

UNE ACTIVITE GEOMETRIQUE A DIVERS NIVEAUX D'ENSEIGNEMENT

P. DELANNAY, B. MERCIER & D.-J. MERCIER
Irem des Antilles et de la Guyane

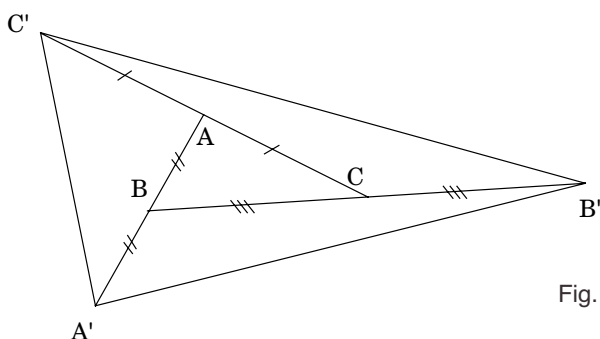


Fig. 1

Introduction

Nous exploitons une figure géométrique à travers la construction d'activités à des niveaux différents d'enseignement. Le premier paragraphe expose le problème initial et montre, par la variété des moyens mis en œuvre, comment il est possible d'adapter l'activité à une classe donnée. Les deux paragraphes suivants relatent des expérimentations en classe et proposent une réécriture de l'activité pour le collège à l'aide d'un treillage. La fin de l'article propose des prolongements et des généralisations.

1. Un problème de construction

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien. On construit les symétriques A' , B' , C' respectifs des points A , B , C par rapport aux

points B , C , A . Les trois questions suivantes constituent l'activité proposée en classe :

Q1 : Y a-t-il un rapport constant entre les aires des triangles $A'B'C'$ et ABC ?

Q2 : Montrer que les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité.

Q3 : On suppose cette fois-ci que le triangle $A'B'C'$ est donné. Expliquer comment obtenir un triangle ABC tel que $A'B'C'$ se déduise de ABC par la construction initiale. Que dire de l'application Ψ qui à un triangle ABC du plan associe le triangle $A'B'C'$?

La question **Q1** est délibérément ouverte et peut donner lieu à une approche expérimentale à l'aide d'un logiciel de géométrie tel Cabri Géomètre. Le travail sur ordinateur permet alors de trouver la constante

dans le cas des triangles, puis de voir si cette constante existe encore dans le cas des quadrilatères, puis celui des polygones quelconques (cf. §5 et §6). Donnons ci-dessous plusieurs réponses possibles à la question **Q1**. Notons \mathcal{A}_{LMN} l'aire d'un triangle LMN.

R1.1 : La Fig.1 permet d'écrire

$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = \mathcal{A}_{AC'A'} + \mathcal{A}_{BA'B'} + \mathcal{A}_{CB'C'} + \mathcal{A}_{ABC} \quad (1)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AC'A'} &= \frac{1}{2} AC' \cdot AA' \cdot \sin(\pi - \hat{A}) \\ &= AC \cdot AB \cdot \sin \hat{A} = 2 \mathcal{A}_{ABC} . \end{aligned}$$

De la même façon $\mathcal{A}_{BA'B'} = \mathcal{A}_{CB'C'} = 2 \mathcal{A}_{ABC}$, et il suffit de remplacer dans (1) pour obtenir $\mathcal{A}_{A'B'C'} = 7 \mathcal{A}_{ABC}$.

R1.2 : Le théorème de Thalès montre que la hauteur du triangle ABC issue de B vaut la moitié de la hauteur du triangle AC'A' issue de A'. Comme les bases [AC] et [AC'] de ces triangles ont même longueur, on déduit :

$$\mathcal{A}_{AC'A'} = 2 \mathcal{A}_{ABC}$$

et on conclut comme en **R1.1**.

R1.3 : Méthode des aires. Une médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles d'aires égales, par conséquent :

$$\mathcal{A}_{AC'A'} = 2 \mathcal{A}_{AC'B} \text{ et } \mathcal{A}_{AC'B} = \mathcal{A}_{ABC} ,$$

et l'on conclut comme précédemment.

Dans ces trois premières méthodes, on admet que le triangle ABC est à l'intérieur du triangle A'B'C'. C'est évident sur la figure et peut se vérifier en reliant que l'intérieur

du triangle A'B'C' est, par définition, l'enveloppe convexe $\text{Conv}(A', B', C')$ des sommets de ce triangle, et en démontrant (comme en **R3.1** ou **R3.3**) que les points A, B et C appartiennent à $\text{Conv}(A', B', C')$.

R1.4 : Produit vectoriel. L'avantage de cette méthode est d'éviter tout recours à un découpage du triangle A'B'C'. Son inconvénient est qu'elle ne peut être employée qu'à partir de la terminale. On écrit :

$$\begin{aligned} \vec{A'B'} \wedge \vec{A'C'} &= (\vec{A'B} + \vec{BB'}) \wedge (\vec{A'A} + \vec{AC'}) \\ &= (\vec{BA} + 2\vec{BC}) \wedge (2\vec{BA} + \vec{CA}) \\ &= (3\vec{BA} + 2\vec{AC}) \wedge (2\vec{BA} + \vec{CA}) \\ &= 3\vec{BA} \wedge \vec{CA} + 4\vec{AC} \wedge \vec{BA} \\ &= 7\vec{AB} \wedge \vec{AC} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{A'B'C'} &= \frac{1}{2} \|\vec{A'B'} \wedge \vec{A'C'}\| \\ \mathcal{A}_{A'B'C'} &= \frac{7}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = 7 \mathcal{A}_{ABC} . \end{aligned}$$

La question **Q2** se résout facilement par Chasles, mais nous donnerons aussi une solution utilisant des aires de triangles :

R2.1 : L'égalité $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ entraîne successivement :

$$\begin{aligned} \vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} + \vec{A'A} + \vec{B'B} + \vec{C'C} &= \vec{0} \\ \vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} + 2(\vec{BA} + \vec{CB} + \vec{AC}) &= \vec{0} \\ \vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} &= \vec{0} . \end{aligned}$$

R2.2 : Méthode des aires.

Cette méthode, que l'on trouve dans les éléments d'Euclide, repose sur la proposition suivante : " Deux triangles de même base et de même hauteur ont des aires égales ". Cette proposition se montre à l'aide de puzzles ou en admettant la formule de l'aire d'un triangle (cf. Friedelmeyer [3]). Elle permet d'établir que le centre de gravité d'un triangle est l'unique point G qui divise l'aire du triangle en trois aires égales.

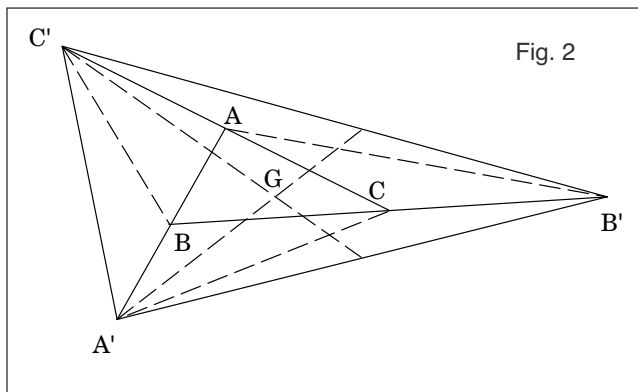


Fig. 2

Soit G le centre de gravité de ABC.

En exprimant l'aire du quadrilatère A'GAC' de deux façons, on trouve (Fig.2) :

$$\mathcal{A}_{A'GAC'} = \mathcal{A}_{A'GC'} + \mathcal{A}_{GAC'} = \mathcal{A}_{A'GA} + \mathcal{A}_{A'AC'}$$

Compte tenu de

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{GAC'} = \mathcal{A}_{GAC} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{21}\mathcal{A}_{A'B'C'} \\ \mathcal{A}_{A'GA} = 2\mathcal{A}_{AGB} = \frac{2}{3}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{2}{21}\mathcal{A}_{A'B'C'} \\ \mathcal{A}_{A'AC'} = \mathcal{A}_{A'AC} = 2\mathcal{A}_{ABC} = \frac{2}{7}\mathcal{A}_{A'B'C'} \end{cases}$$

on déduit $\mathcal{A}_{A'GC'} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{A'B'C'}$.

De même : $\mathcal{A}_{A'GB'} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{A'B'C'}$ et G sera bien le centre de gravité de A'B'C'.

La question Q3 fera beaucoup réfléchir nos élèves...

Et nous exposons ici quatre solutions différentes.

R3.1 : Calculs barycentriques (Fig.3).

Soient a, b,... les affixes des points A, B,... dans un repère orthonormal direct. On vérifie l'équivalence :

$$\begin{cases} a' = 2b - a \\ b' = 2c - b \\ c' = 2a - c \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{7}(a' + 2b' + 4c') \\ b = \frac{1}{7}(4a' + b' + 2c') \\ c = \frac{1}{7}(2a' + 4b' + c') \end{cases}$$

Le triangle ABC est donc unique une fois le triangle A'B'C' donné, et A sera le barycentre de A'(1), B'(2), C'(4).

Pour construire le triangle ABC à partir du triangle A'B'C' il suffira de placer A, les points B et C étant alors les milieux respectifs des segments [AA'] et [BB'].

Par associativité du barycentre, le point A sera barycentre de A'(1), $\bar{K}_A(6)$ où \bar{K}_A représente le barycentre de B'(2), C'(4). On aura

$$\vec{C'\bar{K}_A} = \frac{1}{3}\vec{C'B'}$$

Le point \bar{K}_A est facile à pla-

cer et $A \in (A'K_A)$. De la même façon, on démontrerait que $A \in (C'K_C)$, où K_C désigne le point du segment $[A'B']$ tel que $B'K_C = \frac{1}{3}B'A'$. Finalement A sera l'intersection des droites $(A'K_A)$ et $(C'K_C)$.

R3.2 : Homothéties.

On vient de voir que construire ABC revient à construire le point A tel que

$$h_{[C', 2]}(A) = C,$$

$$h_{[B', 2]}(C) = B,$$

$$h_{[A', 2]}(B) = A.$$

L'application $h = h_{[A', 2]} \circ h_{[B', 2]} \circ h_{[C', 2]}$ est une homothétie de rapport 8 vérifiant $h(A) = A$, si bien que tout le problème revient à construire le centre A de l'homothétie h .

On peut par exemple écrire :

$$h_{[A, 8]} = h_{[A', 2]} \circ h_{[\Omega, 4]}$$

où $h_{[\Omega, 4]} = h_{[B', 2]} \circ h_{[C', 2]}$, puis construire le point $M = h_{[B', 2]} \circ h_{[C', 2]}(A')$ pour obtenir le point Ω à l'intersection des droites $(B'C')$ et $(A'M)$. On construit ensuite le point :

$$N = h_{[A', 2]} \circ h_{[\Omega, 4]}(C')$$

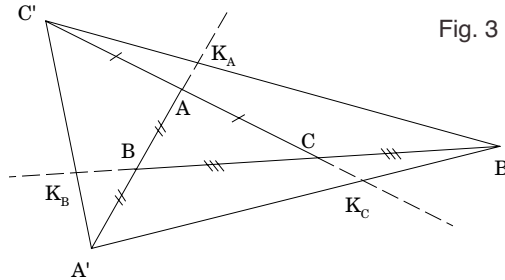
et A sera à l'intersection des droites $(A'\Omega)$ et $(C'N)$.

R3.3 : Thalès.

Soit K_A l'intersection de (AA') et $(B'C')$. On montre que :

(a) $K_A \in [B'C']$ et $\frac{C'K_A}{C'B'} = \frac{1}{3}$,

(b) Les points A, B, C sont intérieurs au triangle $A'B'C'$



Soit J l'intersection de $(B'C')$ et de la parallèle à (AA') passant par C . Le théorème de Thalès appliqué deux fois montre que :

$$\overline{B'J} = \overline{JK_A} = \overline{K_AC'},$$

ce qui prouve que $\frac{C'K_A}{C'B'} = \frac{1}{3}$ et que les points B', J, K_A, C' sont dans cet ordre sur la droite $(B'C')$, autrement dit que K_A appartient au segment $[B'C']$.

On a montré (a). L'affirmation (b) est une conséquence de (a) et de l'associativité des barycentres.

On notera que la preuve du (a) de **R3.3** peut être donnée en classe de troisième si l'on supprime la référence aux mesures algébriques et ne conserve que l'ordre des points sur la droite.

R3.4 : Méthode des aires.

On a : $\mathcal{A}_{A'AB'} = 2\mathcal{A}_{A'BB'} = \frac{4}{7}\mathcal{A}_{A'B'C'}$. Si U désigne l'intersection de $(A'C')$ et de la paral-

lèle à (A'B') passant par A, alors :

$$\mathcal{A}_{A'UB'} = \mathcal{A}_{A'AB'} = \frac{4}{7} \mathcal{A}_{A'B'C'},$$

donc $A'U = \frac{4}{7} A'C$. De même $\mathcal{A}_{A'AC'} = \frac{2}{7} \mathcal{A}_{A'B'C'}$,

et $A'V = \frac{2}{7} A'B'$, où V désigne l'intersection de (A'B') et de la parallèle à (A'C') passant par A. Comme A est intérieur au triangle A'B'C', on obtient :

$$\vec{A'A} = \vec{A'U} + \vec{A'V} = \frac{4}{7} \vec{A'C'} + \frac{2}{7} \vec{A'B'}$$

et AUA'V est un parallélogramme.

La construction de A s'en déduit.

2. Expérimentation

L'énoncé simple de cette activité géométrique et les nombreux outils permettant de la traiter permettent son utilisation dès les classes de collège. Rendons compte ici de deux expérimentations en nous concentrant sur les réactions des étudiants.

2.1 En classe de seconde

L'activité est proposée dans une classe seconde de niveau très moyen. Environ la moitié des élèves ont besoin d'indications supplémentaires pour construire la figure et montrent ainsi que le mot "respectif" de l'énoncé n'est pas compris. Le quart de la classe effectue des mesures à partir des constructions individuelles afin d'établir le rapport des aires annoncé de façon expérimentale et approximative. A la suite de l'intervention du professeur sur la nécessité d'obtenir et de démontrer une formule exacte, un élève suggère le rapport 2 et l'on s'oriente, après le rappel de

la formule générale donnant l'aire d'un triangle, vers la comparaison des hauteurs de ABC et de A'BB' issues de A et A'.

En conclusion, l'activité, bien que présentant des difficultés pour des élèves moyens, n'en demeure pas moins captivante. Il semble nécessaire de prévoir un volet de 2 heures pour aborder les questions Q1 à Q3.

2.2 En préparation au CAPES

La solution R1.1 est assez vite trouvée et exposée par les étudiants. L'un d'eux remarque le défaut de cette méthode et propose d'utiliser le produit vectoriel. Si la question Q2 est facilement résolue par l'ensemble du groupe, il n'en va pas de même du problème de construction Q3. Un seul étudiant a vraiment préparé cette question chez lui et nous propose la démonstration R3.5 ci-dessous où il désire avant

tout réemployer la formule $S = \frac{1}{2} \text{absin } \hat{C}$ et utiliser les égalités d'aires de la question Q1.

Il est intéressant de signaler que c'est par cette démonstration un peu lourde que nous nous sommes rendu compte, en TD, de l'importance du point K_B et de sa situation au tiers de la base [A'C']. L'exposé au tableau a surpris et intéressé les autres étudiants, mais malheureusement personne n'a pu exploiter le fait que K_B était maintenant facile à placer pour obtenir une construction simple de ABC à partir de A'B'C'. L'idée de recommencer pour obtenir K_A et dire que B serait nécessairement à l'intersection des droites (AK_A) et (BK_B) n'était donc pas naturelle.

Par ailleurs aucun étudiant n'a signalé que l'on n'avait en fait jamais prouvé, dans cette démonstration, que le point K_A appartenait

bien au segment $[B'C']$. Je laisse la parole à mon étudiant...

R3.5 : Comparaison d'aires.

Soit K_B l'intersection de (BB') et $(A'C')$. Les aires des triangles $B'CC'$ et $B'K_B C'$ sont :

$$\mathcal{A}_{B'CC'} = \frac{1}{2} B'C' \cdot B'C \cdot \sin \widehat{C'B'C}$$

$$\mathcal{A}_{B'K_B C'} = \frac{1}{2} B'C' \cdot B'K_B \cdot \sin \widehat{C'B'C}$$

d'où

$$\mathcal{A}_{B'K_B C'} = \frac{B'K_B}{B'C} \mathcal{A}_{B'CC'}$$

(On arrive au même résultat par la formule $\frac{Bh}{2}$ montrant la proportionnalité entre la base et l'aire pour une hauteur h fixée).

De la même façon :

$$\mathcal{A}_{B'K_B A'} = \frac{B'K_B}{B'B} \mathcal{A}_{B'BA'}$$

Compte tenu de $\mathcal{A}_{B'BA'} = \mathcal{A}_{B'CC'}$ et $BB' = 2B'C$, ces deux égalités entraînent $\mathcal{A}_{B'K_B C'} = 2\mathcal{A}_{B'K_B A'}$. Par suite $\mathcal{A}_{B'K_B A'} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{A'B'C'}$ et $A'K_B = \frac{1}{3} A'C'$.

Dans la suite de l'activité, j'ai proposé la solution barycentrique **R3.1** à laquelle certains étaient en train de penser, et qui a été très bien acceptée. Par contre la solution **R3.2** par les homothéties n'avait été pressentie par personne. Cela provient sans doute du fait que les trois premières années d'enseignement supérieur ne permettent pas d'utiliser

suffisamment les homothéties dans les raisonnements géométriques.

Signalons aussi qu'à la lecture de la question **Q3** une étudiante a tout de suite demandé si Ψ était une application affine. Après l'effet de surprise, il a été convenu que la bonne formulation de cette question était de savoir si Ψ n'était pas induite par une application affine...

Q4 : L'application Ψ est-elle induite par une application affine ?

R4 : Autrement dit existe-t-il une application affine $f : E \rightarrow E$ telle que pour tout triangle ABC et en notant encore $A'B'C'$ le triangle $\Psi(ABC)$, on ait $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$? Eh bien non... S'il existait une telle application affine f , sa partie linéaire l vérifierait :

$$l(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{A'B'}$$

dès que $A'B'C' = \Psi(ABC)$. Il suffit de choisir un point C_0 distinct de C et de tracer le triangle $A'B'C_0 = \Psi(ABC_0)$ pour que l'on ait $l(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, d'où $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B'}$, ce qui est absurde.

3. Treillage en cinquième

On construit un treillage mettant en évidence des parallélogrammes de même aire suivant le modèle vu en [1].

L'activité **Q5** permet alors d'utiliser l'aire comme outil démonstratif et en ce sens, autorise la mise en pratique d'un raisonnement qui ne "nécessite pas l'usage d'un langage extrêmement structuré et formalisé" [3].

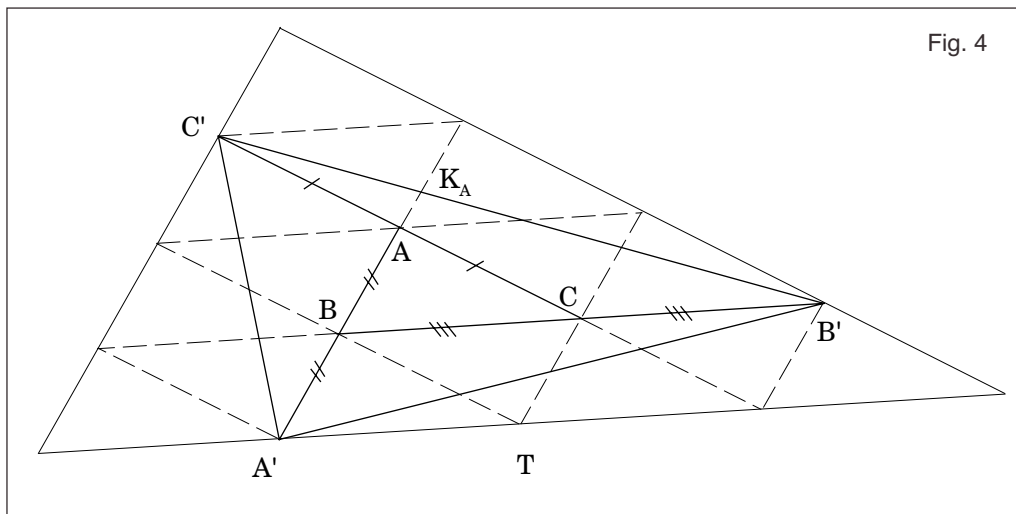


Fig. 4

Q5 : On considère la Fig. 1. Tracer les droites (AB), (BC) et (CA). Construire les parallèles à (AB) passant respectivement par C', C et B', les parallèles à (BC) passant respectivement par A', A et C', et enfin les parallèles à (CA) passant respectivement par B', B et A'. En utilisant les nombreux parallélogrammes de la figure, démontrer que l'aire du triangle A'B'C' vaut 7 fois celle du triangle ABC.

R5 : Soit \mathcal{A} l'aire du triangle ABC. Le treillage de la Figure 4 montre de nombreux parallélogrammes de même aire $2\mathcal{A}$. On constate, par exemple, que l'aire \mathcal{A}' de A'B'C' est égale à l'aire du "grand triangle" moins l'aire des trois triangles (les "chutes"). Or chacun de ces triangles est la moitié d'un long parallélogramme de base du treillage. On déduit :

$$\mathcal{A}' = 16\mathcal{A} - 3 \times \frac{6\mathcal{A}}{2} = 7\mathcal{A} .$$

L'activité **Q5** est bien centrée sur le programme de cinquième qui a été entièrement construit autour du parallélogramme et des propriétés des symétries centrales. Le fait que les trois faisceaux de parallèles forment bien un treillage peut être admis à ce niveau, mais peut aussi être l'occasion de saisir les enjeux d'une démonstration : pourquoi les parallèles non encore tracées vont-elles passer par les nœuds du treillage ? Ou bien : pourquoi en reliant les nœuds du treillage obtient-on des parallèles aux premières parallèles tracées ? En fait, tout cela peut se justifier à l'aide des connaissances de cinquième.

Montrons par exemple que le point T de la Fig. 4 appartient bien aux trois droites tracées. Définissons T comme le quatrième sommet du parallélogramme CABT et montrons que la droite (A'T) est parallèle à (BC). Cela sera le cas si l'on vérifie que CBA'T est un parallélogramme. L'hypothèse entraîne déjà que $CT = AB = BA'$, il ne reste qu'à vérifier que le quadrilatère CBA'T n'est pas croisé. Comme

CABT est un parallélogramme, le milieu I de [AT] appartient à (BC) et les points A et T ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (BC). Par hypothèse, il en est de même des points A et A', et l'on peut conclure en disant que A' et T sont du même côté de la droite (BC).

4. Longueurs des côtés

Q6 : A quelles conditions sur les longueurs a, b, c des côtés [BC], [CA], [AB] le triangle A'B'C' est-il isocèle en A' ? En déduire que ABC est équilatéral si, et seulement si, A'B'C' l'est.

R6 : La formule d'Al Kashi donne :

$$A'B'^2 = A'B^2 + BB'^2 - 2A'B \cdot BB' \cos(\pi - B)$$

$$= c^2 + 4a^2 + 4ac \cdot \cos B.$$

Compte tenu de $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, on obtient :

$$c'^2 = 6a^2 - 2b^2 + 3c^2.$$

Les autres longueurs du triangle A'B'C' s'obtiennent par permutation circulaire, et l'égalité $b' = c'$ équivaut à $8a^2 = 5b^2 + 3c^2$. Par suite A'B'C' est équilatéral si, et seulement si,

$$\begin{cases} 8a^2 = 5b^2 + 3c^2 \\ 8b^2 = 5c^2 + 3a^2 \end{cases}$$

i.e. $a = b = c$.

Nous pouvons maintenant poser les questions **Q7** et **Q8** aux élèves en leur donnant quelques indications sur la solution.

Q7 : Trouver toutes les longueurs entières a, b, c des côtés du triangle ABC pour lesquelles le triangle A'B'C' est isocèle en A'. On exhibera, en particulier, une solution pour laquelle le triangle ABC n'est pas isocèle.

R7 : Il s'agit de résoudre l'équation diophantienne

$$8a^2 = 5b^2 + 3c^2 \quad (2)$$

ou, ce qui revient au même, trouver les solutions rationnelles de l'équation

$$5x^2 + 3y^2 = 8 \quad (3)$$

L'équation (3) est celle d'une ellipse \mathcal{E} et l'on connaît au moins un point A (1,1) de \mathcal{E} à coordonnées rationnelles. On coupe \mathcal{E} par une droite D variable passant par A et de pente rationnelle. Le second point d'intersection de D et de \mathcal{E} sera un point rationnel de l'ellipse, et réciproquement tous les points rationnels de l'ellipse s'obtiendront de cette manière. Le cas où D est verticale est mis de côté et ne fournit qu'un seul point rationnel (1,-1).

Supposons donc que D soit d'équation $y = m(x - 1) + 1$. L'intersection de \mathcal{E} et D s'obtient en résolvant

$$5x^2 + 3(m(x - 1) + 1)^2 = 8$$

i.e.

$$(3m^2 + 5)x^2 + (6m - 6m^2)x + 3m^2 - 6m - 5 = 0 \quad (4)$$

$x = 1$ est solution triviale de (4) et l'autre solution x_m vérifiera :

$$1 + x_m = - \frac{6m - 6m^2}{3m^2 + 5},$$

ce qui entraîne :

$$x_m = \frac{3m^2 - 6m - 5}{3m^2 + 5} \text{ et } y_m = \frac{-3m^2 - 10m + 5}{3m^2 + 5} .$$

En conclusion, les solutions rationnelles de (3) sont (0,0), (1,-1) et (x_m, y_m) où m décrit **Q**. Les solutions entières de (2) seront obtenues en résolvant

$$\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right) = (x_m, y_m) \quad (5)$$

En particulier les triplets (a, b, c) égaux à :

$$(|3m^2 + 5|, |3m^2 - 6m - 5|, |-3m^2 - 10m + 5|)$$

seront solutions de (2).

Pour $m = 2$, on trouve la solution non triviale $(a,b,c) = (17,5,27)$ pour laquelle le triangle $A'B'C'$ est isocèle en A' .

La paramétrisation complète des solutions entières (a,b,c) de (5) est un bon exercice d'arithmétique. Si $m = \frac{p}{q}$, écrivons :

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3p^2 - 6pq - 5q^2}{3p^2 + 5q^2} = \frac{r}{t} \\ \frac{c}{a} = \frac{-3p^2 - 10pq + 5q^2}{3p^2 + 5q^2} = \frac{s}{t} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} r &= \frac{3p^2 - 6pq - 5q^2}{\delta_{p,q}} \\ s &= \frac{-3p^2 - 10pq + 5q^2}{\delta_{p,q}} \\ t &= \frac{3p^2 + 5q^2}{\delta_{p,q}} \end{aligned}$$

et où $\delta_{p,q}$ désigne le pgcd de $(3p^2 - 6pq - 5q^2)$, $(-3p^2 - 10pq + 5q^2)$ et $(3p^2 + 5q^2)$. Les nombres r, s et t sont premiers entre eux. Le système

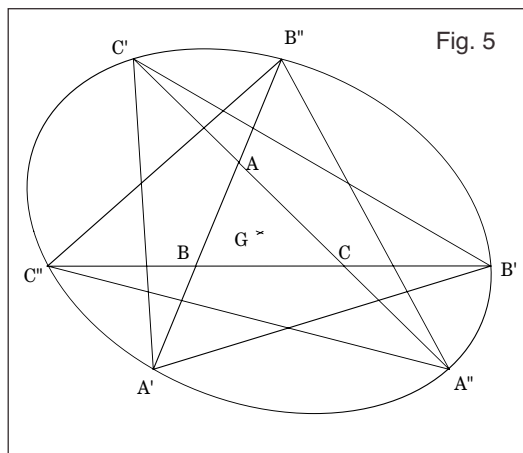
$$\begin{cases} bt = ra \\ ct = as \end{cases}$$

et le théorème de Gauss montrent que :

$$\frac{t}{\text{pgcd}(r,t)} \text{ divise } a, \text{ soit } a = \frac{ta'}{\text{pgcd}(r,t)} \text{ où } a' \text{ appartient à } \mathbf{Z}.$$

En remplaçant : $c \cdot \text{pgcd}(r,t) = sa'$ d'où $c = sc'$. Cela implique $(a,b,c) = (ta', rc', sc')$. La réciproque étant triviale, l'ensemble des triplets (a,b,c) entiers solutions de l'équation (2) sera formé des triplets (tc', rc', sa') où (c', p, q) décrivent \mathbf{Z}^3 et où r, s, t dépendent de p, q comme ci-dessus.

Q8 : Soient A'', B'', C'' les symétriques respectifs des points A, B, C par rapport aux points C, A, B . Montrer que les six points $A', B', C', A'', B'', C''$ appartiennent à une même



UNE ACTIVITE GEOMETRIQUE A
DIVERS NIVEAUX D'ENSEIGNEMENT

ellipse de centre G (*Indication* : on pourra d'abord envisager le cas où le triangle ABC est équilatéral).

R8 : Si ABC est équilatéral de côté a , **Q6** montre que A'B'C' est équilatéral de côté

$c' = a\sqrt{7}$. Comme G est le centre de gravité commun aux deux triangles, on obtient :

$$GA' = \frac{2}{3} \left(c' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = a \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Le cercle C de centre G et de rayon $a \sqrt{\frac{7}{3}}$ sera

circonscrit à A'B'C'. Il suffit de transporter la figure à l'aide d'une bijection affine *ad hoc* pour conclure.

5. Généralisation aux quadrilatères

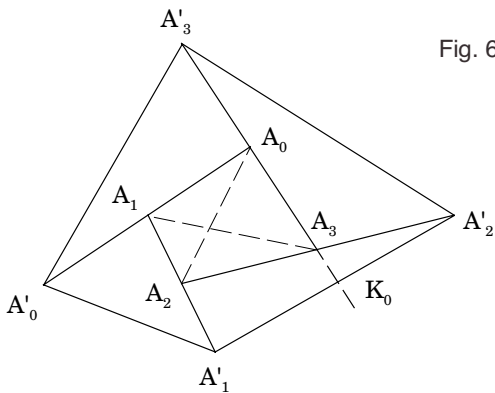


Fig. 6

Que deviennent les questions **Q1**, **Q3** et **Q6** si l'on remplace le triangle ABC par un quadrilatère convexe $A_0A_1A_2A_3$ (Fig.6) ?

Q9 : Y a-t-il un rapport constant entre l'aire \mathcal{A}' du quadrilatère $A'_0A'_1A'_2A'_3$ et l'aire \mathcal{A} du quadrilatère $A_0A_1A_2A_3$?

R9 : Une triangulation de la figure 6 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \mathcal{A} + \mathcal{A}_{A_3A_2A_3} + \mathcal{A}_{A_0A_3A'_0} + \\ &\quad \mathcal{A}_{A_1A'_0A'_1} + \mathcal{A}_{A_2A'_1A'_2} \\ \mathcal{A}' &= \mathcal{A} + 2\mathcal{A}_{A_0A_2A_3} + 2\mathcal{A}_{A_0A_1A_3} + \\ &\quad 2\mathcal{A}_{A_0A_1A_2} + 2\mathcal{A}_{A_1A_2A_3} \\ \mathcal{A}' &= \mathcal{A} + 2\mathcal{A} + 2\mathcal{A} = 5\mathcal{A}. \end{aligned}$$

Q10 : Construire $A_0A_1A_2A_3$ à partir de $A'_0A'_1A'_2A'_3$.

R10 : Le point K_0 n'est maintenant pas facile à placer en utilisant Thalès. Choisissons la méthode barycentrique. Il s'agit d'inverser le système :

$$\begin{cases} a'_0 = 2a_1 - a_0 & \\ a'_1 = 2a_2 - a_1 & \times 2 \\ a'_2 = 2a_3 - a_2 & \times 4 \\ a'_3 = 2a_0 - a_3 & \times 8 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre, on trouve :

$$a_0 = \frac{1}{15} (a'_0 + 2a'_1 + 4a'_2 + 8a'_3)$$

et les autres inconnues $a_1, a_2,$ et a_3 s'obtiennent en réitérant le procédé ou par permutation circulaire. La construction résulte de ces calculs : tout revient en effet à placer le point A_0 barycentre de $A'_0(1), A'_1(2), A'_2(4), A'_3(8)$. L'associativité du barycentre montre que A_0 est barycentre de $K(6), L(9)$

où $\vec{A_2K} = \frac{1}{3} \vec{A_2A_1}$ et $\vec{A_3L} = \frac{1}{9} \vec{A_3A_0}$. De même A_0 sera barycentre de $U(3), V(12)$ avec $\vec{A_1U} = \frac{1}{3} \vec{A_1A_0}$ et $\vec{A_3V} = \frac{1}{2} \vec{A_3A_2}$. Les points K, L, U, V sont faciles à placer et la propriété d'alignement classique aux barycentres montre que :

$$A_0 \in (KL) \cap (UV).$$

Q11 : Montrer que le quadrilatère $A_0A_1A_2A_3$ est un parallélogramme si, et seulement si, le quadrilatère $A'_0A'_1A'_2A'_3$ en est un. A quelles conditions sur $A_0A_1A_2A_3$ le quadrilatère $A'_0A'_1A'_2A'_3$ est-il un losange ?

R11 : voir [6].

6. Généralisation aux polygones f convexes.

Remplaçons le triangle ABC par un polygone convexe $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ à n sommets et d'aire \mathcal{A} . Si la réponse **R10** se généralise sans peine à ce nouveau cas de figure, il n'en est pas de même de **R1**.

Notons \mathcal{A} l'aire du polygone $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ et \mathcal{A}' celle de $A'_0A'_1 \dots A'_{n-1}$ obtenu à partir de $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ par notre construction, et posons la question suivante :

Q12 : Y a-t-il proportionnalité entre \mathcal{A} et \mathcal{A}' ?

On peut répondre affirmativement à cette question si l'on se restreint au cas des polygones réguliers convexes. En effet deux poly-

gones réguliers convexes à n sommets \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont toujours semblables. Si l'on note s la similitude directe transformant \mathcal{P}_1 en \mathcal{P}_2 , la propriété de conservation des milieux par une similitude montre que s transformera aussi le polygone \mathcal{P}'_1 associé à \mathcal{P}_1 en le polygone \mathcal{P}'_2 . La proportionnalité entre les aires de \mathcal{P}'_1 et de \mathcal{P}_1 s'en déduit.

Cette remarque est l'occasion d'une nouvelle formulation :

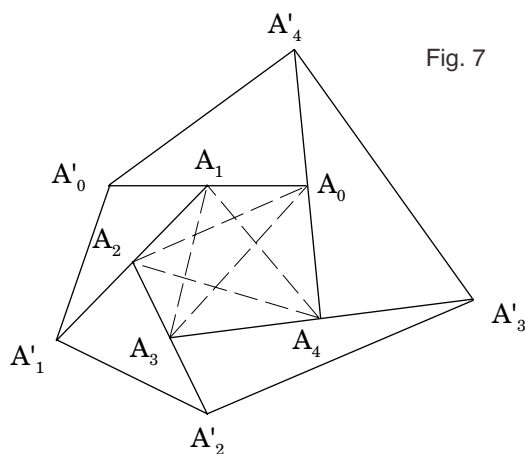


Fig. 7

Q13 : Dans le cas particulier des polygones réguliers convexes, trouver la constante k_n telle que $\mathcal{A}' = k_n \mathcal{A}$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n$ si cette limite existe.

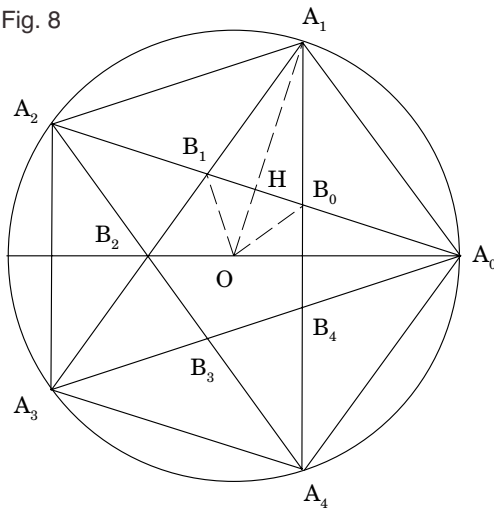
R13 : Posons commodément $A_r = A_s$ dès que $r \equiv s (n)$. Les droites (A_iA_{i+2}) et $(A_{i+1}A_{i-1})$ se coupent en B_i . Notons Q l'aire du polygo-

ne $B_0B_1 \dots B_{n-1}$ et \mathcal{T} la somme des aires des triangles $A_iB_iB_{i-1}$. L'aire de $A_{i+1}A'_iA'_{i+1}$ valant deux fois celle de $A_iA_{i+1}A_{i+2}$, on trouve (Fig. 7)

$$\mathcal{A}' = 5\mathcal{A} - 2\mathcal{T} - 4Q \quad (5)$$

On aura montré la proportionnalité entre \mathcal{A}' et \mathcal{A} si l'on montre que \mathcal{T} et Q sont proportionnelles à \mathcal{A} . Supposons maintenant notre polygone régulier et convexe.

Fig. 8



Dans la Fig.8, notons $OA_0 = l$. On a :

$$\mathcal{A} = \frac{n}{2} OA_0 \cdot OA_1 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{nl^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \quad (6)$$

Comme $OT = OB_0 \cos \frac{\pi}{n} = OA_1 \cos \frac{2\pi}{n}$, on

$$\text{déduit } OB_0 = \frac{\cos(2\pi/n)}{\cos(\pi/n)} l.$$

Le polygone $B_0B_1 \dots B_{n-1}$ est donc l'image de $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ par une similitude de rapport $r = \frac{\cos(2\pi/n)}{\cos(\pi/n)}$, soit :

$$Q = \frac{\cos^2(2\pi/n)}{\cos^2(\pi/n)} \mathcal{A} \quad (7)$$

Notons que l'on peut éviter l'emploi des similitudes en exprimant Q comme somme des aires des triangles OB_iB_{i+1} .

Par ailleurs :

$$\mathcal{T} = n \frac{B_0B_1 \cdot A_1H}{2} \quad (8)$$

avec :

$$\begin{cases} B_0B_1 = 2B_0H = 2OH \tan \frac{\pi}{n} = 2l \cos \frac{2\pi}{n} \tan \frac{\pi}{n} \\ A_1H = OA_1 - OH = l(1 - \cos \frac{2\pi}{n}) = 2l \sin^2 \frac{\pi}{n} \end{cases}$$

En remplaçant dans (8) et compte tenu de (6), on obtient

$$\mathcal{T} = 2 \cos \frac{2\pi}{n} \cdot \tan^2 \frac{\pi}{n} \mathcal{A} \quad (9)$$

Les formules (5), (7) et (9) entraînent après simplification :

$$\mathcal{A}' = k_n \mathcal{A} \quad \text{avec } k_n = 5 - 4 \cos \frac{2\pi}{n}.$$

On retrouve les valeurs $k_3 = 7$ et $k_4 = 5$ obtenues précédemment. On trouve aussi

$$k_5 = 6 - \sqrt{5}.$$

Le coefficient k_n est une fonction décroissante de n qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Nous pouvons maintenant donner une réponse négative à la question **Q12** :

R12 : Prenons des pentagones. S'il y avait proportionnalité, on aurait $\mathcal{A}' = (6 - \sqrt{5})\mathcal{A}$ d'après **R13**. Choisissons un pentagone convexe $A_0A_1A_2A_3A_4$ dont les sommets sont tous à coordonnées entières dans un repère orthonormal donné (O, \vec{i}, \vec{j}) . Par triangulation, les aires \mathcal{A} et \mathcal{A}' seront la somme des aires de triangles de sommets à coordonnées entières, donc rationnelles (en effet l'aire du triangle ABC s'écrit :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} | \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{AB}, \vec{AC}) |.$$

Par suite $\sqrt{5}$ serait rationnel, ce qui est à rejeter.

NB. : La non proportionnalité des aires dans le cas $n = 5$ pourrait se montrer expérimentalement à l'aide du logiciel Cabri Géomètre.

7. Remarques et prolongements

Le problème **Q1** est affine et peut donc se résoudre sans avoir recours à la notion d'angle ou à de quelconques ingrédients métriques. En d'autres termes, le produit vectoriel de la preuve **R14** peut être remplacé par le déterminant. L'aire géométrique du triangle ABC peut aussi être remplacée par l'aire algébrique $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$,

et dans ce contexte, le rapport des aires

annoncé en **Q1** peut être prouvé sans vérifier que le petit triangle est bien à l'intérieur du grand.

En fait, l'existence d'un rapport d'aires constant est immédiat dès que A, B, C forment un repère affine du plan, et cela pour n'importe quelle construction géométrique affine permettant de passer de ABC à A'B'C'. Une telle construction revient à la donnée d'une bijection affine f transformant respectivement A, B, C en A', B', C' et **Q1** se résout en écrivant :

$$\det(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) = (\det l) \cdot \det(\vec{AB}, \vec{AC})$$

où l représente la partie linéaire de f . Une première généralisation de **Q1** sera de choisir une autre application affine f . Les points A', B', C' pourront, par exemple, se déduire de A, B, C

par les relations $\vec{AA'} = a \vec{AB}$, $\vec{BB'} = b \vec{BC}$

et $\vec{CC'} = c \vec{CA}$ où a, b, c sont des réels donnés à l'avance.

Dans ce cas :

$$\begin{cases} \vec{A'B'} = (1 - a - b) \vec{AB} + b \vec{AC} \\ \vec{A'C'} = -a \vec{AB} + (1 - c) \vec{AC} \end{cases}$$

et le rapport des aires sera :

$$\det l = \begin{vmatrix} 1 - a - b & -a \\ b & 1 - c \end{vmatrix} = 1 - (a + b + c) + ab + bc + ca.$$

On retrouve $\det l = 7$ pour $a = b = c = 2$.

Une deuxième généralisation possible consiste à se placer dans l'espace de dimen-

sion 3 et à construire un tétraèdre $A'B'C'D'$ à partir d'un tétraèdre $ABCD$ donné en n'utilisant que des constructions affines (la Fig. 6 peut être imaginée dans l'espace). Le rapport des volumes de ces tétraèdres sera constant puisque :

$$\det(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}, \vec{A'D'}) = (\det l) \cdot \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}).$$

Si l'on suppose par exemple $\vec{AA'} = a \vec{AB}$, $\vec{BB'} = b \vec{BC}$, $\vec{CC'} = c \vec{CD}$ et $\vec{DD'} = d \vec{DA}$

où a, b, c sont des réels, on obtient :

$$\begin{cases} \vec{A'B'} = (1-a-b) \vec{AB} + b \vec{AC} \\ \vec{A'C'} = -a \vec{AB} + (1-c) \vec{AC} + c \vec{AD} \\ \vec{A'D'} = -a \vec{AB} + (1-d) \vec{AD} \end{cases}$$

En notant σ_i le i -ème polynôme symétrique élémentaire des variables a, b et c , on trouve :

$$\det l = 1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3,$$

formule qui pourrait se généraliser à une dimension n quelconque.

Références

- [1] Activités Mathématiques en 4-3ème, Brochure APMEP n°33, tome 1, 1979.
- [2] Delande G., Le problème de l'indien confronté à son tour de garde, Revue Math-Jeunes n°50, pp.29-32, 1991.
- [3] Friedelmeyer J.-P. et le groupe d'Histoire des Mathématiques de l'Irem de Strasbourg, "Les aires : outils heuristique, outil démonstratif", Revue Repères-Irem n°31, avril 1998.
- [4] Manuel scolaire Term. S, Ens. de Spécialité, Coll. Terracher, éd.1998. On retrouve la question Q3 sous l'angle R3.2 à l'ex.42 p.155.
- [5] Manuel scolaire Term. S, Ens. de Spécialité, Coll. Transmath. La question Q3 est abordée pp.16-17.
- [6] Mercier D.-J., "Une figure intéressante", APMEP n°392, pp.49-59, 1994.