MégaMaths sur http ://perso.wanadoo.fr/megamaths/

L'épreuve d'exposé au CAPES Mathématiques
14 leçons rédigées et commentées
(Dany-Jack Mercier)

✠ **CE DOCUMENT** est extrait du **volume I** de la série **"L'épreuve d'exposé au CAPES Mathématiques, 14 leçons rédigées et commentées"**, paru aux éditions Publibook.
Il propose l'exposé-type d'une leçon, sans compléments ni approfondissements, et désire apporter une aide aux mégamathiens dans l'élaboration de leur leçon d'Oral 1.

✠ **LA COLLECTION :** Les objectifs de tous les livres de cette collection sont :

▶ **de proposer un exposé-type et une analyse détaillée pour chacune des leçons**, en explicitant toutes les démonstrations et en créant un environnement "self-contained" ;

▶ **au delà de la stricte préparation à l'oral, de préparer consciencieusement les épreuves écrites du concours**, chacun des thèmes abordés figurant ipso facto dans le programme officiel de l'écrit.

Ces objectifs expliquent que peu de leçons soient abordées dans un volume. Il s'agit d'un choix didactique. Les moyens concrets permettant d'atteindre ces objectifs consistent à :

▶ être suffisamment complet pour acquérir une vision globale de chaque thème, accumuler des munitions pour l'oral, et proposer une révision solide pour l'écrit ("faire d'une pierre deux coup") ;

▶ présenter chaque leçon suivant trois rubriques distinctes :

a) un **exposé-type**,

b) des **compléments** indispensables sur l'exposé-type et sur la leçon et la façon de l'envisager,

c) des **approfondissements** sur les notions abordées ou sur des notions proches, toujours dans l'esprit du concours.

Bon travail à tous ;)) *Dany-Jack Mercier*

Chapitre 2

Graphes

Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes orientés ou non

2.1 Exposé-type

Prérequis :

- Vocabulaire et résultats élémentaires concernant les graphes,
- Calcul de probabilités, en particulier formules des probabilités totales et des probabilités conditionnelles,
- Rudiments de calcul matriciel.

Mise en garde :

Déjà présents dans les programmes de BTS, les graphes ont été introduits en Lycée en 2002 dans les programmes de l'enseignement de spécialité de terminale ES. Le document d'accompagnement des programmes de cette classe précise clairement que tout le travail proposé doit être axé sur "la seule résolution de problèmes et aucunement sur un exposé magistral".

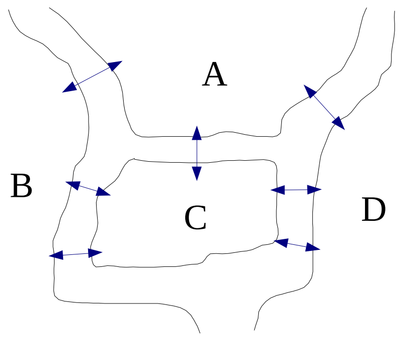
Cela explique le titre de la leçon. Nous allons poser et résoudre quelques problèmes en essayant de dégager à chaque fois les définitions et les outils nécessaires à leur traitement.

[0] Leçon d'oral n°2 de la session 2004 du CAPES externe.

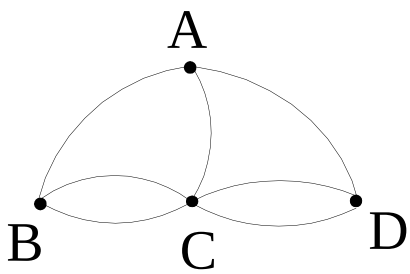
2.1.1 Visite de Königsberg

Problème 1 :

Le maintenant très classique **problème des 7 ponts de Königsberg**, posé au 18ème siècle, fut résolu par Leonhard Euler (1707-1783) en 1736.
La ville de Königsberg (actuellement Kaliningrad en Europe du nord-est, près de la mer Baltique) possèdait une île et 7 ponts comme dans le schéma ci-contre.



Le problème soulevé par les habitants était de trouver un itinéraire qui permette de circuler dans chacun des quartiers de la ville en empruntant chacun des ponts une fois et une seule.



On peut modéliser le problème en remplaçant les quartiers par des **points** (des **noeuds**, des **sommets**) et en symbolisant les ponts par des **chemins** (des **arêtes**) reliant ces points. On obtient un **graphe**.

Le problème historique de Königsberg ainsi qu'une multitude d'autres problèmes peuvent être modélisés en utilisant des points et des arêtes.

Pour modéliser cette situation, nous avons besoin de rappeler le vocabulaire élémentaire de la théorie des graphes. Nous dirons donc :

- qu'un **graphe** est la donnée de deux ensembles : un ensemble de points, appelés **sommets**, et un ensemble d'**arêtes** (que l'on représente par des segments qui joignent deux sommets donnés),

- que le **degré** d'un sommet est égal au nombre d'arêtes qui aboutissent à ce sommet,

- qu'on dispose de la notion (intuitive) de **chemin** (de **chaîne**) et de **chemin fermé**,

- qu'un graphe est **connexe** si deux de ses sommets sont toujours reliés par au moins une chaîne, et qu'une chaîne est **eulérienne** si elle contient une fois et une seule chacune des arêtes du graphe.

Le programme de terminale ES indique trois résultats élémentaires à traiter dans sa classe. Voici les deux premiers :

Lemme 1 ***(Lemme des poignées de mains)*** *La somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.*

Preuve : Une arête rencontre toujours 2 sommets, donc contribue à rajouter 2 à la somme totale des degrés. ■

Théorème 9 *Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il possède* 0 *ou* 2 *sommets de degrés impairs.*

Nous ne montrerons pas ce théorème (Section 2.2.1), et nous nous bornerons à signaler que :

- la suffisance de la condition se montre par récurrence,

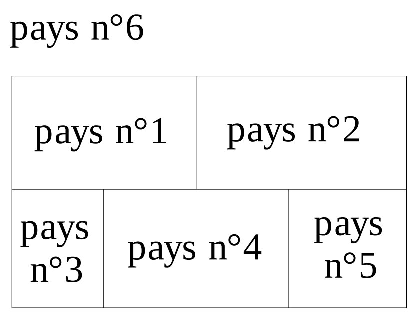
- la nécessité de la condition est facile : une chaîne eulérienne débute en un sommet D, aboutit à un autre sommet F, et traverse chacun des sommets S "intermédiaires" en augmentant son degré de 2. Par conséquent :

a) ou bien $D \neq F$, et il n'existe que 2 sommets de degrés impairs.

b) ou bien $D = F$, et tous les sommets sont de degrés pairs.

La nécessité de la condition, que nous venons de démontrer, suffit à résoudre le problème des septs ponts : les 4 sommets du graphe étant de degrés impairs, le problème de Königsberg n'admet pas de solution.

▶ Voici un exercice de "traversée de frontières" que l'on résout en cherchant une chaîne eulérienne : les rectangles ci-dessous symbolisent les frontières de 6 pays et l'on demande de trouver un itinéraire qui permette de visiter chacun de ces pays en traversant une et une seule fois chacune des frontières qui sépare deux quelconques d'entre eux (Solution à la Section 2.2.3).



2.1.2 Nombre de chaînes de longueur k d'extrémités i et j

Problème 2 : On considère à nouveau le graphe des 7 ponts de Königsberg (Problème 1). Combien existe-t-il de façons différentes de relier le quartier B

au quartier D de la ville en empruntant exactement 2 ponts ? Même question avec 10 ponts ?

Il s'agit de trouver le nombre de façons de relier B à D par une chaîne de longueur k. Si la réponse est évidente par simple lecture graphique lorsque $k = 2$ (on trouve 5 chemins possibles : 4 chemins si l'on transite par C, et un chemin supplémentaire si l'on transite par A), il en va tout différemment lorsque $k = 10$.

Notons $\mathcal{G}$ le graphe de Königsberg, et identifions les sommets A, B, C, D aux entiers 1, 2, 3, 4. Pour chaque couple (i, j) de sommets, calculons le nombre m_{ij} de chemins allant de i à j, et rassemblons les données sous la forme d'une matrice $M = (m_{ij})_{1\leq i\leq 4, 1\leq j\leq 4}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par définition, M est la **matrice du graphe** $\mathcal{G}$, et il est facile de vérifier que le (i, j)-ième coefficient de M^k ($k \in \mathbb{N}^*$) représente le nombre de chemins de longueur k reliant i à j (Théorème 13). Un calcul sur machine donne

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 73\,491 & 76\,610 & 110\,116 & 76\,610 \\ 76\,610 & 95\,381 & 102\,961 & 95\,381 \\ 110\,116 & 102\,961 & 174\,009 & 102\,961 \\ 76\,610 & 95\,381 & 102\,961 & 95\,381 \end{pmatrix},$$

de sorte qu'il existe exactement 95 381 itinéraires différents permettant d'aller de B à D en traversant exactement 10 ponts.

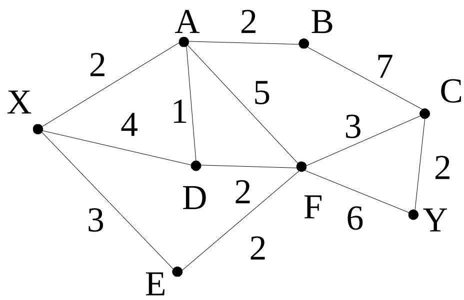
2.1.3 Chaîne de poids minimal : l'algorithme de Dijkstra

Définition 4 *Le nombre d'arêtes d'une chaîne constitue sa* ***longueur****. La* ***distance*** *entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne d'extrémités ces sommets. Le* ***diamètre*** *d'un graphe est la plus grande distance entre deux de ses sommets.*

Définition 5 *Un* ***graphe pondéré*** *est un graphe dont chacune des arêtes est associée à un réel appelé* ***poids****. Le* ***poids d'une chaîne*** *est la somme des poids des arêtes qui la composent.*

Les graphes pondérés sont utilisés dans la vie courante : on peut signaler un temps de parcours ou une distance en km entre deux villes si l'on utilise une carte routière, on peut préciser le prix à payer entre deux sorties d'autoroutes, ou encore représenter un cablage informatique et représenter la quantité d'information maximum susceptible de circuler sur chacun des câbles...

Problème 3 : Dans le graphe ci-dessous, les nombres attachés aux arêtes représentent des temps de parcours en nanosecondes dans un cablage informatique. Trouver un plus court chemin d'extrémités X et Y.



Nous utilisons l'algorithme de l'informaticien hollandais Edsger Dijkstra (décrit dans [2]).
Cet algorithme, qui fournit une chaîne de poids minimal liant deux sommets donnés, consiste à attribuer des poids provisoires ou définitifs à chacun des sommets, à expliquer comment les poids provisoires deviennent définitifs, puis à s'arrêter lorsque le sommet Y est affecté d'un poids définitif. Le voici :

★ Attribuer le poids définitif 0 à X,

★ Attribuer le poids provisoire $+\infty$ à chacun des sommets restants.

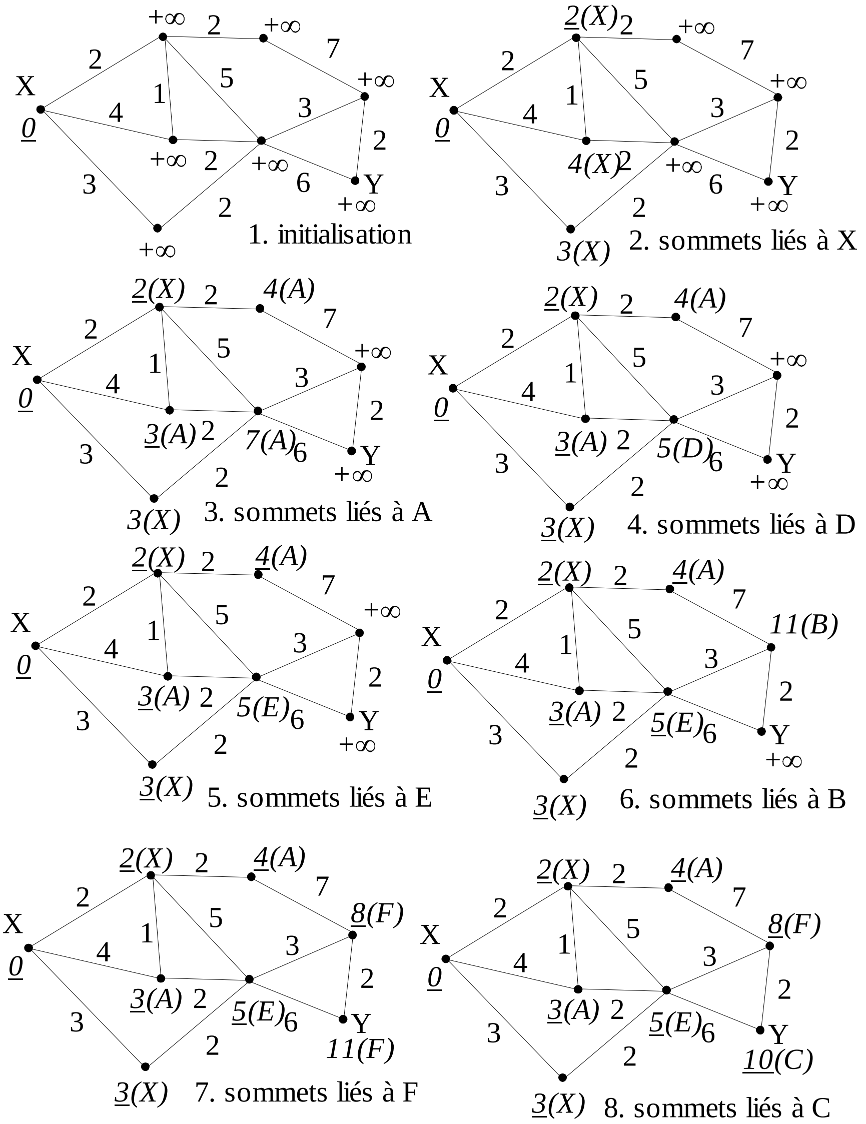
★ Tant que Y n'a pas de poids définitif, faire :

- Noter T le dernier sommet affecté d'un poids définitif,

- Pour tout sommet T' adjacent à T et dont le poids est provisoire, calculer la somme s du poids de T et du poids de l'arête d'extrémités T et T'. Si s est inférieur au poids provisoire de T', s devient le nouveau poids provisoire de T' (on le marque "au crayon papier" près de T' et l'on indique aussi "la provenance" entre parenthèses)

- Parmi tous les sommets affectés de poids provisoires, en choisir un de poids minimum, puis lui attribuer ce poids comme poids définitif.

En conclusion : la chaîne $XEFCY$ relie X à Y, son poids est minimum et égal à 10. On remarque que $XADFCY$ est une autre chaîne de poids minimum 10 reliant X à Y (non donnée par l'algorithme).



2.1.4 Coloriage et nombre chromatique

Définition 6 ***Colorier*** *un graphe, c'est associer une couleur à chacun de ses sommets de façon que deux sommets liés par une arête n'aient jamais la même couleur. Le* **nombre chromatique** *d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorier.*

Un **graphe complet** (c'est-à-dire tel que deux sommets quelconques du graphe soient toujours reliés par une arête) d'ordre n nécessite n couleurs pour être colorié. Par conséquent, si un graphe $\mathcal{G}$ contient un sous-graphe complet d'ordre d, son nombre chromatique est supérieur ou égal à d.

Problème 4 : Colorier le graphe du Problème 3, puis trouver son nombre chromatique.

On utilise l'algorithme des informaticiens américains Welsh et Powell. Il consiste à :

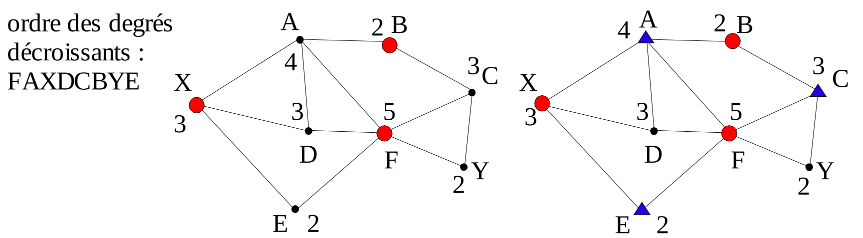
★ Classer les sommets dans une liste suivant l'ordre des degrés décroissants (ici : FAXDCBYE),

★ Tant que tous les sommets ne sont pas coloriés, faire :

- Choisir une nouvelle couleur, dite "couleur courante",

- Choisir le premier sommet non colorié de la liste (à partir de la gauche), et le colorier avec la couleur courante,

- Colorier avec la couleur courante, et en respectant leur ordre dans la liste, tous les sommets non coloriés non adjacents au dernier sommet colorié et non adjacents entre eux.



1. F colorié en rouge, puis X et B

2. A colorié en bleu, puis C et E

On utilise 3 couleurs, et l'on ne peut pas faire mieux puisque le graphe proposé contient un sous-graphe complet XAD d'ordre 3 qui nécessite l'emploi d'au moins 3 couleurs.

▶ On peut utiliser cet algorithme pour colorier des pays sur une "carte de géographie politique" : un pays représente un sommet du graphe, et une frontière est symbolisée par une arête.

▶ Colorier un graphe permet d'optimiser certaines situations (par exemple organiser une session d'examen en un minimum de demi-journées suivant les options suivies par les étudiants, voir Exercice 4 de la Section 2.3.5).

▶ Le nombre de couleurs nécessaires pour colorier un graphe à l'aide de l'algorithme de Welsh et Powell n'est pas minimal, mais on peut énoncer :

Théorème 10 *Le nombre chromatique d'un graphe est toujours inférieur ou égal à $\Delta + 1$, où Δ désigne le degré maximal de ses sommets.*

Preuve : Colorions le graphe à l'aide de l'algorithme de Welsh et Powell, et supposons que celui-ci utilise s couleurs. Le dernier sommet colorié est nécessairement adjacent à $s - 1$ sommets déjà coloriés précédemment avec les couleurs précédentes (sinon il aurait déjà été colorié avec une autre couleur), donc son degré est $d \geq s - 1$. Ainsi $\Delta \geq d \geq s - 1$, autrement dit $s \leq \Delta + 1$. ■

2.1.5 Graphes probabilistes

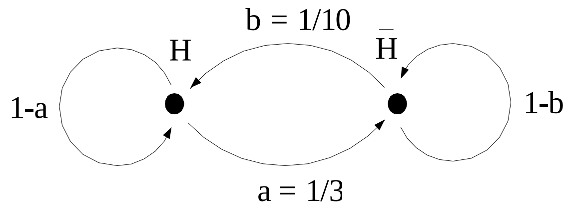
Définition 7 *Un **graphe orienté** est un graphe dont chacune des arêtes est orientée.*

Définition 8 *Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté, pondéré par des nombres réels positifs, tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet vaut 1.*

Définition 9 *La **matrice de transition** d'un graphe probabiliste d'ordre n dont les sommets sont notés de 1 à n, est la matrice $M = (m_{ij})$ dont le coefficient m_{ij} situé à la i-ième ligne et j-ième colonne est égal au poids de l'arête allant de i vers j.*

Problème 5 (Problème du manoir hanté) : Dans 30 minutes exactement, le malheureux propriétaire d'un manoir hanté recevra des acheteurs potentiels venus visiter sa propriété. Toutes les 10 minutes, le fantôme du château apparaît ou disparaît. Si le fantôme hante déjà le château, il a une chance sur 3 de disparaître pendant les 10 minutes qui suivent. Si le fantôme ne hante pas le château, il a une chance sur 10 d'apparaître les 10 minutes suivantes. Le propriétaire vient à peine d'entendre le fantôme agiter des chaînes dans les escaliers. Quelle est la probabilité pour que le fantôme accueille les visiteurs ? Avec quelle probabilité peut-on prévoir les apparitions du fantôme dans un futur lointain ?

On étudie un système qui ne peut prendre que deux états : l'état H où "le fantôme hante le manoir", ou bien l'état $\overline{H}$ où "le fantôme ne hante pas le manoir". Cet état est le même pendant 10 min et change à l'issue de ces 10 min. Le système peut être représenté par le graphe orienté pondéré suivant :



La matrice de transition de ce graphe est (si l'on énumère les sommets dans l'ordre : H, $\overline{H}$) :

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Notons :

- H_n l'événement : "le fantôme hante le manoir pendant la n-ième tranche de 10 min",

- $\overline{H}_n$ l'événement : "le fantôme ne hante pas le manoir pendant la n-ième tranche de 10 min",

- $p_n = p(H_n)$ la probabilité de l'événement H_n,

- $q_n = p\left(\overline{H}_n\right) = 1 - p_n$ la probabilité de l'événement $\overline{H}_n$.

Le Théorème des probabilités totales et la formule des probabilités conditionnelles nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = p(H_{n+1}) &= p(H_{n+1} \cap H_n) + p\left(H_{n+1} \cap \overline{H}_n\right) \\ &= p(H_{n+1}/H_n)\, p(H_n) + p\left(H_{n+1}/\overline{H}_n\right) p\left(\overline{H}_n\right) \\ &= (1-a)\, p_n + bq_n. \end{aligned}$$

De la même façon, $q_{n+1} = ap_n + (1-b)\, q_n$, et l'on peut résumer ces égalités à l'aide de l'unique égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

La matrice de transition M, qui mérite bien son nom, formalise le passage entre le n-ième et le $(n+1)$-ième état du système. Pour tout n,

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \end{pmatrix} M^{n-1}.$$

Le couple $(p_1, q_1) = (1, 0)$ décrit l'état initial du système, et la probabilité cherchée est p_4. On calcule donc

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}, \quad \text{puis } M^3 \simeq \begin{pmatrix} 0,37 & 0,63 \\ 0,19 & 0,81 \end{pmatrix},$$

et l'on obtient $(p_4\ q_4) = (1\ 0)M^3 = (0,37\ 0,63)$. En conclusion $p_4 \simeq 0,37$, et les visiteurs auront à peu près 4 chances sur 10 d'être accueillis par le fantôme. Pour répondre à la seconde question, il faut étudier le comportement de la suite (p_n) à l'infini. Puisque $q_n = 1 - p_n$,

$$p_{n+1} = (1-a)\, p_n + bq_n = (1-a-b)\, p_n + b.$$

Si la suite (p_n) tend vers une limite l lorsque n tend vers $+\infty$, cette limite vérifie $l = (1-a-b)\,l + b$ d'où $l = b/(a+b)$. Il suffit de soustraire membre à membre les égalités

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-a-b)\,p_n + b \\ l = (1-a-b)\,l + b \end{cases}$$

pour obtenir $p_{n+1} - l = (1-a-b)\,(p_n - l)$. La suite $(p_n - l)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi une suite géométrique de raison $1-a-b$ et $p_n - l = (1-a-b)^{n-1}(p_1 - l)$. Sous l'hypothèse raisonnable $(a,b) \notin \{(0,0),(1,1)\}$ où le système n'est pas prévisible à la n-ième étape, on obtient $|1-a-b| < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = l = \frac{b}{a+b}.$$

La réponse à notre problème du manoir est donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{10}} = \frac{3}{13} \simeq 0,23.$$

Si n est assez grand, la probabilité de voir apparaître le fantôme à la n-ième étape se rapproche de 23% (soit environ une chance sur 5).

De façon plus générale, on a montré :

Théorème 11 *Un système évolutif à deux états H et $\overline{H}$, dont la matrice de transition*

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

ne comporte pas de 0, se rapproche d'un état stable indépendant de l'état initial, dont la distribution de probabilité entre H et $\overline{H}$ est $(b/(a+b), a/(a+b))$. Autrement dit (et avec les notations précédentes) :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(p(H_n), p\left(\overline{H}_n\right)\right) = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right).$$

2.2 Compléments

2.2.1 Les graphes

Nous complétons ici certaines définitions données un peu rapidement dans l'exposé-type, et en profitons pour démontrer la CNS d'existence de chaînes eulériennes.