TD 2009-10 :

100 h de préparation au CAPES externe en algèbre, géométrie & arithmétique

Dany-Jack Mercier

Table des matières

Introduction **7**

1 TD n°1 : Barycentres **11**
1.1 Présentation . . . 11
1.2 Enoncés . . . 12
1.3 Solutions . . . 13

2 TD n°2 : Test Initial de Positionnement **19**
2.1 Présentation . . . 19
2.2 Enoncés . . . 19
2.3 Solutions . . . 20

3 TD n°3 : Bissectrices I **25**
3.1 Présentation . . . 25
3.2 Enoncés . . . 25
3.3 Solutions . . . 26

4 TD n°4 : Triangles rectangles **35**
4.1 Présentation . . . 35
4.2 Enoncés . . . 35
4.3 Solutions . . . 36

5 TD n°5 : Groupes **43**
5.1 Présentation . . . 43
5.2 Enoncés . . . 43
5.3 Solutions . . . 44

6 TD n°6 : Cocyclicité **51**
6.1 Présentation . . . 51
6.2 Enoncés . . . 53
6.3 Solutions . . . 54

7 TD n°7 : Divisibilité dans un anneau principal **63**
7.1 Présentation . . . 63
7.2 Enoncés . . . 63
7.3 Solutions . . . 64

8 TD n°8 : Hyperplans vectoriels **69**
8.1 Présentation . . . 69
8.2 Enoncés . . . 69

8.3 Solutions . . . 70

9 TD n°9 : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ 75
9.1 Présentation . . . 75
9.2 Enoncés . . . 75
9.3 Solutions . . . 76

10 TD n°10 : Formes bilinéaires symétriques 81
10.1 Présentation . . . 81
10.2 Enoncés . . . 81
10.3 Solutions . . . 82

11 TD n°11 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 91
11.1 Présentation . . . 91
11.2 Enoncés . . . 91
11.3 Solutions . . . 92

12 TD n°12 : Espaces vectoriels euclidiens 99
12.1 Présentation . . . 99
12.2 Enoncés . . . 99
12.3 Solutions . . . 100

13 TD n°13 : Applications orthogonales 107
13.1 Présentation . . . 107
13.2 Enoncés . . . 107
13.3 Solutions . . . 108

14 TD n°14 : Isométrie — Minimum vital 115
14.1 Présentation . . . 115
14.2 Enoncés . . . 115
14.3 Solutions . . . 116

15 TD n°15 : Equation de Pythagore 125
15.1 Présentation . . . 125
15.2 Enoncé du problème . . . 126
15.3 Solution du problème . . . 126

16 TD n°16 : Coniques I 131
16.1 Présentation . . . 131
16.2 Enoncés . . . 131
16.3 Solutions . . . 132

17 TD n°17 : Trajectoire de lumière dans une ellipse 139
17.1 Présentation . . . 139
17.2 Enoncé du problème . . . 140
17.3 Solution du problème . . . 143

18 TD n°18 : Coniques II 153
18.1 Présentation . . . 153
18.2 Enoncés . . . 153
18.3 Solutions . . . 154

19 TD n°19 : Matrices **165**
19.1 Présentation . . . 165
19.2 Enoncé du problème . . . 165
19.3 Solution du problème . . . 166

20 TD n°20 : Interrogation Orale de Cours **171**
20.1 Présentation . . . 171
20.2 Enoncés . . . 171
20.3 Solutions . . . 172

21 TD n°21 : Similitudes **179**
21.1 Présentation . . . 179
21.2 Enoncés . . . 179
21.3 Solutions . . . 180

22 TD n°22 : Pseudo-premiers forts **187**
22.1 Présentation . . . 187
22.2 Enoncé du problème . . . 187
22.3 Solution du problème . . . 188

23 TD n°23 : Algèbre linéaire et bilinéaire **193**
23.1 Présentation . . . 193
23.2 Enoncés . . . 193
23.3 Solutions . . . 194

24 TD n°24 : Problèmes de distances **199**
24.1 Présentation . . . 199
24.2 Enoncé du problème . . . 199
24.3 Solution du problème . . . 202

25 TD n°25 : Dénombrement **215**
25.1 Présentation . . . 215
25.2 Enoncés . . . 215
25.3 Solutions . . . 216

26 TD n°26 : Formes bilinéaires symétriques **223**
26.1 Présentation . . . 223
26.2 Enoncé du problème . . . 223
26.3 Solution du problème . . . 224

27 TD n°27 : Groupe du tétraèdre régulier **227**
27.1 Présentation . . . 227
27.2 Enoncé du problème . . . 227
27.3 Solution du problème . . . 228

28 TD n°28 : Carrés modulo m **235**
28.1 Présentation . . . 235
28.2 Enoncé du problème . . . 235
28.3 Solutions . . . 237

29 TD n°29 : Polynôme minimal d'une suite récurrente **241**
29.1 Présentation 241
29.2 Enoncé du problème 241
29.3 Solution du problème 242

30 TD n°30 : Théorie du signal fini **249**
30.1 Présentation 249
30.2 Enoncé du problème 249
30.3 Solution du problème 251

31 TD n°31 : Nombres complexes et géométrie **261**
31.1 Présentation 261
31.2 Enoncés 262
31.3 Solutions 263

32 TD n°32 : Arithmétique **269**
32.1 Présentation 269
32.2 Enoncés 269
32.3 Solutions 270

33 Bonus : Examen du 17 octobre 2009 **275**
33.1 Enoncé 275
33.2 Solutions 276

Introduction

Voici dans leur intégralité tous les Travaux Dirigés de préparation au CAPES externe que j'ai proposés à mes étudiants de l'IUFM de Guadeloupe du 1$^{\text{er}}$ septembre 2009 au 24 février 2011. Ces TD correspondent à 100 heures de préparation en salle, auxquelles il faut ajouter 30 heures de cours en géométrie, passées à acquérir les connaissances regroupées dans les "Fondamentaux de géométrie" [13].

Ces TD sont présentés ici avec une courte introduction qui figurait sur la page web où je les plaçais consciencieusement pour proposer des solutions bien rédigées après notre travail en "présentiel". J'ai laissé ces "présentations" telles quelles pour conserver la fraîcheur des propos...

L'année 2009-10 de préparation au CAPES est la dernière que nous connaissons sous cette forme particulière d'année spécifique de préparation aux concours. C'est aussi l'année où, pour la première fois, j'axe les efforts de notre groupe autour de l'acquisition des fondamentaux. J'ose me permettre de construire la plus grande partie de ces TD en utilisant des "petites questions" ciblées pour travailler les fondamentaux, le but n'étant pas seulement de parcourir un thème, puis de s'entraîner sur des problèmes pour se mettre en situation, mais de revenir suffisamment précisément sur des connaissances de base avec suffisamment de temps et d'énergie pour se les approprier.

Ce n'est que vers la fin de la préparation que j'ai alterné ces TD d'acquisition des fondamentaux avec d'autres TD sur des problèmes courts ou des extraits choisis d'annales.

Cette façon de faire doit permettre, selon moi, d'acquérir des connaissances solides qui seront utiles pour les écrits des concours, mais aussi pour les oraux et plus particulièrement pour obtenir suffisamment de confiance en soi et de souplesse pour répondre aux examinateurs pendant l'entretien qui suit un exposé à l'oral. L'idée maîtresse est alors d'envisager simultanément la préparation de l'écrit ET de l'oral du concours en utilisant des questions courtes provenant :

- de questions effectivement posées aux oraux par les examinateurs,
- d'extraits de problèmes de concours,
- de questions du cours,
- de questions de "mise en oeuvre du cours".

Pour être bref, je désire me concentrer sur les questions qui font mal.

Evidemment, j'ai utilisé ce travail en salle pour préparer des questions-réponses et les regrouper, dans une forme qui se voudra achevée, dans un des livres de la collection "Acquisition des fondamentaux pour les concours". On pourra trouver une description de ce projet dans l'introduction du volume IV qui est déjà sorti [18].

Evidemment, la préparation complète au CAPES passe aussi par des entraînements sur des exercices et des problèmes d'annales récentes, et aussi par l'étude des thèmes que l'on aura à présenter aux oraux. Chacun y investira autant qu'il le peut.

Je terminerai cette introduction en remerciant mes étudiants et tous ceux qui, à travers l'interface du site MégaMaths, m'ont permis de me poser les "bonnes" questions et de travailler de la "bonne" manière. A tous : bonne lecture et bon entraînement !

Dany-Jack Mercier, le 10 mai 2010

[0] [tiufm10 v1.00] Merci à Nadine Rombaldi pour son tableau "Venezia" reproduit sur la couverture, et à Jack Robart pour ses subtils dessins à l'encre et ses aquarelles. Une bouffée d'oxygène dans un océan d'abstraction !

Voici un petit texte sur la stratégie générale de préparation. J'ai profité d'un mél reçu en mai 2010, donc en pleine préparation aux oraux du CAPES externe, pour dégager quelques pistes de préparation au concours.

De l'utilité avérée de commencer très tôt sa préparation à l'oral et de travailler avec un ensemble de "leçons toutes faites"

► Je viens de recevoir un message d'une mégamathienne qui arrive à la fin de sa préparation à l'oral. Il ne lui reste plus que trois leçons à préparer, puis elle me dit qu'il ne lui restera plus qu'à passer à la *mémorisation systématique de ses plans.*

Elle précise qu'elle a heureusement appris récemment qu'elle était admissible, puis me pose une petite question au sujet d'une leçon du volume III de "L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques", une leçon qu'elle a travaillée sur ce livre et dont elle a tiré un "plan personnel".

Voilà quelqu'un qui a adopté une bonne incidence !

► Selon moi, elle a fait deux choix excellents :

a) Elle a préparé l'oral très tôt, sans attendre les résultats de l'admissibilité.

b) Elle a utilisé des livres de leçons "toutes faites" et suffisamment explicitées pour construire ses propres plans de leçons.

En 2010, il y avait 81 leçons à préparer pour l'oral 1, on est donc devant un travail de Titan. Pour avancer aussi vite que possible sur ces leçons et comprendre tout ce qu'il y a à comprendre dans un temps record, pour faire des progrès réels en emmagasinant de nouvelles connaissances, la meilleure façon est d'utiliser des livres de leçons toutes faites, des ouvrages de cours bien expliqués, des manuels du secondaire, ou encore des leçons bien construites et suffisamment détaillées proposées sur internet.

Il ne s'agit pas de perdre dix minutes pour chercher une démonstration qui ne revient pas à l'esprit ou pour en inventer une. Il faut profiter de celles qui sont offertes, et les apprendre si elles rentrent dans le cadre d'un exposé. Le temps passe, et chacun sait qu'il vaut de l'or !

► Il est bon d'appliquer la même stratégie pour la préparation de l'écrit. Pour rentabiliser ses efforts, je conseille de ne s'attaquer qu'à des exercices ou des problèmes (d'annales ou non) dont on possède les solutions détaillées.

Faire autrement est une perte de temps ! Par exemple travailler d'affilée cinq ou six heures sur un problème dont on ne possède pas la solution, c'est trouver et rédiger ce que l'on savait déjà sans apprendre rien de neuf. Cela donne certainement une idée sur la durée d'une épreuve (entre nous : il manque toujours du temps...), permet de s'entraîner à utiliser ses connaissances personnelles dans le cadre d'un problème long comportant plusieurs parties, et entraîne inévitablement à la rédaction. Il y a donc un intérêt. Mais on fait déjà cela quand on cherche un problème dont on a la solution ! Et de surcroît on peut alors corriger ses erreurs et/ou apprendre quelque chose de nouveau à chaque instant.

Pour l'écrit, on doit travailler sur des exercices et problèmes qui permettent de réviser les bases en un temps record, et s'entraîner à "trouver et rédiger" rapidement une solution. On travaillera donc seulement sur des exercices et problèmes dont on possède les corrections détaillés à côté de soi.

> **Le but est de faire des progrès et d'apprendre le plus possible, ce n'est pas de s'escrimer à inventer une solution en gaspillant plusieurs heures ou plusieurs jours.**

► Je relève un autre point important dans la lettre que j'ai reçue : l'idée de *construire ses propres plans de leçons*, a minima, dans le but de *les reprendre un à un pour les mémoriser* jusqu'au jour J.

En relisant les plans que l'on a construits autant de fois qu'on le peut, on mémorise chaque fois un peu plus les énoncés, les enchaînements, les points clés et les démonstrations subtiles. On acquiert des réflexes.

Pour moi, cette mégamathienne a adopté une stratégie gagnante qui portera ses fruits.

Je me permets deux autres conseils qui me viennent à l'esprit :

a) Dès le début de la préparation, je conseille de se préparer simultanément à l'écrit et à l'oral en travaillant sur des thèmes du programme. C'est une stratégie gagnante ! Cela permet de mieux retenir les points clés, de les structurer dans un "plan de leçon d'oral", et de réfléchir à la meilleure façon de répondre à un jury pendant l'entretien qui suit inévitablement un exposé. Il faut s'entendre répondre en disant des phrases complètes et structurées pour savoir si on est capable de répondre à une question simple. Il faut commencer tôt à le faire.

b) La publication des résultats d'admissibilité est un moment difficile. C'est le moment où l'on apprend si l'on a franchi le premier obstacle et si l'on est appelé à aller aux épreuves orales. Il est difficile d'apprendre que l'on n'est pas admissible, surtout si l'on se donnait des chances. Un échec est toujours difficile à supporter, mais il le faudra pourtant, et il faudra se remettre de sa déception en se disant d'abord qu'on n'est pas le seul dans ce cas, ensuite que tout le travail que l'on a consenti n'est pas perdu, mais restera toujours "avec nous" (cela, personne ne peux nous l'enlever !), enfin qu'il s'agit de faire le point pour décider ce que l'on fera.
Si l'on désire repasser le concours, que ce soit en "objectif prioritaire" ou seulement "en touriste", en passant le concours sans trop le préparer en espérant tomber sur des sujets que l'on aime l'année suivante (cela aussi a parfois été une stratégie gagnante pour certains candidats), je dis :

> **Si l'on désire représenter le concours, il faut recommencer à se préparer à l'écrit et à l'oral le plus tôt possible, donc dès que l'on a repris ses esprits après son échec.**

Il n'y a pas de temps à perdre : le but est d'atteindre l'excellence pour pouvoir surmonter les obstacles à sa prochaine tentative. Je dis aussi :

> **Mettre toutes les chances de son côté, c'est travailler le plus tôt possible avant les épreuves du concours.**

Chapitre 1

TD n°1 : Barycentres

1.1 Présentation

Bonjour à tous, et bienvenue sur cette page d'entraînement qui doit vous proposer des questions et des réponses.

Ce premier TD permet de réviser quelques questions classiques concernant les barycentres. La première question, tirée d'un exposé d'oral d'agrégation interne faite par un candidat, propose une méthode rapide de construction d'un barycentre, et il faut bien sûr avoir des arguments en réserve pour pouvoir expliquer à un examinateur qui le demanderait pourquoi cette construction fonctionne. Quant aux Questions 1.2, 1.3, 1.6, 1.7, 1.10 et 1.11, ce sont aussi des questions de cours qui peuvent être posées à l'oral d'un concours.

La question 1.8 est coquine, mais il ne faudrait pas qu'elle fasse mal : il faut donc se vacciner et se poser de temps en temps ce genre de questions qui démangent (dérangent ?).

La preuve de l'existence d'un point de concours des trois bissectrices intérieures d'un triangle, proposée à l'occasion de la question 1.9, est à bien retenir pour pouvoir la resservir dans un exposé personnel (regardez l'exposé sur les bissectrices dans le premier oral du CAPES, par exemple), ou simplement pour répondre à une question d'un examinateur qui ne sera pas, mais vraiment pas content s'il constate qu'un candidat au professorat ne sait pas quoi répondre.

Rassurons-nous : il est normal de ne pas savoir répondre à cette question après nos quelques années de fac, puisqu'on ne travaille pas beaucoup la géométrie élémentaire pour obtenir sa licence ou son master, et que l'on ne peut pas tout inventer en quelques minutes.

Il s'agit donc de potasser ces questions avec coeur et enthousiasme ! (D'ailleurs cette question, donnée avec des indications, fait un bon exercice de terminale S, isn't it ?)

Les questions 1.1 à 1.10 peuvent être posées à l'oral, et on les ré-utilisera à volonté dans le cadre de nos IOC (Interrogations Orales de Cours). Lorsque je dis qu'on peut y répondre à l'oral, il faut imaginer que l'on est debout au tableau et que l'on doive répondre à un jury formé de trois examinateurs. Il faut aussi savoir que "répondre" est à comprendre "au sens large" : s'il s'agit de ne pas rester muet devant de telles questions.

"Répondre" peut signifier simplement :

- "donner une idée de la preuve du résultat",
- "expliquer d'où le résultat provient et dans quel cadre il faut réfléchir",
- ou encore : "commencer à chercher en utilisant le tableau comme support et en raisonnant à haute voix".

On l'aura compris : un oral est vraiment différent d'un écrit ! Mais qui peut le plus peut le moins, et je vous conseille de travailler toutes ces questions en les cherchant à l'aide d'un brouillon, puis en rédigeant complètement une solution comme on le ferait en situation de concours. Pour l'écrit, il faut s'entraîner à chercher une réponse (en s'aidant de ses connaissances, d'un brouillon, d'une calculatrice,... de tout quoi !), puis rédiger un texte mathématique impeccable à partir de ce brouillon (et de ses idées). Ce texte n'est pas révisable, ce qui fait la différence avec un discours qui peut être précisé, amendé, transformé... Il faut créer un produit écrit fini irréprochable.

Comme la perfection n'est pas de ce monde, et comme nous sommes tous philosophes (bien sûr !), on se contentera d'un texte "aussi parfait que possible", mais sans exagération (qui nous mènerait à passer trop de temps sur une question qui ne rapporte ma foi qu'un nombre de points... et le problème est long !).

La question 1.12 est placée ici pour faire joli : elle nous fait traduire les hypothèses (ce qui permet de s'assurer qu'on connaît ses définitions) et aboutir à cette traduction sympathique d'un alignement par l'annulation d'un déterminant. On n'en fera pas un fromage, mais on pourra ressortir cet exercice dans un exposé sur le barycentre si on a le droit aux déterminants, donc plutôt à l'agrégation interne.

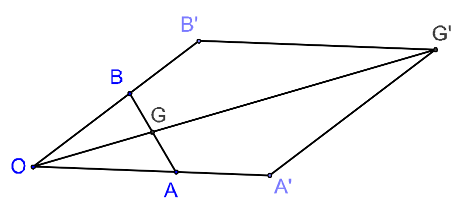
Diable ! Que de choses à dire pour une si petite page d'exercices ! J'essayerai d'être moins prolixe la prochaine fois.

Que s'est-il passé en salle ? En salle, le TD s'est bien déroulé et a pris du temps, car j'ai fait trop de parenthèses. En voilà une : démontrer que les trois médianes concourent en utilisant des outils du collège (deux nouvelles démonstrations que j'ai aussitôt proposées en questions/réponses dans [18]).
En voilà une autre : utiliser notre réponse à la question 1.9 pour démontrer qu'il existe exactement quatre centres de cercles tangents aux côtés d'un triangle (côté étant pris dans le sens : supports des côtés d'un triangle, of course !).

Il est temps pour moi de vous laisser profiter de ces jolies questions... ENJOY !

1.2 Enoncés

Question 1.1 *Sur la figure ci-dessous, $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}$ et $OA'G'B'$ est un parallélogramme. Montrez que G est le barycentre de $A(\alpha)$, $B(\beta)$.*



Question 1.2 *Enoncer et montrer la propriété d'associativité du barycentre.*

Question 1.3 *Que désigne-t-on par "fonction vectorielle de Leibniz" ? Que dire de cette fonction ?*

Question 1.4 *Montrer que l'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme coïncide avec les milieux des diagonales, et appartient aux droites passant par les milieux de deux côtés opposés.*

Question 1.5 *Montrer que l'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre $ABCD$ est situé au $1/4$ de la base de chacun des segments d'extrémités un sommet et le centre de gravité de la base opposée, et qu'il coïncide avec le milieu des segments d'extrémités les milieux de deux arêtes opposées.*

Question 1.6 *Soient E un espace affine sur $\mathbb{R}$, et A, B deux points distincts de E. Quel est l'ensemble des barycentres des points A et B ? Preuve.*

Question 1.7 *En utilisant des barycentres, montrer que les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G. Que dire de G ?*

Question 1.8 *Montrer que deux médianes d'un triangle ne sont jamais confondues.*

Question 1.9 *Montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle ABC con-courent en un point I (appelé centre du cercle inscrit au triangle). Quelles sont les coordonnées barycentriques de I dans le repère affine (A, B, C) ? Que peut-on en déduire ? Pouvez-vous énoncer des résultats analogues concernant le concours d'une bissectrice intérieure et de deux bissectrices extérieures issues de sommets différents ?*

Question 1.10 *Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminez l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan qui vérifient l'égalité $MA/MB = k$.*

Question 1.11 *On considère trois points non alignés A, B, C dans un plan $\mathcal{P}$, et quatre réels α, β, γ et k. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$.*

Question 1.12 *Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Soient (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) et (p_1, p_2, p_3) les coordonnées barycentriques de trois points M, N, P dans le repère (A, B, C), Montrer que :*

$$M, N, P \text{ alignés } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1.3 Solutions

Réponse 1.1 Si G désigne le barycentre de $A(\alpha)$, $B(\beta)$, on sait que G appartient à la droite (AB) (cela provient de l'égalité : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$). On a aussi

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}) = \frac{1}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OG'},$$

donc $G \in (OG')$, et $G \in (OG') \cap (AB)$.

Réponse 1.2 Soit G le barycentre de $A_1(\alpha_1)$, ..., $A_n(\alpha_n)$. Si J est une partie de $\{1, ..., n\}$ et si la somme $s = \sum_{i\in J} \alpha_i$ n'est pas nulle, alors G est le barycentre du système de points pondérés $\{A_i(\alpha_i)\}_{i\notin J}$, $g(s)$, où g représente le barycentre du système $\{A_i(\alpha_i)\}_{i\in J}$. En effet :

$$\sum_{i\notin J} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i\in J} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \sum_{i\notin J} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \left(\sum_{i\in J} \alpha_i\right) \overrightarrow{Gg} = \overrightarrow{0}.$$

Réponse 1.3 Etant donné un système de points pondérés $A_1(\alpha_1)$, ..., $A_n(\alpha_n)$ d'un espace affine E sur $\mathbb{R}$, avec $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, la fonction vectorielle de Leibniz est l'application de E dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ associé à E, qui à tout point M de E associe le vecteur

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}.$$

A quoi cela peut-il servir ? On peut déjà dire que le barycentre du système $A_1(\alpha_1)$, ..., $A_n(\alpha_n)$ est l'unique point G tel que $f(G) = \overrightarrow{0}$, quitte à démontrer qu'un tel point existe et est bien unique !
En fait, il est facile de couper en n'importe quel point O pour obtenir

$$f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = s\overrightarrow{MO} + f(O)$$

en posant $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Deux cas se présentent alors :

✠ Si s est nul, $f(M) = f(O)$ pour tout M, donc f est constante.

✠ Si $s \neq 0$, l'équivalence

$$f(M) = \overrightarrow{u} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{u}\right)$$

montre que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{E}$ possède un unique antécédent M par f, autrement dit que $f : E \to \overrightarrow{E}$ est bijective.

Réponse 1.4 Si $ABCD$ est un parallélogramme, ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu I. Par associativité du barycentre, l'isobarycentre G de A, B, C, D est aussi l'isobarycentre des milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$, donc le barycentre de $I(2)$, $I(2)$, donc $G = I$.
L'associativité des barycentres montre aussi que, si l'on note U et V les milieux de $[AB]$ et $[CD]$, et bien G est le barycentre de $U(2)$, $V(2)$. Ainsi $G = I$ est aussi le milieu de $[UV]$.

Réponse 1.5 • Soit Ω le centre de gravité du triangle BCD, et G l'isobarycentre des sommets du tétraèdre $ABCD$. Par associativité, G sera le barycentre de $A(1)$, $\Omega(3)$, donc appartient à la droite $(A\Omega)$ et vérifie

$$\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}.$$

Cette dernière égalité vectorielle montre que G est au 1/4 de la base Ω du segment $[A\Omega]$.

• Soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Par associativité, G est barycentre de $I(2)$, $J(2)$, donc G est le milieu du segment $[IJ]$ liant deux arêtes opposées.

Réponse 1.6 L'ensemble $\mathcal{B}$ des barycentres de A et B est la droite (AB). On le voit en appliquant le résultat de la Question **??**, ou en raisonnant directement comme ci-dessous.
Si $M \in \mathcal{B}$, il existe deux réels α, β tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ et M appartient à la droite (AB).
Réciproquement, si $M \in (AB)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Dans ce cas

$$(1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0},$$

donc M est le barycentre de $A(1-\lambda)$, $B(\lambda)$, et $M \in \mathcal{B}$. En conclusion : $\mathcal{B} = (AB)$.

Réponse 1.7 Soit G l'isobarycentre des sommets A, B, C. Si A' désigne le milieu de $[BC]$, l'associativité du barycentre montre que G est le barycentre de $A(1)$, $A'(2)$.
Par suite $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et G se situe sur la médiane issue de A, à un tiers de la base de celle-ci.
On montrerait de même que G appartient aux deux autres médianes. On vient donc de montrer que les trois médianes d'un triangle sont toujours concourantes.

Le point G, appelé centre de gravité du triangle ABC, est de coordonnées barycentriques $(1,1,1)$ dans le repère (A,B,C). Comme toutes ces coordonnées sont positives, G sera à l'intérieur du triangle ABC.

Remarque : La question du point de concours des trois médianes est souvent posée à l'oral et sous des formes différentes. Ainsi, à l'oral du CAPES interne 2009, un jury a demandé au candidat de montrer comment on pouvait démontrer l'existence du point G en utilisant des outils de lycée (le candidat a répondu en utilisant l'associativité du barycentre, comme on l'a fait ci-dessus), puis a demandé de répondre en utilisant uniquement des outils du collège. Le candidat s'est souvenu que l'on pouvait utiliser le Théorème de Thalès ou, si l'on préfère, le Théorème de la droite des milieux, comme on le voit à la Question **??**.

Réponse 1.8 Notons A' et B' les milieux des côtés $[BC]$ et $[CA]$ d'un triangle ABC. Si les médianes (AA') et (BB') étaient confondues, les points A, A', B, B' seraient alignés sur une droite Δ. Mais $C \in (BA') = \Delta$, donc les sommets A, B, C du triangle ABC seraient alignés sur Δ, ce qui est à absurde puisque nous travaillons évidemment dans cette question avec un triangle non aplati !

Réponse 1.9 ▶ La méthode la plus simple consiste à "parachuter" le point I de coordonnées barycentriques (a,b,c) dans le repère (A,B,C), puis à démontrer qu'il appartient aux trois bissectrices intérieures du triangle. On a

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Soient M et N définis par (FIG. 1.1) :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Le quadrilatère $AMIN$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux puisque

$$AM = \frac{bc}{a+b+c} = AN,$$

c'est donc un losange[1], et la droite (AI) est l'axe de symétrie du couple de demi-droites $([AB), [AC))$, donc, par définition, la bissectrice intérieure D_A issue de A du triangle ABC. On montrerait de la même façon que I appartient aux bissectrices intérieures D_B et D_C issues de B et C, et donc

$$\{I\} \subset D_A \cap D_B \cap D_C.$$

Les droites D_A, D_B et D_C concourent donc bien en I.

En fait l'inclusion $\{I\} \subset D_A \cap D_B \cap D_C$ que l'on vient de prouver est une égalité : $D_A \cap D_B \cap D_C = \{I\}$. Pour le voir, il suffit de vérifier que deux bissectrices intérieures du triangle ne sont jamais confondues. En effet, $D_A = D_B$ entraîne $D_A = (AB)$. La réflexion $s_{(AB)}$ par rapport à (AB) vérifie alors

$$s_{(AB)}\left((AB)\right) = s_{D_A}\left((AB)\right) = (AC),$$

d'où $(AB) = (AC)$, ce qui est absurde puisque le triangle n'est pas aplati.

▶ Que dire du point I ? Que I est barycentre à coefficients positifs de A, B, C, donc appartient à l'intérieur du triangle ABC.

[1] Pour retenir cette solution, il suffit de bien visualiser le losange $AMIN$ de la FIG. 1.1 et de l'utiliser !