A quoi servent les matrices ?

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

7 juillet 2002

Introduction

Ces quelques notes sont destinées aux étudiants de DEUG et écrites pour préciser trois utilisations importantes des matrices ainsi que les formules que l'on doit connaître. Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres appartenant à un ensemble K, appelé ensemble des **scalaires**. Dans ce qui suit, K sera un corps commutatif (et, en général, K sera égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$). On sait que l'on peut additionner deux matrices de même type (c'est-à-dire ayant le même nombre de lignes et de colonnes), que l'on peut multiplier deux matrices bien choisies (en faisant les produits "des lignes par les colonnes"), et que l'on peut multiplier une matrice par un scalaire.

Les premiers paragraphes présentent les définitions et les résultats, et le dernier paragraphe résume les formules à retenir ou à savoir retrouver rapidement.

On imagine aisément qu'un tableau rectangulaire de nombres puisse intervenir un peu partout au détour des chemins... On envisage ici trois "détours de chemins" que l'on rencontre souvent et où ces tableaux jouent un rôle essentiel. Ce sont les matrices :

1) d'applications linéaires,

2) de changement de bases,

3) de formes bilinéaires symétriques.

1 Matrice d'une application linéaire

Soit K un corps commutatif. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K de dimensions respectives n et p. Une application linéaire $f : E \to F$ est parfaitement déterminée par la donnée des images $f(\overrightarrow{e}_1)$,..., $f(\overrightarrow{e}_n)$ des vecteurs d'une base $e = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ de E.

[0] [cesv0001] v1.11β

En effet, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E s'écrit de façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{e}_j$, avec $x_j \in K$, et le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ dans K^n est appelé n-uplet des **coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base** e. Connaître les images $f(\overrightarrow{e}_1)$,..., $f(\overrightarrow{e}_n)$ des vecteurs de bases revient alors à connaître parfaitement l'image

$$f(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\overrightarrow{e}_j)$$

de n'importe quel vecteur de E.

Considérons une base $w = (\overrightarrow{w}_1, ..., \overrightarrow{w}_p)$ de F. Chaque vecteur $f(\overrightarrow{e}_j)$ s'exprime sous la forme $f(\overrightarrow{e}_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \overrightarrow{w}_i$ dans la base w, et l'on a

$$f(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\overrightarrow{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} \overrightarrow{w}_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \overrightarrow{w}_i.$$

Si l'on note $(y_1, ..., y_p)$ les coordonnées de $f(\overrightarrow{u})$ dans la base w, alors

$$f(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{p} y_i \overrightarrow{w}_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \overrightarrow{w}_i,$$

et l'unicité de l'expression d'un vecteur dans une base permet d'écrire

$$\forall i \in \mathbb{N}_p \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Cela peut encore se mettre sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ y_p = a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n \end{array} \right. \tag{1}$$

et se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & ... & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) constituent les **expressions analytiques et matricielles** de f. Par définition, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & ... & a_{pn} \end{pmatrix}$ est appelée **matrice de l'application linéaire** f dans les bases e au départ, et w à l'arrivée. On la note $M = \mathrm{Mat}(f; e, w)$. La relation matricielle (2) s'écrit encore $Y = MX$ où $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ représente le vecteur-colonne des coordonnées du vecteur objet $\overrightarrow{u}$ dans la base de départ e, et où $Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ représente le vecteur-colonne des coordonnées du vecteur image $f(\overrightarrow{u})$ dans la base d'arrivée w.

2 Matrice de passage

Les matrices de passage sont aussi appelées **matrices de changement de base**.

2.1 Formules de changement de base

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K, et $e = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ une base de E. Soit $e' = (\overrightarrow{e}'_1, ..., \overrightarrow{e}'_n)$ une autre base de E. Disons commodément que e représente l'ancienne base, et que e' repéresente la nouvelle base. Naturellement, on se donne les nouveaux vecteurs de base $\overrightarrow{e}'_i$ en fonctions des anciens par des formules

$$\overrightarrow{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{e}_i$$

où $a_{ij} \in K$. Trouver les formules de changement de base, c'est trouver le lien entre les anciennes coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans l'ancienne base e et les nouvelles coordonnées $(x'_1, ..., x'_n)$ du même vecteur $\overrightarrow{u}$ mais dans la nouvelle base e'. On a

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j \overrightarrow{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) \overrightarrow{e}_i$$

d'où

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j.$$

Ces égalités se résument matriciellement en écrivant

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

et nous conduisent à définir la matrice

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matrice carrée P dont les colonnes sont les coordonnées de la nouvelle base en fonction de l'ancienne, est appelé **matrice de passage de** e **vers** e' (ou **matrice de changement de base de** e **vers** e'), et parfois notée $P_e^{e'}$. Avec cette définition, ce sont les anciennes coordonnées X du vecteur $\overrightarrow{u}$ qui s'expriment en fonction des nouvelles coordonnées X' de $\overrightarrow{u}$ par la formule $X = PX'$. La matrice P est inversible.

2.2 Effet d'un changement de base sur les matrices d'applications linéaires

Soient $f : E \to F$ une application linéaire de matrice $M = \mathrm{Mat}\,(f; e, w)$ dans les bases e au départ et w à l'arrivée. Soient e' une nouvelle base de l'espace de départ et w' une nouvelle base de l'espace d'arrivée. Notons P (resp. Q) la matrice de passage de e vers e' (resp. de w vers w'), X (resp. X') les vecteurs-colonnes des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans e (resp. e') et Y (resp. Y') les vecteurs-colonnes des coordonnées de $f(\overrightarrow{u})$ dans w (resp. w').

Les anciennes coordonnées sont obtenues à partir des nouvelles en écrivant $X = PX'$ et $Y = QY'$. Et l'on a $Y = MX$ par définition de M. Par conséquent $QY' = MPX'$, d'où $Y' = \left(Q^{-1}MP\right)X'$, et cela signifie que la matrice $M' := Q^{-1}MP$ n'est autre que la matrice de f dans les nouvelles bases e' au départ et w' à l'arrivée. On retiendra donc la formule $M' = Q^{-1}MP$ exprimant la matrice $M' = \mathrm{Mat}\,(f; e', w')$ en fonction de la matrice $M = \mathrm{Mat}\,(f; e, w)$. On peut aussi écrire, plus lourdement,

$$\mathrm{Mat}\left(f; e', w'\right) = \left(P_w^{w'}\right)^{-1} \times \mathrm{Mat}\,(f; e, w) \times P_e^{e'}.$$

3 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

3.1 Expression matricielle d'une forme bilinéaire symétrique

Une **forme bilinéaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \to K$ linéaire en chacune des variables, autrement dit telle que

$$\begin{aligned} \forall x, x', y &\in E \quad \forall \lambda \in K \quad \varphi\left(x + \lambda x', y\right) = \varphi(x, y) + \lambda \varphi\left(x', y\right), \\ \forall x, y, y' &\in E \quad \forall \lambda \in K \quad \varphi\left(x, y + \lambda y'\right) = \varphi(x, y) + \lambda \varphi\left(y, y'\right). \end{aligned}$$

La forme bilinéaire φ est dite **symétrique** si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$. Soit $e = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ une base de E. Si $\overrightarrow{u} = \sum_i x_i \overrightarrow{e}_i$ et $\overrightarrow{v} = \sum_j y_j \overrightarrow{e}_j$,

$$\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \varphi\left(\sum_i x_i \overrightarrow{e}_i, \sum_j y_j \overrightarrow{e}_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j) = {}^t XMY$$

où $M = (\varphi(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j))_{i,j}$, $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, ..., y_n)$. Comme il existe une et une seule matrice M telle que $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t XMY$ pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E (vérifiez-le !), on peut définir M indifféremment par la formule $M = (\varphi(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j))_{i,j}$ ou la propriété $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t XMY$, et dire que M est la **matrice de la forme bilinéaire** φ **dans la base** e. On note $M = \mathrm{Mat}\,(\varphi; e)$.

Remarques : 1) On vérifie que la forme bilinéaire φ est symétrique si, et seulement si, sa matrice $\mathrm{Mat}\,(\varphi; e)$ est symétrique, c'est-à-dire vérifie l'égalité matricielle ${}^t M = M$. En effet, si φ est une forme bilinéaire symétrique, alors $\varphi(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j) = \varphi(\overrightarrow{e}_j, \overrightarrow{e}_i)$ pour tous indices i, j, et cela revient à écrire ${}^t M = M$. Et réciproquement, si ${}^t M = M$, alors pour tous vecteurs-colonnes X, Y, on a $\varphi(X, Y) = {}^t XMY = {}^t\left({}^t XMY\right) = {}^t YMX = \varphi(Y, X)$.

2) La dimension de l'espace vectoriel sur K des formes bilinéaires est égal au nombre de paramètres "libres" que l'on peut écrire dans la matrice d'une forme bilinéaire, soit n^2. De la même manière, en comptant les paramètres libres, ou "degrés de liberté", d'une matrice $\mathrm{Mat}(\varphi; e)$, on vérifie que la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques est $\frac{n(n+1)}{2}$.

3.2 Effet d'un changement de base sur les matrices de formes bilinéaires symétriques

Soient P la matrice de passage d'une base $e = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ vers une base $e' = (\overrightarrow{e}'_1, ..., \overrightarrow{e}'_n)$ de E, et $\varphi : E \times E \to K$ une forme bilinéaire symétrique. Avec les notations standard des paragraphes précédents, on obtient $\varphi(X, Y) = {}^tXMY$ avec $X = PX'$ et $Y = PY'$, d'où

$$\varphi(X, Y) = {}^t\left(PX'\right)MPY' = {}^tX'\left({}^tPMP\right)Y'.$$

Cela montre que la matrice de φ dans la nouvelle base e' est $M' = {}^tPMP$, ce que l'on peut noter (plus lourdement) : $\mathrm{Mat}(\varphi; e') = {}^tP_e^{e'}\,\mathrm{Mat}(\varphi; e')\,P_e^{e'}$.

4 En géométrie affine

Dans ce paragraphe, E désigne un espace affine de dimension n. Un **repère cartésien** de E est la donnée d'un point O de E et d'une base $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ de $\overrightarrow{E}$.

Si $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ est un repère cartésien, les **coordonnées cartésiennes** d'un point M de E dans ce repère sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$. Ce sont donc les réels $x_1, ..., x_n$ vérifiant $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{e}_i$.

4.1 Expression analytique d'une application affine

Une application $f : E \to F$ entre deux espaces affines de dimensions finies est **affine** si et seulement si il existe une application linéaire $l : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ entre les espaces vectoriels associés à E et à F, telle que l'on ait $\overrightarrow{f(M)f(N)} = l\left(\overrightarrow{MN}\right)$ pour tous points M et N de E. Cela équivaut à l'existence d'un point O de E tel que l'on ait $\overrightarrow{f(O)f(M)} = l\left(\overrightarrow{OM}\right)$ pour tout point M dans E. Cette relation s'écrit

$$\overrightarrow{O'f(M)} = l\left(\overrightarrow{OM}\right) + \overrightarrow{O'f(O)} \qquad (4)$$

où O' désigne un point de F fixé à l'avance. Si l'on utilise deux repères $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ de E, et $\mathcal{R}' = \left(O', \overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_p}\right)$ de F, on peut traduire matriciellement (4) et obtenir :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}}_{\text{Coordonnées de } f(M) \text{ dans } \mathcal{R}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de l'application linéaire } f \text{ dans les bases formant } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{R}'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Coordonnées de } M \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}}_{\text{Coordonnées de } f(O) \text{ dans } \mathcal{R}'}. \qquad (5)$$

La relation (5) définit analytiquement l'application affine f. Comme (5) est une traduction de (4), elle caractérise analytiquement les applications affines de E dans F et l'on peut énoncer : "une application f de E dans F est affine si et seulement si elle est définie analytiquement par des équations de la forme (5) dans des repères de E et de F".

4.2 Formules de changement de repère

Explicitons les formules de changement de repères cartésiens. Soient $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ un ancien repère de E, et $\mathcal{R}' = \left(O', \overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ un nouveau repère de E. Il est naturel de nous donner les vecteurs $\overrightarrow{e'_j}$ du nouveau repère par leurs coordonnées dans l'ancien repère, ce que nous noterons $\overrightarrow{e'_j} = \sum_i a_{ij}\overrightarrow{e_i}$. Il est aussi très naturel de connaître les coordonnées $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de la nouvelle origine O' dans l'ancien repère $\mathcal{R}$. Notons $(x_1, ..., x_n)$ (resp. $(x'_1, ..., x'_n)$) les coordonnées d'un point M dans $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$). Alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e}_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j \overrightarrow{e}'_j \\
\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) \overrightarrow{e_i},
\end{aligned}$$

et puisque $e = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une base, cela entraîne $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j + \alpha_i$ pour tout i. Cela se traduit matriciellement par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Anciennes coordonnées}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de passage de } e \text{ vers } e'} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{\text{Nouvelles coordonnées}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\text{Coordonnées de la nouvelle origine dans l'ancien repère}}.$$

On retrouve la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de l'ancienne base $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ vers la nouvelle.base $(\overrightarrow{e}'_1, ..., \overrightarrow{e}'_n)$ déjà introduite pour les changements de coordonnées "vectoriels" en 2.1.

5 Ce qu'il faut retenir

1) Matrice d'une application linéaire : La matrice M d'une application linéaire f dans des bases $e = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ de départ et $w = (\overrightarrow{w}_1, ..., \overrightarrow{w}_p)$ d'arrivée est celle dont la

j-ième colonne est le vecteur-colonne des coordonnées de l'image $f(\overrightarrow{e}_j)$ de $\overrightarrow{e}_j$ dans la base d'arrivée. On retient :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\overrightarrow{e}_1) & f(\overrightarrow{e}_2) & \ldots & f(\overrightarrow{e}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{w}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \overrightarrow{w}_p. \end{array}$$

La relation $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{u})$ s'écrit matriciellement $Y = MX$, i.e.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

où X et Y représentent les vecteurs-colonnes des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{y}$ dans les bases de départ et d'arrivée. On notera que l'expresion $Y = MX$ est donnée dans "le bon sens", c'est-à-dire exprime le vecteur image en fonction du vecteur objet.

2) Matrice de passage : Soient $e = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ l'ancienne base de l'espace vectoriel E, et $e' = (\overrightarrow{e}'_1, ..., \overrightarrow{e}'_n)$ la nouvelle base dans laquelle on désire travailler. La matrice de passage de e vers e' est celle dont les colonnes sont les coordonnées de la nouvelle base en fonction de l'ancienne, soit :

$$P := P_e^{e'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overrightarrow{e}'_1 & \overrightarrow{e}'_2 & \ldots & \overrightarrow{e}'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{e}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \overrightarrow{e}_p. \end{array}$$

Avec cette définition, la formule

$$X = PX'$$

exprime les anciennes coordonnées X d'un vecteur dans la base e en fonction des nouvelles coordonnées X' de ce même vecteur dans la base e'.

3) Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire : Si M est la matrice de l'application linéaire $f : E \to F$ dans les bases e au départ et w à l'arrivée, et si P et Q représentent des matrices de changement de base au départ (faisant passer de e à une base e' de E) et à l'arrivée (faisant passer de w à une base w' de F), la matrice M' de f dans les nouvelles bases e' et w' est

$$M' = Q^{-1}MP.$$

On doit savoir retrouver cette formule en opérant comme en 2.2.

4) Matrice d'une forme bilinéaire symétrique : La matrice de la forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to K$ dans la base $e = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ est $M = (\varphi(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j))_{i,j}$. C'est l'unique matrice qui satisfait l'égalité $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^tXMY$ pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$. Si P désigne la matrice de passage de la base e vers la base $e' = (\overrightarrow{e}'_1, ..., \overrightarrow{e}'_n)$, la matrice M' de φ dans la nouvelle base e' est

$$M' = {}^tPMP.$$

5) Expression analytique d'une application affine : Une application f de E dans F est affine si et seulement si elle est définie analytiquement par des équations de la forme

$$\underset{\substack{\text{Coordonnées} \\ \text{de } f(M) \text{ dans } \mathcal{R}'}}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\text{Matrice de l'application} \\ \text{linéaire } f \text{ dans les bases} \\ \text{formant } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{R}'}}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}} \underset{\substack{\text{Coordonnées} \\ \text{de } M \text{ dans } \mathcal{R}}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} + \underset{\substack{\text{Coordonnées} \\ \text{de } f(O) \text{ dans } \mathcal{R}'}}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}}.$$

dans des repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectifs de E et de F. Cela s'écrit plus sobrement $Y = MX + B$.

6) Formules de changement de repère : L'espace affine E est rapporté aux repères cartésiens $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{R}' = \left(O', \overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$. Les coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ et $(x'_1, ..., x'_n)$ d'un même point M de E respectivement dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont liées par la relation

$$\underset{\substack{\text{Anciennes} \\ \text{coordonnées}}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\text{Matrice de passage} \\ \text{de } e \text{ vers } e'}}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}} \underset{\substack{\text{Nouvelles} \\ \text{coordonnées}}}{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}} + \underset{\substack{\text{Coordonnées de la nouvelle} \\ \text{origine dans l'ancien repère}}}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}.$$

Cela s'écrit aussi $X = PX' +$.