euclide-Hilbert convient pour construire un plan ou un espace géométrique de dimension 3. Pas plus. L'axiomatique espace vectoriels/espaces affines permet de définir en une seule fois des espaces géométriques de n'importe quelle dimensions, voire de dimension infinie. De plus, l'axiomatique VA est plus simple et connue de tous les mathématiciens depuis le début du XX[e] siècle. Il est plus facile d'échanger entre matheux en utilisant ces axiomes. Ce n'est pas le cas de l'axiomatique d'Euclide-Hilbert qui possède de nombreuses variantes, si bien que personne ne pourra dire quels résultats sont des axiomes et quels résultats sont véritablement déduits, à moins de se souvenir en tête de toutes la construction de l'édifice géométrique (impossible et de toute façon cette construction ne sera pas dans la tête de votre interlocuteur). Personne ne saura exactement dans quelle variante on se place, ce qui n'est pas une gêne pas tant que l'on ne remonte pas aux énoncés primordiaux, mais peut tout de même nuire à la communication.

Conclusion — Le jury a posé une question dangereuse et difficile, qui demande du recul. Pour éviter les problèmes, on devrait peut-être se contenter de répondre :

> « Oui, on a besoin de la notion d'orthogonalité et de travailler dans un repère orthonormal pour introduire le produit scalaire au lycée ».

Ce n'est pas faux, même si c'est incomplet. Ce type réponse devrait enchanter la plupart des inspecteurs qui sont de plus en plus présents dans le jury du CAPES, et pourraient se placer trop systématiquement et trop naturellement dans le cadre de l'enseignement secondaire, même quand la question débouche sur des réponses plus nuancées et plus globales.

En répondant ainsi : si personne de relève quoi que ce soit, c'est tout bénéfice et tout est bien dans le meilleur des mondes, et si quelqu'un demande des précisions, on peut en donner.

Ah ! Ces oraux demandent bel et bien de mettre au point toute une stratégie qui n'a parfois que peu à voir avec les mathématiques, n'est-ce pas ?