Leçon 39 — Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension 3
Point de vue géométrique - Point de vue analytique
Applications

Auteur : Valérie Pichy

Introduction

L'origine et l'évolution de la géométrie sont liés aux exigences de la vie pratique. En effet,

- pour représenter les objets de l'espace on a en général recours à des configurations planes (avec des conventions).
- pour résoudre des problèmes de physique, il a fallu développer la géométrie vectorielle, ce qui a rendu la géométrie plus rigoureuse et a permis de démontrer.

Après qu'au XVII^e s. Fermat et Descartes aient introduit la géométrie analytique des coordonnées, au XIX^e s. Caley et Grassman ont introduit la notion de vecteur.

En s'inspirant de la mécanique (addition de force, de vitesse) Grassman a défini le produit extérieur (produit vectoriel) puis le produit scalaire (produit intérieur) à partir de l'aire du parallélogramme.

L'exposé est situé au niveau Tle, aussi certains résultats seront admis.

Pré-Requis.

- Espace affine / vectoriel euclidien orienté de dimension inférieure ou égale à 3 : Définition de l'orientation (Base orthonormale directe / indirecte) grâce à la règle du Bonhomme d'Ampère
- Angle orienté de 2 vecteurs, cosinus, sinus (dʼs 1 triangle rect angle - => signe cste ≥ 0)
- quelques connaissances sur les surfaces / solides usuels (aire, volume ..) produit scalaire pr les applications

Plan général : Produit vectoriel
- → Point de vue géométrique
- → Propriétés
- → expression analytique
- → Applications.

Conclusion :
grâce au produit vectoriel, les physico-mathématiciens (Maxwell, Gibbs, Heaviside) vont développer les outils principaux du calcul vectoriel dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

I Point de vue géométrique

Définition

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) est l'unique vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de l'espace, défini par :

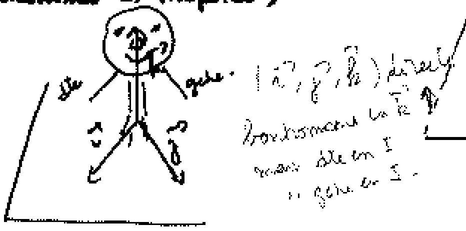
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = (\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \sin(\vec{u},\vec{v})).\vec{w}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

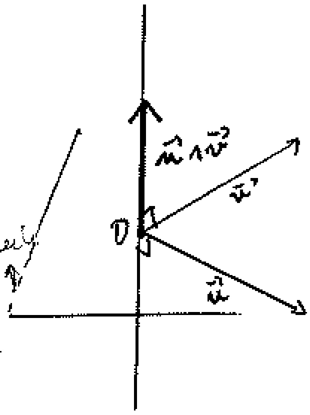
$\vec{w}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit directe

Rappel

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ directe

(Bonhomme d'Ampère)





$\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

↳ direction

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe

↳ sens

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$

↳ norme.

Remarque : • $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ est indépendant de l'orientation du plan $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

• $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ dépend de l'orientation du plan $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Exemple : La force magnétique qui s'exerce sur une particule de charge q, animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$; le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct

Convention : On suppose que le sinus est toujours positif.

$$\boxed{\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}}$$

II Propriétés

1. Orthogonalité

Thm 1 Etant donné des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

dem : definition => ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires => $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp (\vec{u}, \vec{v})$
et => sinon $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp (\vec{u}, \vec{v})$ —

2. Colinéarité.

Thm 2 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires <=> $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

dem =>) définition.

<=) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \neq$ c' produit de 3 réels non nuls

donc $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

3. Bases orthonormales

Thm 3

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires et si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
Alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale directe.

Preuve : orthogonaux, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

=> (II.1) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ st 2 à 2 orthogonaux.

→ $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2 \ (2\pi)$ => $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = 1$.

→ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 1$.

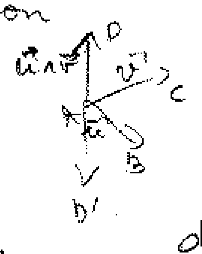
4. Antisymétrie.

thm 4 $\forall \vec{u}, \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$

- sinon



$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe.
$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{u})$ " "

donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{u})$ est indirecte.

donc leur orientations contraires.

$\vec{AD} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
$\vec{AD'} = \vec{v} \wedge \vec{u}$
D et D' sont de part et d'autre de (ABC) et comme AD = AD'
$\vec{AD} = -\vec{AD'}$

5. Bilinéarité ⚠ Les démonstrations sont admises.

Thm 5 $\forall\ \vec u, \vec v, \vec w$ vecteurs, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\vec u \wedge (\vec v + \vec w) = \vec u \wedge \vec v + \vec u \wedge \vec w$ et $(\vec u + \vec v) \wedge \vec w = \vec u \wedge \vec w + \vec v \wedge \vec w$
- $\vec u \wedge (\lambda \vec v) = \lambda (\vec u \wedge \vec v)$ et $(\lambda \vec u) \wedge \vec v = \lambda (\vec u \wedge \vec v)$.

Corollaire : Bilinéarité.

$\forall\ u, v, \vec w$ vecteurs, $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\vec u \wedge (\lambda \vec v + \mu \vec w) = \lambda\, \vec u \wedge \vec v + \mu\, \vec v \wedge \vec w.$$

$$\text{et } (\lambda \vec u + \mu \vec v) \wedge \vec w = \lambda\, \vec u \wedge \vec w + \mu\, \vec v \wedge \vec w.$$

III Expression analytique

Thm 6 : Soit $(\vec i, \vec j, \vec k)$ une base orthonormale directe.
Les coordonnées des vecteurs $\vec u, \vec v, \vec u \wedge \vec v$ dans cette base sont telles que :

si $\vec u\,(x, y, z)$ et $\vec v\,(x', y', z')$

alors $\vec u \wedge \vec v\ \ (yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx')$.

Preuve :

$$\vec u \wedge \vec v = (x\vec i + y\vec j + z\vec k) \wedge (x'\vec i + y'\vec j + z'\vec k).$$

$$= xy'\,(\overset{\vec k}{\vec i \wedge \vec j}) + xz'\,(\overset{-\vec j}{\vec i \wedge \vec k}) + yz'\,(\overset{\vec i}{\vec j \wedge \vec k}) + yx'\,(\overset{-\vec k}{\vec j \wedge \vec i})$$

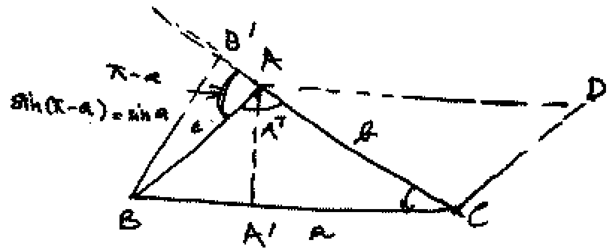
$$+ zx'\,(\underset{\vec j}{\vec k \wedge \vec i}) + zy'\,(\underset{-\vec i}{\vec k \wedge \vec j}).$$

$$= (yz' - zy')\vec i + (zx' - xz')\vec j + (xy' - yx')\vec k.$$

cqfd.

III Applications

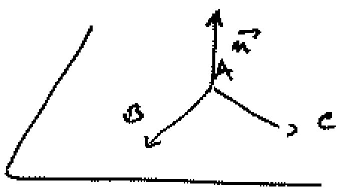
i) Aire du triangle et du parallélogramme



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$
$$= \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \sin \hat{A}$$
$$= \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

$$S_{ABCD} = 2 S_{ABC} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|.$$

ii) équation d'un plan (dont on connaît un point et un vecteur normal)



$\vec{n} = \dfrac{\vec{AB} \wedge \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|}$ est normal au plan ABC.

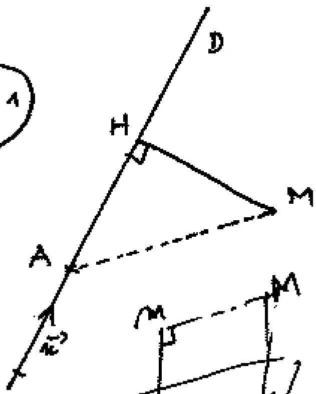
$M(x,y,z) \in (ABC) \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = \vec{0}.$

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$

produit mixte

iii) Distances

fig 1



* d'un point à une droite. fig 1

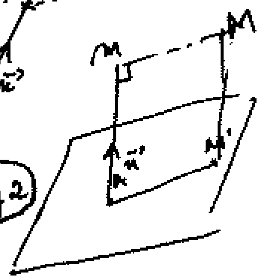
soit D une droite passant par A et M un point de l'espace.

$d(M,d) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur D

$$MH = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

$\vec{MA} = \vec{MH} + \vec{HA} \Rightarrow \vec{MA} \wedge \vec{u} = \vec{MH} \wedge \vec{u}$ car $\vec{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

fig 2



– d'un point à un plan. fig 2

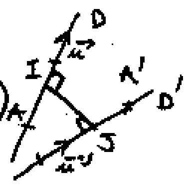
soit P un plan passant par A engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
M un point de l'espace

$$d(M,P) = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

$\exists\, t \,/\, \vec{Am} = t\vec{n}$
$M' / \vec{AM'} \cdot \vec{n} = \vec{0}$
$\vec{AM} = \vec{AM'} + t\vec{n}$
$\vec{AM} \cdot \vec{n} = t\|\vec{n}\|^2 \Rightarrow t = \dfrac{\vec{AM} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$

$\Rightarrow \vec{Am} = (\qquad) \vec{n}$

fig 3



→ perpendiculaire commune à deux droites

• distance d'une droite à une autre (fig 3)

$$d(D,D') = IJ = \frac{|\vec{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u'})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\|} = \min(d(M,N),\ M \in D,\ N \in D')$$

Th de Pythagore $M = I,\ N = J$ $\quad MN^2 = \|\vec{MI} + \vec{IJ} + \vec{JN}\|^2$

Chercher min MN où $MN^2 = \|\vec{MI}\|^2 + \|\vec{IJ}\|^2 + \|\vec{JN}\|^2 \iff$ poser $M = I$ et $N = J$