Exercice 1 *Soient* α *et* β *deux réels distincts, strictement positifs, tels que* $\alpha+\beta=1$*. On considère la surface* $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ *définie par*

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\alpha}+\frac{z^2}{\beta}-1=0\right\}.$$

On se propose d'étudier les points extrémaux de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$*. A cette fin on introduit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & v=(x,y,z) & \mapsto & \|v\|^2=x^2+y^2+z^2. \end{array}$$

On note g *la restriction de* f *à* $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ *et on définit un point extrémal de* $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ *comme étant un point qui maximise* g*.*

1) Donner, à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, une condition nécessaire pour qu'un point de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ *soit extrémal.*

2) a) Exprimer $g(x,y,z)$ *en fonction de* z*.*
b) Exprimer $g(x,y,z)$ *en fonction de* x *et* y*.*
c) Déterminer les points extrémaux de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$*.*

3) Que se passe-t-il si $\alpha=\beta$ *?*

Solution : On ne peut répondre à la première question que si l'on connaît les multiplicateurs de Lagrange et le résultat concernant les extrema liés. Voici un bref rappel :

Considérons des applications f, g_1, ..., g_m de classe C^1 définies sur un ouvert U d'une espace vectoriel normé (pas forcément de dimension finie) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E}=\{x\in U\,/\,g_1(x)=...=g_m(x)=0\}.$$

On appelle *extremum lié de* f *pour les conditions* $g_1(x)=...=g_m(x)=0$ tout extremum de la restriction $f|_{\mathcal{E}}$ de f à $\mathcal{E}$. Le résultat important à connaître est le suivant :

> **Théorème** {[1], §. 8.5.7} : On suppose qu'en tout point $x\in U$ les différentielles $dg_1(x)$, ..., $dg_m(x)$ sont linéairement indépendantes. Si f admet un extremum lié en a, alors il existe des réels λ_1, ..., λ_m tels que $df(a)=\lambda_1 dg_1(a)+...+\lambda_m dg_m(a)$.

---

[0] [ufop0036] v1.00 /cmonexercies3 /cmonqr4 Site Web MegaMaths

Exercice II des "Concours nationaux des Impôts - Inspecteur-élève analyste (interne & externe) 2009.

Les réels λ_1, ..., λ_m sont appelés des *multiplicateurs de Lagrange*.
Retournons à notre exercice...

1) La fonction $v = (x, y, z) \mapsto h(v) = \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha} + \frac{z^2}{\beta} - 1$ est de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, et la différentielle

$$dh(v) = \frac{2x}{\alpha}dx + \frac{2y}{\alpha}dy + \frac{2z}{\beta}dz$$

ne s'annule jamais sur U. On peut appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange : si $v \in \mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ est un point extrémal, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(v) = \lambda dh(v)$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x/\alpha \\ 2y = 2\lambda y/\alpha \\ 2z = 2z\lambda/\beta \end{cases} \quad \text{ou encore :} \quad (S) \begin{cases} x(\alpha - \lambda) = 0 \\ y(\alpha - \lambda) = 0 \\ z(\beta - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Comme $(0,0,0) \notin \mathcal{E}_{\alpha,\beta}$, l'une des coordonnées de v n'est pas nulle, et le système (S) montre que $\lambda = \alpha$ ou β.

Cas n°1 : Si $\lambda = \alpha$, (S) donne $z = 0$, et les points de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ qu'il faut retenir sont les $v = (x, y, 0)$ avec $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha} = 1$. On reconnaît l'équation d'un cercle $\mathcal{C}$ dans le plan xOy. C'est la trace de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ sur ce plan : $\mathcal{C} = \mathcal{E}_{\alpha,\beta} \cap xOy$.

Cas n°2 : Si $\lambda = \beta$, (S) donne $x = y = 0$, d'où $v = (0, 0, \pm\sqrt{\beta})$. Ici v est un sommet de l'ellipsoïde appartenant à l'axe des z.

2.a) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \alpha\left(1 - \frac{z^2}{\beta}\right) + z^2 = \alpha + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)z^2$.

2.b) $g(x,y,z) = x^2+y^2+\beta\left(1 - \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\alpha}\right) = \beta+\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)x^2+\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)y^2$.

2.c) **Cas n°1** : Les points de $\mathcal{C}$ sont susceptibles d'être des extrema. Si $v = (x, y, 0) \in \mathcal{C}$, alors $g(v) = x^2 + y^2 = \alpha$.
D'après (2.a), pour tout $v = (x, y, z) \in \mathcal{E}_{\alpha,\beta}$,

$$g(x,y,z) = \alpha + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)z^2,$$

donc $g(x,y,z) \geq \alpha$ si $\alpha < \beta$, et $g(x,y,z) \leq \alpha$ si $\alpha > \beta$. Les points de $\mathcal{C}$ sont donc des minima si $\alpha < \beta$, et des maxima si $\alpha > \beta$.

Cas n°2 : On a $g(0,0,\pm\sqrt{\beta}) = \beta$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{E}_{\alpha,\beta}$,

$$g(x,y,z) = \beta + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)x^2 + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)y^2$$

d'après (2.b), donc $g(x,y,z) \leq \beta$ si $\alpha < \beta$, et $g(x,y,z) \geq \beta$ si $\alpha > \beta$. Les sommets $(0,0,\pm\sqrt{\beta})$ sont donc des maxima si $\alpha < \beta$, et des minima si $\alpha > \beta$.

3) Si $\alpha = \beta$, le système (S) devient

$$(S) \quad \begin{cases} x(\alpha - \lambda) = 0 \\ y(\alpha - \lambda) = 0 \\ z(\alpha - \lambda) = 0 \end{cases}$$

ce qui impose d'avoir $\lambda = \alpha$, sans aucune condition exploitable sur x, y et z. Mais $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ est maintenant une sphère de rayon $\sqrt{\alpha}$, et tous les points de cette sphère sont à égale distance de son centre ! Dans ce cas g est une fonction constante (égale à α) et tous les points de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ sont à la fois des minima et des extrema.

References

[1] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de Mathématiques Spéciales, Volume **3**, Topologie et Eléments d'Analyse, Masson, 1989.