L'épreuve d'exposé au CAPES Mathématiques
14 leçons rédigées et commentées
(Dany-Jack Mercier)

✠ **CE DOCUMENT** est extrait du **volume I** de la série **"L'épreuve d'exposé au CAPES Mathématiques, 14 leçons rédigées et commentées"**, paru aux éditions Publibook.
Il propose l'exposé-type d'une leçon, sans compléments ni approfondissements, et désire apporter une aide aux mégamathiens dans l'élaboration de leur leçon d'Oral 1.

✠ **LE CONTRAT :** Proposé en libre téléchargement sur MégaMaths, ce document est extrait d'un livre déjà commercialisé, et ce partage via internet est un pari. Pour continuer l'aventure, je vous demande de respecter le contrat suivant.

Vous pouvez :

▶ conserver ce fichier pour votre usage personnel,

▶ imprimer ce fichier pour votre usage personnel (si le document l'autorise),

▶ le travailler et vous entraîner,

▶ le proposer sans le modifier à des personnes de votre cercle restreint de connaissances,

▶ me faire part de vos remarques (dany-jack.mercier@univ-ag.fr).

Vous ne devez pas :

▶ proposer ce fichier en téléchargement sur un autre site internet ou intranet,

▶ distribuer le contenu de quelque manière que ce soit, ou l'utiliser pour un usage commercial.

✠ **LA COLLECTION :** Les objectifs de tous les livres de cette collection sont :

▶ **de proposer un exposé-type et une analyse détaillée pour chacune des leçons**, en explicitant toutes les démonstrations et en créant un environnement "self-contained" ;

▶ **au delà de la stricte préparation à l'oral, de préparer consciencieusement les épreuves écrites du concours**, chacun des thèmes abordés figurant ipso facto dans le programme officiel de l'écrit.

Ces objectifs expliquent que peu de leçons soient abordées dans un volume. Il s'agit d'un choix didactique. Les moyens concrets permettant d'atteindre ces objectifs consistent à :

▶ être suffisamment complet pour acquérir une vision globale de chaque thème, accumuler des munitions pour l'oral, et proposer une révision solide pour l'écrit ("faire d'une pierre deux coup") ;

▶ présenter chaque leçon suivant trois rubriques distinctes :

a) un **exposé-type**,

b) des **compléments** indispensables sur l'exposé-type et sur la leçon et la façon de l'envisager,

c) des **approfondissements** sur les notions abordées ou sur des notions proches, toujours dans l'esprit du concours.

Bon travail à tous ;)) *Dany-Jack Mercier*

Chapitre 7

Equation d'une droite

Equation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes

7.1 Exposé-type

Extrait du livre **"L'épreuve d'exposé au CAPES Mathématiques, 14 leçons rédigées et commentées, vol. I"** de Dany-Jack Mercier, paru aux éditions Publibook en 2004.

A télécharger sur MégaMaths. S'il vous plaît, respectez les termes du contrat :)

Prérequis et notations :

- On se place dans un plan affine P rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel associé à P. La notation $M(x, y)$ signifie que les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$ sont (x, y). La notation $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ signifie que (α, β) sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
- Calcul vectoriel, condition de colinéarité de deux vecteurs.
- Définition d'une droite : la droite D passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ (non nul) est, par définition, l'ensemble

$$D = \left\{ M \in P \,/\, \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} \right\}.$$

Avec cette définition, on obtient tout de suite des **équations paramétriques** de D :

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta. \end{cases}$$

7.1.1 Equation cartésienne d'une droite

Théorème 46 *Soit D une droite. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$) tel que*

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow ax + by + c = 0. \quad (*)$$

[0]Leçon d'oral n°25 de la session 2004 du CAPES externe.

Réciproquement, si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *(avec* $(a, b) \neq (0, 0)$*), l'ensemble*

$$D = \{M\,(x, y) \in P \,/\, ax + by + c = 0\}$$

est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(-b, a)$*.*

Preuve : Si D est une droite passant par $A\,(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta)$,

$$\begin{aligned} M\,(x, y) \in D \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u} \text{ colinéaires}) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0, \end{aligned}$$

et cette dernière équation est bien de la forme $(*)$.
Réciproquement, si $D = \{M\,(x, y) \in P \,/\, ax + by + c = 0\}$, il est facile de voir que D n'est pas vide : si $a \neq 0$, le point $M_0\,(-c/a, 0)$ appartient à D, si $b \neq 0$, le point $M_0(0, -c/b)$ appartient à D. Soit $M_0\,(x_0, y_0)$ un point de D. On a

$$\begin{aligned} M \in D \quad &\Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + c = ax_0 + by_0 + c \\ &\Leftrightarrow \quad a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u}) \text{ lié} \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{u}\,(-b, a)$. ■

Définition 30 *On dit que* $(*)$ *est* ***une équation cartésienne*** *de la droite* D*.*

▶ Quel intérêt y-a-t'il à introduire des équations cartésiennes de droites ?

- Une telle équation exprime une condition simple sur les coordonnées d'un point pour que celui-ci appartienne ou non à une droite. Ce test d'appartenance à une droite se fait sans avoir à rechercher un paramètre (comme dans les équations paramétriques).

- Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ s'écrit sous la forme $y = px + q$, appelée **équation réduite** de D. Cette équation réduite est unique et permet de tracer rapidement n'importe quelle droite non parallèle à l'axe des y en utilisant la **pente** p et l'**ordonnée à l'origine** q.

▶ On aurait pu démontrer le Théorème 46 sans utiliser la caractérisation de colinéarité de deux vecteurs en terme de déterminant, mais simplement en éliminant le paramètre λ d'entre des équations paramétriques de D (Section 7.2.1).

▶ L'équation d'une droite n'est pas unique puisqu'il suffit de la multiplier par un réel non nul pour obtenir une autre équation de la même droite. Ainsi $3x + y + 1 = 0$ représente la même droite que $15x + 5y + 5 = 0$. Le résultat suivant montre cependant que l'unicité de l'équation cartésienne d'une droite est acquise "à un coefficient multiplicatif non nul près".

Théorème 47 *Deux équations* $ax+by+c = 0$ *et* $a'x+b'y+c' = 0$ *représentent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles, autrement dit s'il existe un réel* k *tel que* $(a', b', c') = k\,(a, b, c)$*. Cela équivaut à la nullité des trois déterminants*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = 0.$$

Preuve : La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Si $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ représentent la même droite D, les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(-b, a)$ et $\overrightarrow{u'}\,(-b', a')$ dirigent D, donc sont colinéaires. Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $(a', b') = k\,(a, b)$. Si par exemple $b \neq 0$, le point $(0, -c/b)$ appartient à D, par conséquent $a'.0 + b'(-c/b) + c' = 0$, donc $c' = kc$. Finalement $(a', b', c') = k\,(a, b, c)$. ■

[La nullité de deux déterminants ne suffit pas à assurer la proportionnalité des suites (a', b', c') *et* (a, b, c)*. Par exemple, les suites* $(0, 1, 1)$ *et* $(0, 1, -1)$ *ne sont pas proportionnelles bien que deux des déterminants écrits en les utilisant soient nuls.]*

7.1.2 Intersection et parallélisme

Nous avons besoin des définitions suivantes :

Définition 31 *Des droites sont dites* ***concourantes (ou sécantes) au sens large*** *(resp.* ***au sens strict)*** *si elles passent toutes par au moins un même point (resp. si leur intersection est un singleton). Des droites sont dites* ***concourantes (ou sécantes)*** *si elles sont concourantes au sens large.*

Définition 32 *Deux droites* D *et* D' *du plan sont* ***parallèles*** *si elles sont égales ou d'intersection vide.*

Etudier l'intersection de deux droites

$$D : ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad D' : a'x + b'y + c' = 0$$

du plan revient à résoudre le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Supposons par exemple $a \neq 0$ (le cas $b \neq 0$ conduirait aux mêmes conclusions), et résolvons ce système par la méthode du pivot de Gauss. On a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (b' - \frac{a'}{a}b)y + c' - \frac{a'}{a}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (ab' - a'b)\,y = a'c - ac', \end{cases}$$

d'où la discussion :

• Si $ab' - a'b \neq 0$, le système (S) admet un unique couple solution, et les deux droites se coupent en un seul point.

• Si $ab' - a'b = 0$, (S) équivaut à

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'c - ac' = 0. \end{cases}$$

$\star$ Si $a'c - ac' = 0$, (S) admet une infinité de solutions : tous les points vérifiant $ax + by + c = 0$. Les conditions $ab' - a'b = a'c - ac' = 0$ alliées à l'hypothèse $a \neq 0$ montrent que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui traduit la proportionnalité des suites (a, b, c) et (a', b', c'). Dans ce cas $D = D'$ (Théorème 47).

$\star$ Si $a'c - ac' \neq 0$, (S) n'admet pas de solution.

Cette étude nous permet d'énoncer le Théorème fondamental :

Théorème 48 *Deux droites $D : ax + by + c = 0$ et $D' : a'x + b'y + c' = 0$ sont*
1) concourantes au sens strict si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$,
2) parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$ (autrement dit si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires),
3) égales si et seulement si $ab' - a'b = bc' - b'c = ca' - c'a = 0$ (autrement dit si les suites de coefficients (a', b', c') et (a, b, c) sont proportionnelles).

Preuve : L'étude précédente montre que ces conditions sont suffisantes. On vérifie maintenant qu'elles sont nécessaires :

- Si D et D' sont concourantes au sens strict, l'étude précédente montre que l'on ne peut pas avoir $ab' - a'b = 0$.

- Si D et D' sont parallèles, leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\,(-b, a)$ et $\overrightarrow{u'}\,(-b', a')$ sont colinéaires, donc $ab' - a'b = 0$.

- Si D et D' sont égales, le Théorème 47 montre que les suites (a,b,c) et (a',b',c') sont proportionnelles, et cela se traduit par la nullité de trois déterminants $ab'-a'b = bc'-b'c = ca'-c'a = 0$. ■

▶ Si l'on continue les calculs entrepris au début de notre étude, on obtient que, lorsque $ab'-a'b \neq 0$, l'unique solution (x,y) du système (S) est donnée par les **formules de Cramer** :

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}$$

où $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé "**déterminant du système** (S)".

7.1.3 Condition pour que trois droites soient concourantes

▶ **Recherche d'une condition**

Considérons trois droites

$$\begin{array}{ll} D : & ax+by+c=0, \\ D' : & a'x+b'y+c'=0, \\ D'' : & a''x+b''y+c''=0. \end{array}$$

Faisons une première remarque :

(P1) : Les trois droites D, D' et D'' sont concourantes au sens strict si et seulement si deux d'entre elles sont concourantes au sens strict en un point A et si la troisième passe par A.

Cette remarque nous permet d'envisager trois cas, et dans chacun de ces cas, de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues, puis d'écrire la condition de compatibilité. En nous plaçant, par exemple, dans le cas où $D \cap D' = \{A\}$ et $A \in D''$, on obtient :

$$\exists A \left\{ \begin{array}{l} D \cap D' = \{A\} \\ A \in D'' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \\ a'' \dfrac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} + b'' \dfrac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} + c'' = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \\ a'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire :

$$\textbf{(P2)}: \quad \exists A \left\{ \begin{array}{l} D \cap D' = \{A\} \\ A \in D'' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{array} \right.$$

où

$$\Delta = ab'c'' + a''bc' + a'b''c - a''b'c - ab''c' - a'bc'' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

représente un déterminant 3×3. **(P1)** et **(P2)** entraînent immédiatement :

Théorème 49 *Les trois droites*

$$\begin{array}{ll} D: & ax + by + c = 0 \\ D': & a'x + b'y + c' = 0 \\ D'': & a''x + b''y + c'' = 0 \end{array}$$

sont concourantes au sens strict si et seulement si $\Delta = 0$ *et l'un au moins des déterminants* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$ *n'est pas nul (ce qui revient à dire que les suites* (a, a', a'') *et* (b, b', b'') *ne sont pas proportionnelles).*

On déduit immédiatement une condition nécessaire et suffisante pour que trois droites du plan soient concourantes ou parallèles :

Corollaire 1 *Avec les notations du Théorème précédent, les trois droites* D*,* D'*,* D'' *sont concourantes ou parallèles si et seulement si* $\Delta = 0$*.*

Preuve : Si D, D', D'' sont concourantes au sens strict, le Théorème 49 montre que $\Delta = 0$. Si D, D', D'' sont parallèles,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

et $\Delta = 0$ en développant suivant la troisième colonne. Réciproquement, si $\Delta = 0$, ou bien $(*)$ a lieu et les trois droites sont parallèles, ou bien l'un des trois déterminants intervenant dans $(*)$ n'est pas nul, et les trois droites sont concourantes au sens strict d'après le Théorème 49. ■