CLASSEMENT DES QUESTIONS

- **Questions A$^+$** (Priorite elevee) – Ces questions courtes sont faciles à poser pour tester le candidat sur les fondamentaux, dans le but de valider ses connaissance ou débusquer ses lacunes. Dans ce dernier cas elles peuvent être à l'origine de questions enchaînées du jury destinées à préciser l'étendue des lacunes. Ces questions, qui peuvent être éliminatoires, sont à étudier en première priorité.

- **Questions A** (Priorite elevee) – Même type de questions que les A$^+$, mais dont les réponses sont plus longues à donner, ce qui peut être un handicap quand elles sont posées à l'oral en disposant d'un temps limité. Ces questions restent prioritaires et peuvent être éliminatoires.

- **Questions B** (Priorite normale) – Répondre à ces questions est moyennement important. Il vaut mieux y arriver, mais échouer devrait être rattrapable, et le jury pourra aussi aider le candidat en lui donnant suffisamment d'indications. Ces questions sont à utiliser en entraînement seulement après avoir épuisé les questions A$^+$ et A.

- **Questions C** (Non prioritaire) – Ces questions ne sont pas prioritaires, compte tenu du programme et de l'orientation de la session 2017 (attention : cela peut varier d'une session à l'autre), ou simplement parce qu'elles sont posées pour voir jusqu'où le candidat compétent peut aller. Il s'agit de questions d'approfondissement qui ne devraient pas faire perdre de points, mais peuvent en faire gagner. Ces questions sont à laisser de côté tant que les apprentissages prioritaires offerts par les questions A$^+$ et A ne sont pas encore bien acquis.

Chapitre 1

Questions

1.1 Questions A$^+$

1.1.1 Multiples, diviseurs & division euclidienne

Question 1 *La relation « divise » est-elle une relation d'ordre dans l'ensemble* $\mathbb{N}$ *? Une relation d'ordre dans* $\mathbb{Z}$ *?*

Question 2 *Existe-t-il un plus petit élément de n'importe quelle partie de* $\mathbb{N}$ *pour la relation « divise » ? Une borne inférieure ?*

Question 3 *Déterminer toutes les valeurs de l'entier relatif* n *telles que le quotient* $\frac{n+14}{n-5}$ *soit entier.*

Question 4 *Chercher les entiers naturels* x *et* y *tels que* $x^2 + 7xy = 51$.

Question 5 *Résoudre l'équation diophantienne* $xy - 8x + 4y - 5 = 0$.

Question 6 *On pose* $a = 5k+4$ *et* $b = 3k+1$*, où* $k \in \mathbb{Z}$*. Déterminer les seuls diviseurs communs de* a *et* b *possibles.*

Question 7 *On sait que la relation « divise » est une relation d'ordre dans* $\mathbb{N}$*. Est-ce une relation d'ordre total ? Quel lien peut-on trouver entre la relation d'ordre usuelle* $\leq$ *et la relation « divise » dans* $\mathbb{N}$ *?*

Question 8 *Pour tout* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$*, montrer qu'il existe un unique couple* $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $a = bq + r$ *et* $0 \leq r < b$.

Question 9 *Soit* $b \in \mathbb{N}^*$*. Montrer que la famille* $\mathcal{F} = \{[kb, kb + b[\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *est une partition de* $\mathbb{Z}$*. A quoi est liée cette propriété ?*

Question 10 *Pourquoi la division euclidienne par* 0 *est-elle impossible ?*

Question 11 *Existe-t-il une division euclidienne dans $\mathbb{Q}$?*

Question 12 *Proposez un algorithme très simple permettant de calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b quand a et b sont des entiers naturels, et $b \neq 0$. Montrez que cet algorithme converge.*

Question 13 *La division euclidienne est au programme du cycle 4 du collège (programmes 2016), ainsi que l'initiation à l'algorithmique et à l'utilisation des tableurs. Comment peut-on obtenir le quotient et le reste d'une division euclidienne à ce niveau en utilisant un tableur ? Utiliser le tableur pour effectuer la division de* 1256 *par* 127*.*

Question 14 *Calculer le reste de la division euclidienne de* $50^{100} + 100^{100}$ *par* 7*.*

Question 15 *Cherchez un nombre entier N tel que le reste de N dans la division par* 10 *soit* 3*, et le reste de N dans la division par* 17 *soit* 2*.*

Question 16 *Pouvez-vous définir un nombre décimal ?*

Question 17 *Une calculatrice affiche* $1,414\,213\,562$ *quand on lui demande de calculer* $\sqrt{2}$*. Obtient-on une valeur exacte de* $\sqrt{2}$ *? Pourquoi ? Comment démontrer cela en classe de seconde ?*

Question 18 *Comment faire comprendre à un élève que l'on ne peut pas écrire* $2/3 + 4/7 = 6/10$ *? Donnez-nous des pistes. Indiquez-nous enfin comment démontrer rigoureusement que :*

$$\forall\,(a,c) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall\,(b,d) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Question 19 *La propriété « un nombre qui divise un produit divise forcément l'un des facteurs » est-elle vraie ou fausse ? Justifiez.*

Question 20 *Cherchez tous les diviseurs de* 24 *à la main.*

Question 21 *Combien le nombre* 825 *possède-t-il de diviseurs ?*

Question 22 *Décomposez à la main* 720 *en produit de facteurs premiers. Combien* 720 *possède-t-il de diviseurs ?*

Question 23 *Calculer le nombre de tous les diviseurs d'un entier en fonction des nombres premiers et des exposants qui interviennent dans la décomposition de cet entier.*

Question 24 *Ecrivez* 123 *en base* 2*.*

Question 25 *Pourquoi travailler en base* 2 *en informatique ?*

Question 26 *(Oral du CAPES 2015) Que savez-vous du code ASCII ?*

Question 27 *Ecrire* 468 *en base* 16.

Question 28 *A quoi sert l'écriture hexadécimale d'un nombre ? Pourquoi et où est-elle utilisée ?*

Question 29 *Voici un nombre donné en binaire :* 10111001101. *Convertissez-le en hexadécimal.*

Question 30 *Pour tout* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, *montrer qu'il existe un unique couple* $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $a = bq + r$ *et* $0 \leq r < b$.

Question 31 *Calculer à la main la* 375*-ème décimale de* $60/7$. *La même méthode convient-elle pour déterminer la* 375*-ème décimale de* π *sachant que les savants chinois du* V^e^ *siècle écrivaient* $\pi = 355/113$ *?*

Question 32 *Quel est l'intérêt d'un système de numération comme le système décimal ? Comment expliquer l'écriture en base dix à un élève du primaire ?*

Question 33 *Que peut-on dire de l'écriture décimale illimitée d'un nombre rationnel ? La réciproque est-elle vraie ? Avez-vous une idée de la façon dont on peut prouver ce résultat ?*

Question 34 *Comment justifier que* $x^0 = 1$ *?*

Question 35 *Soient* a *et* b *deux entiers tels que* $a^2 + b^2$ *soit divisible par* 8. *Montrer qu'alors* a *et* b *sont pairs.*

1.1.2 PGCD, Bezout & Gauss

Question 36 *Le pgcd de* n *et* $n + 1$ *est-il égal à* 1 *?*

Question 37 *Si* a *est pair et si* b *est impair, a-t-on* $\mathrm{pgcd}\,(a, b) = 1$ *?*

Question 38 *Qu'appelle-t-on pgcd de deux entiers* a *et* b *?*

Question 39 *Expliquez comment définir le pgcd de deux entiers naturels en utilisant l'algorithme d'Euclide. Expliquez pourquoi l'algorithme aboutit après un nombre fini de divisions.*

Question 40 *Quand on écrit l'algorithme d'Euclide, on utilise souvent les fonctions « mod » ou « partie entière » pour déterminer le reste et le quotient des divisions successives. A t-on le droit d'utiliser de telles fonctions ?*

Question 41 *Comment obtient-on le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b dans le langage PYTHON ?*

Question 42 *Le pgcd de deux entiers naturels est-il le plus grand diviseur commun de ces deux entiers naturels pour la relation d'ordre usuelle dans* $\mathbb{N}$ *?*

Question 43 *A quoi est égal* $\operatorname{pgcd}(0,0)$ *?*

Question 44 *Montrer que le pgcd est associatif.*

Question 45 *Si* $a = bq + r$*, peut-on montrer que* $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(b,r)$ *? Cela peut-il servir à quelque chose ?*

Question 46 *Soient* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Montrer que :*

$$\operatorname{pgcd}(a,b) = \delta \;\Rightarrow\; \exists u, v \in \mathbb{Z} \quad au + bv = \delta.$$

La réciproque est-elle vraie ? Enoncez et démontrez le théorème de Bezout.

Question 47 *Si* $a, b, k \in \mathbb{Z}$*, montrer que* $\operatorname{pgcd}(ka, kb) = |k| \operatorname{pgcd}(a,b)$*.*

Question 48 *Si a est premier avec b et premier avec c, montrer que a est premier avec bc.*

Question 49 *Si a divise bc et si a est premier avec b, démontrer qu'alors a divise c.*

Question 50 *Si a et b sont premiers entre eux et divisent c, montrer qu'alors le produit ab divise c.*

Question 51 *Soit n un entier relatif. Montrer que les quotients* $n(n+1)/2$ *et* $n(n+1)(2n+1)/6$ *sont des entiers.*

Question 52 *(Oral du CAPES 2008)*
Montrer que $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Question 53 *Si x est un nombre réel irrationnel, peut-on affirmer que pour tout nombre entier naturel non nul n le réel x^n est irrationnel ? Justifier.*

Question 54 *Montrer que si b est un entier naturel,* $\sqrt{b}$ *est rationnel si et seulement si b est un carré parfait.*

Question 55 *Montrer que tout nombre rationnel r s'écrit de façon unique sous la forme* $r = a/b$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *et* $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$*. Dans ce cas, démontrer la CNS suivante :* $r = c/d$ *si, et seulement si, il existe* $t \in \mathbb{Z}$ *tel que* $(c,d) = (ta, tb)$*.*

Question 56 *Démontrer que la somme de deux fractions irréductibles dont les dénominateurs sont premiers entre eux ne peut pas être un entier, sauf dans un cas particulier que l'on précisera.*

Question 57 *Montrer qu'une fraction irréductible a/b est un décimal si et seulement si b se décompose en $2^\alpha 5^\beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.*

Question 58 *Montrer qu'un nombre décimal x est inversible dans l'ensemble des décimaux si, et seulement si, il s'écrit $x = \pm 2^\alpha 5^\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.*

Question 59 *Si a et b sont des entiers premiers entre eux, montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.*

Question 60 *Montrer que la fraction $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Question 61 *Soient a, b, n trois entiers naturels.*
a) Montrer que : $(\operatorname{pgcd}(a,b) = 1 \Rightarrow \operatorname{pgcd}(a^n, b) = 1)$.
b) En déduire que : $(\operatorname{pgcd}(a,b) = 1 \Rightarrow \operatorname{pgcd}(a^n, b^n) = 1)$.
c) Les réciproques sont-elles vraies ?

Question 62 *Montrer l'implication* $(a \equiv b \ \ (c) \Rightarrow \operatorname{pgcd}(a,c) = \operatorname{pgcd}(b,c))$. *La réciproque est-elle vraie ?*

Question 63 *A quoi servent les pgcd et les ppcm ?*

Question 64 *Peut-on calculer un pgcd ou un ppcm sans utiliser l'algorithme d'Euclide ?*

Question 65 *Y-a-t-il un ordre logique dans l'introduction des notions suivantes :*
a) le pgcd et le ppcm de deux entiers ;
b) la décomposition de tout entier non nul en produit de facteurs premiers ? Autrement dit, vaut-il mieux présenter l'étude du pgcd « avant » la décomposition en produit de facteurs premiers, ou le contraire ?

Question 66 *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Expliquer comment résoudre une équation diophantienne de la forme $ax + by = c$.*

Question 67 *Résoudre l'équation diophantienne $2x + 3y = 1$.*

Question 68 *Résoudre l'équation diophantienne $233x + 79y = 1$.*

Question 69 *Soit $P(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré n dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que si $r = p/q$ est une racine rationnelle de P (écrite sous forme d'une fraction irréductible), alors p divise a_0 et q divise a_n.*

Question 70 *Le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 + X + 5$ admet-il une racine dans $\mathbb{Q}$? Est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?*

1.1.3 Nombres premiers

Question 71 *Enoncez la définition d'un nombre premier ?*

Question 72 *(Oral du CAPES 2008) Le nombre* 1 *est-il premier ? Pourquoi ?*

Question 73 *Un entier impair est-il premier ?*

Question 74 *Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à* 2 *possède au moins un diviseur premier.*

Question 75 *Montrer qu'un nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas. La réciproque est-elle vraie ?*

Question 76 *Si p est premier, montrer que ($p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$). La réciproque est-elle vraie ?*

Question 77 *(Oral du CAPES 2006) Enoncez et démontrez le théorème de décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers.*

Question 78 *(Oral du CAPES 2006) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.*

Question 79 *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à* 2. *Si n n'est pas premier, montrer qu'il possède un diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$. La réciproque est-elle vraie ? A quoi peut servir cette propriété ?*

Question 80 *Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que k^2 divise n^2 si et seulement si k divise n.*

Question 81 *(Oral du CAPES 2009) Si a et b sont des entiers premiers entre eux, a-t-on* $\mathrm{pgcd}(a+b, a-b) = 1$ *ou* 2 *?*

Question 82 *Soient u et v deux entiers premiers entre eux et de parités différentes. Montrer que les entiers $2uv$, u^2+v^2, u^2-v^2 sont premiers entre eux deux à deux.*

Question 83 *(Oral du CAPES 2006) Soient p un nombre premier et k un entier tel que $0 < k < p$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.*

1.1.4 Congruences

Question 84 *En terminale, on introduit la notion « avoir le même reste » dans une division euclidienne. Pouvez-vous donner une CNS pour que deux entiers a et b aient le même reste dans la division par n ?*

Question 85 *(Oral du CAPES 2016, voir §.6.2)*
Montrer que $3n+7$ n'est pas divisible par 3.

Question 86 *(Oral du CAPES 2016, voir §.6.2)*
On chiffre un message x de manière affine tel que y soit congru à $3x+10$ modulo 26. Comment décrypter le message reçu ?

Question 87 *(Oral du CAPES 2016, voir §.6.2)*
Que signifie la congruence modulo 1 ? Modulo 0 ? Qui sont $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$?

Question 88 *Peut-on dire que $15 \equiv 7 \ (1)$? A quoi sont égaux les ensembles $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$?*

Question 89 *(Oral du CAPES 2009)*
Pour tout entier n, le nombre $n(n+1)(2n+1)$ est-il divisible par 3 ?

Question 90 *Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que $N = n^5 - n$ est divisible par 30.*

Question 91 *Enoncez les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5 et 11. Démontrez le critère de divisibilité par 4, puis par 11.*

Question 92 *Calculer à la main le reste de la division euclidienne de 10^{1000} par 17.*

Question 93 *Si p est premier, démontrez que $a^p \equiv a \ (p)$ pour tout entier relatif a. En déduire une expression de l'inverse de $\dot{a}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Question 94 *Soit p un nombre premier. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) $a^p \equiv a \ (p)$ *quel que soit l'entier a,*
(2) $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$ *quel que soit l'entier a tel que p ne divise pas a.*

Question 95 *L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall a \in \mathbb{Z}^* \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad a^k \equiv 1 \ (n) \ ?$$

Question 96 *Calculer $3^{102} \bmod 5$ à la main.*

Question 97 *Soit p un nombre premier. Montrer que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \ (p)$ quels que soient les entiers relatifs a et b. Proposez deux preuves différentes.*

Question 98 *(Oral du CAPES 2006)*
Calculez $\varphi(8)$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?

Question 99 *L'anneau $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ est-il intègre ? Est-ce un corps ? Quels sont ses éléments inversibles ?*

Question 100 *(Oral du CAPES 2015)*
Calculer l'inverse de 43 *modulo* 26 *? Pouvait-on prévoir que* 43 *est inversible modulo* 26 *? Quels sont les entiers inversibles modulo* 26 *?*

Question 101 *Résoudre* $x^2 \equiv 2 \ (7)$.

Question 102 *Résoudre le système de congruences :*

$$\begin{cases} x \equiv 14 \ (17) \\ x \equiv \ 3 \ \ (15) \, . \end{cases}$$

Déterminer la plus petite solution positive de ce système.

1.2 Questions A

1.2.1 Multiples, diviseurs & division euclidienne

Question 103 *Recherchez l'écriture de* 35 *en base* 3*. Expliquez votre algorithme. Justifiez que votre algorithme converge à coup sûr.*

1.2.2 PGCD, Bezout & Gauss

Question 104 *A-t-on le droit d'écrire* $\mathrm{pgcd}\,(a, b, c)$ *? Justifiez.*

Question 105 *Résoudre l'équation* $233x + 79y = 1$ *en nombres entiers.*

Question 106 *Résoudre l'équation* $21x + 14y = 17$ *dans* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Question 107 *Si* $n \in \mathbb{Z}$*, on pose* $a = n - 1$ *et* $b = n^2 - 3n + 6$.
a) Montrer que $\mathrm{pgcd}\,(a, b) = \mathrm{pgcd}\,(a, 4)$.
b) Déterminer le $\mathrm{pgcd}\,(a, b)$ *selon les valeurs de* n.
c) Quelles sont les valeurs de $n \in \mathbb{Z} \backslash \{1\}$ *telles que :*

$$\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$$

soit un entier relatif ?

1.2.3 Nombres premiers

Question 108 *Combien existe-t-il de diviseurs de* 560 *dans* $\mathbb{N}$ *? Combien de diviseurs impairs ? La classe de* 560 *est-elle inversible dans* $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ *?*

1.2.4 Congruences

Question 109 *(Ecrit du CAPES 2012) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathcal{I}_n$ est un groupe commutatif.*

Question 110 *(Ecrit du CAPES 2012) On note $\mathcal{I}_{10}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Dans un tableau à deux rangées, marquez les éléments de $\mathcal{I}_{10}$ avec leurs ordres. Le groupe $(\mathcal{I}_{10}, \times)$ est-il cyclique ?*

Question 111 *(Ecrit du CAPES 2012) On note $\mathcal{I}_{12}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Dans un tableau à deux rangées, marquez les éléments de $\mathcal{I}_{12}$ avec leurs ordres. Le groupe $(\mathcal{I}_{12}, \times)$ est-il cyclique ?*

Question 112 *Résoudre le système de congruences :*

$$\begin{cases} 7x \equiv 5 \ \ (19) \\ 4x \equiv 1 \ \ (11)\,. \end{cases}$$

Question 113 *Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Soient u et v deux entiers tels que $up + vq = 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que le système de congruences :*

$$(S) \quad \begin{cases} x \equiv a \ \ (p) \\ x \equiv b \ \ (q) \end{cases}$$

admet la solution particulière $x_0 = bup + avq$. Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est formé des entiers de la forme $x_0 + kpq$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1.2.5 Compléments sur la dénombrabilité

> *Qui interdit à un examinateur du CAPES de profiter de cette leçon pour vérifier si le candidat connaît les notions de finitude et de dénombrabilité ? Savoir répondre à des questions simples sur ce thème est primordial pour celui qui se destine au professorat de mathématiques. Les questions suivantes sont à connaître, et un complément est proposé à la Section 1.4.5.*

Question 114 *Quand dit-on que deux ensembles sont équipotents ?*

Question 115 *Quand dit-on qu'un ensemble est fini ?*

Question 116 *Qu'appelle-t-on cardinal d'un ensemble fini ? On proposera une définition précise, et l'on montrera que cette définition a bien un sens.*

Question 117 *Qu'est-ce qu'un ensemble dénombrable ? Qu'est-ce qu'un ensemble au plus dénombrable ?*

Question 118 *Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est-il dénombrable ?*

Question 119 *Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

1.3 Questions B

1.3.1 Multiples, diviseurs & division euclidienne

Question 120 *Soit* b *un entier supérieur ou égal à* 2*. Montrer que tout entier naturel non nul* a *s'écrit de façon unique* $a = a_n b^n + ... + a_1 b + a_0$ *où* $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 1, ..., b-1\}$ *pour tout* i*, et* $a_n \neq 0$.

Question 121 *Déterminer tous les entiers naturels* n *et* a *tels que* a *divise simultanément* $5n + 31$ *et* $3n + 12$*. On pourra commencer par montrer que* a *divise* 33.

1.3.2 PGCD, Bezout & Gauss

Question 122 *Calculer* $\mathrm{pgcd}\,(350, 392, 1925)$ *et* $\mathrm{ppcm}\,(350, 392, 1925)$.

Question 123 *Est-il toujours possible de paver un rectangle avec des carrés identiques ? Quand peut-on le faire ?*

Question 124 *Un conteneur a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions* 500 *cm,* 350 *cm et* 200 *cm. On désire le remplir de boîtes cubiques sans laisser d'espace vide. Quelles seront les dimensions de ces boîtes ?*

Question 125 *Calculer l'ordre additif de la classe de* 12 *dans* $\mathbb{Z}/280\mathbb{Z}$.

1.3.3 Nombres premiers

Question 126 *Soient* m *et* n *deux entiers naturels. Montrer que* $\sqrt[n]{m}$ *est irrationnel si et seulement si* m *n'est pas la puissance* n*-ième d'un entier.*

Question 127 *Calculer la somme de tous les diviseurs d'un entier en fonction des nombres premiers et des exposants qui interviennent dans la décomposition de cet entier.*

1.3.4 Congruences

Question 128 *Montrer que* 223 *est premier, puis calculer le nombre* 2009^{2009} *modulo* 223.

Question 129 *Déterminer les entiers naturels* n *tels que* $35^n - 17^{2n}$ *soit divisible par* 26.

Question 130 *Soient* p *et* q *deux nombres premiers distincts. Soient* c *et* d *deux entiers naturels tels que* $cd \equiv 1 \bmod (p-1)(q-1)$*. Montrer que pour tout entier* x *on a* $x^{cd} \equiv x \bmod pq$.

1.4 Questions C

1.4.1 Multiples, diviseurs & division euclidienne

Question 131 *On dit parfois que* $\mathbb{N}$ *est un treillis. Qu'est-ce que cela signifie ?*

Question 132 *Sans calculer le quotient, combien de zéros finaux trouvera-t-on dans l'écriture de* $(100!)/(50!)$ *?*

Question 133 *(Oral du CAPES 2006) Trouver les sous-groupes de* $6\mathbb{Z}$ *qui contiennent* $2\mathbb{Z}$*. Trouver les sous-groupes de* $2\mathbb{Z}$ *qui contiennent* $6\mathbb{Z}$*.*

Question 134 *Soient* a *et* b *deux entiers naturels non nuls tels que* $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$*. On note* $a = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ *et* $b = p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k}$ *les décompositions de* a *et* b*. Calculer le nombre de sous-groupes de* $b\mathbb{Z}$ *contenant* $a\mathbb{Z}$*.*

Question 135 *Soient* a *et* b *deux entiers naturels, avec* $b \neq 0$*. Comment utiliser la division euclidienne pour obtenir le développement décimal du nombre rationnel* a/b *?*

Question 136 *Rappelez le critère de divisibilité par* 9*. Mérite-t-il le nom de critère ? Connaissez-vous la « preuve par 9 » d'une multiplication ? S'agit-il d'un critère ?*

1.4.2 PGCD, Bezout & Gauss

Question 137 *Comment calculer un ppcm en utilisant l'algorithme d'Euclide ?*

Question 138 *Connaissez-vous une interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide qui permet de calculer le pgcd de deux nombres entiers ?*

Question 139 *On pose* $\delta = \operatorname{pgcd}(a, b)$ *où* $a, b \in \mathbb{N}$*. Trouver une CNS pour que* $\delta = \operatorname{pgcd}(\delta a, b)$*.*

Question 140 *On note* $a \wedge b$ *et* $a \vee b$ *les pgcd et ppcm des entiers* a *et* b*. Montrer les formules de distributivité :*

$$\begin{array}{lrcl} \textit{(1)} & a \vee (b \wedge c) & = & (a \vee b) \wedge (a \vee c), \\ \textit{(2)} & a \wedge (b \vee c) & = & (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \end{array}$$

Question 141 *L'équation* $15x^2 - 7y^2 = 9$ *possède-t-elle des solutions en nombres entiers ?*

Question 142 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Déterminer une solution particulière de l'équation diophantienne* $2^n x + 3^n y = 1$*, puis résoudre cette équation dans* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*.*

Question 143 *Trouver les couples d'entiers de pgcd* 15 *et de différence* 105*.*

Question 144 *Déterminer les couples d'entiers naturels* (a,b) *tels que :*

$$\begin{cases} a^2+b^2=801 \\ \operatorname{ppcm}(a,b)=120. \end{cases}$$

Question 145 *Résoudre dans* $\mathbb{N}^2$ *l'équation* $2x^2+y=x\operatorname{pgcd}(3x,y)$*.*

1.4.3 Nombres premiers

Question 146 *Soit* p *un entier naturel supérieur ou égal à* 2*. Montrer que* p *est premier si et seulement si* $(p-1)!\equiv -1\ (p)$*.*

Question 147 *Combien y-a-t-il de solutions de l'équation* $15x+21y=9$ *dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *? Et dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *quand* p *est premier ?*

1.4.4 Congruences

Question 148 *(Oral du CAPES 2006) Connaissez-vous un critère de divisibilité par* 11 *? par* 8 *? par* 7 *?*

Question 149 *Résoudre une équation du second degré sous sa forme générale* $ax^2+bx+c=0$ *dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *lorsque* a *et* $\dot{2}$ *sont inversibles dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*. Expliquez.*

Question 150 *(Oral du CAPES 2015) Quelle différence y-a-t-il entre décryptage et déchiffrage ?*

Question 151 *(Ecrit du CRPE 2013) Soient* n *un nombre entier naturel non nul et* A_n *le nombre entier naturel dont l'écriture décimale ne contient que le chiffre* 1 *répété* n *fois :* $A_n=\overline{111...1}$ *(*1 *répété* n *fois).*

a) Pour quelles valeurs de n *le nombre* A_n *est-il divisible par* 11 *? Justifier.*
b) Pour quelles valeurs de n *le nombre* A_n *est-il divisible par* 33 *? Justifier.*

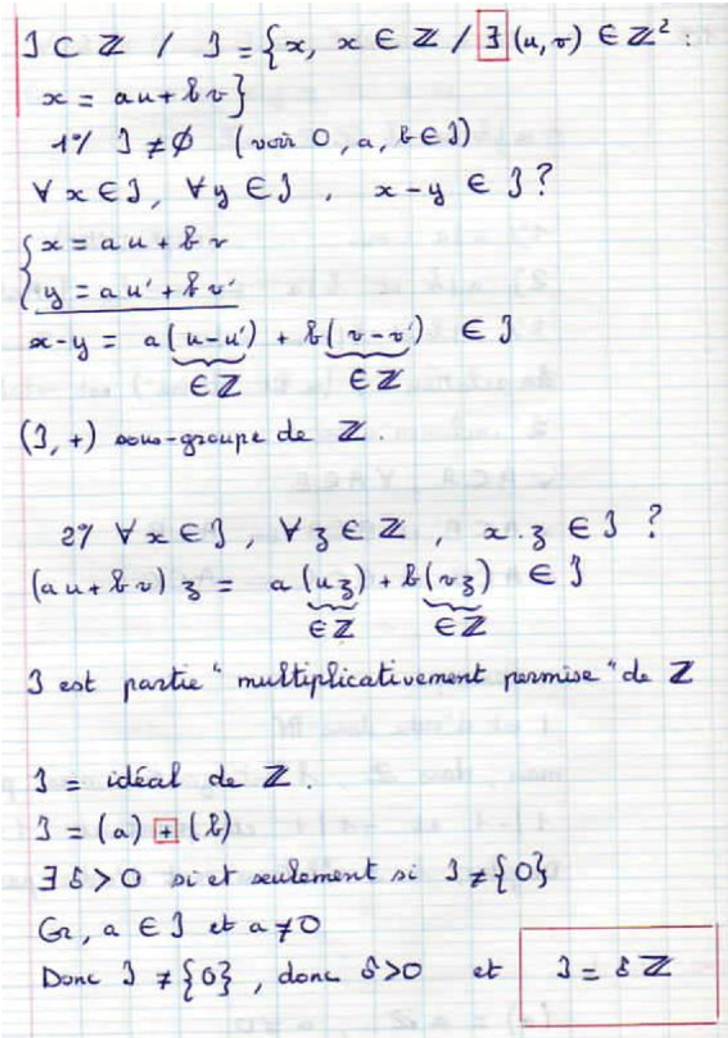
1.4.5 Compléments sur la dénombrabilité

Question 152 *Montrer que toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.*

Question 153 *Soit* $f:E\to F$ *une application injective d'un ensemble* E *dans un ensemble dénombrable* F*. Montrer que* E *est au plus dénombrable.*

Question 154 *Soit* $f:E\to F$ *une application surjective définie sur un ensemble dénombrable* E*. Montrer que* F *est au plus dénombrable.*

Question 155 *Le corps* $\mathbb{R}$ *des nombres réels est-il dénombrable ?*



$I \subset \mathbb{Z}$ / $I = \{x,\ x \in \mathbb{Z} / \boxed{\exists} (u,v) \in \mathbb{Z}^2 :$
$x = au + bv\}$

1°/ $I \neq \emptyset$ (voir $0, a, b \in I$)

$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ x - y \in I$?

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = au' + bv' \end{cases}$$

$$x - y = a\underbrace{(u-u')}_{\in\mathbb{Z}} + b\underbrace{(v-v')}_{\in\mathbb{Z}} \in I$$

$(I,+)$ sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

2°/ $\forall x \in I,\ \forall z \in \mathbb{Z},\ x.z \in I$?

$$(au+bv)z = a\underbrace{(uz)}_{\in\mathbb{Z}} + b\underbrace{(vz)}_{\in\mathbb{Z}} \in I$$

I est partie " multiplicativement permise " de $\mathbb{Z}$

I = idéal de $\mathbb{Z}$.

$I = (a) \boxed{+} (b)$

$\exists\, \delta > 0$ si et seulement si $I \neq \{0\}$

Or, $a \in I$ et $a \neq 0$

Donc $I \neq \{0\}$, donc $\delta > 0$ et $\boxed{I = \delta\mathbb{Z}}$

Extrait d'un cahier de cours de TC en 1975 : les idéaux de $\mathbb{Z}$ étaient au programme et le pgcd de deux entiers s'en déduisait.