Année 2009

Epreuve n°3

Durée : 3 heures - Coefficient : 4

Le candidat traitera obligatoirement le sujet ou l'un des deux sujets correspondant à l'option formulée dans sa demande d'admission à concourir:

Il trouvera ces sujets aux pages suivantes du présent fascicule :

Page 3 : Option Droit privé (deux sujets) ;
Page 4 : Option Mathématiques et statistiques (un sujet).

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie informatisée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne devra porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc...) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

Tournez la page S.V.P.

MATHÉMATIQUES

***

Code-matière 033

L'usage des calculatrices est autorisé.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre souhaité par le candidat tant qu'il assure la lisibilité du tout pour le correcteur. Il est donc conseillé au candidat de prendre connaissance de la totalité du sujet avant de l'aborder

-I-

On considère un ouvert de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall\, (x,y,z) \in \Omega \quad \forall\, \lambda > 0 \quad (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in \Omega$$

Une fonction f définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite positivement homogène de degré $r \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall\, \lambda > 0 \quad \forall\, (x,y,z) \in \Omega \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^r f(x,y,z)$$

1. Montrer que les fonctions f_1 et f_2 suivantes sont positivement homogènes sur Ω_f et Ω_g à préciser, et déterminer leurs degrés.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1(x,y,z) & = & xy + yz + zx \\ f_2(x,y,z) & = & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array} \right.$$

2.
   (a) Démontrer que si f et g sont positivement homogènes de degrés respectifs r et s, définies sur Ω, avec g ne s'annulant pas sur Ω, alors les fonctions $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ sont positivement homogènes sur Ω de degrés à préciser.

   (b) Montrer que, si f est positivement homogène sur Ω de degré r, et admet des dérivées partielles continues sur Ω alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ sont positivement homogènes sur Ω de degrés à déterminer.

   (c) On suppose que f est positivement homogène de degré r sur Ω et que f est de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, sur Ω.
   Démontrer que pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \leq n$ la dérivée $\dfrac{\partial^n f}{\partial^\alpha x \partial^\beta y \partial^\gamma z}$ est positivement homogène de degré à déterminer.

3. On considère une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
   Démontrer que f est positivement homogène de degré r sur Ω si et seulement si f vérifie l'équation suivante [1] :

$$\forall\,(x,y,z)\in\Omega \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=rf(x,y,z)$$

Indication : On introduira la fonction $\phi:\ \lambda\to f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

-II-

Soient α et β deux réels distincts, appartenant à $]0;1[$, tels que $\alpha+\beta=1$.
On considère la surface $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ définie par :

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\alpha}+\frac{z^2}{\beta}-1=0\right\}$$

On se propose d'étudier les points extrémaux de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$. À cette fin on introduit la fonction suivante :

$$f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ v=(x,y,z) & \longrightarrow & \|v\|^2=x^2+y^2+z^2\end{pmatrix}$$

On note g la restriction de f à $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ et on définit un point extrémal de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ comme étant un point qui maximise g.

1. Donner, à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, une condition nécessaire pour qu'un point de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ soit extrémal.
2. (a) Exprimer $g(x,y,z)$ en fonction de z.
   (b) Exprimer $g(x,y,z)$ en fonction de x et y.
   (c) Déterminer les points extrémaux de $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$.
3. Que se passe-t-il si $\alpha=\beta$?

-III-

On considère un espace vectoriel V, de dimension finie $n\geq 2$, défini sur un corps $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{B}(V)$ des formes bilinéaires de $V\times V$ dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{S}(V)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques [2] et $\mathcal{A}(V)$ celui des formes bilinéaires antisymétriques [3].

a- Démontrer que $\mathcal{S}(V)$ et $\mathcal{A}(V)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{B}(V)$.

b- Démontrer que

$$\mathcal{B}(V)=\mathcal{S}(V)\oplus\mathcal{A}(V)$$

c- Déterminer les dimensions de $\mathcal{B}(V)$, $\mathcal{S}(V)$ et $\mathcal{A}(V)$ en fonction de la dimension n de V.

1. Cette équation est appelée équation d'Euler.
2. Une forme bilinéaire φ est symétrique si pour tout $(x,y)\in V\times V$ on a $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$
3. Une forme bilinéaire φ est antisymétrique si pour tout $(x,y)\in V\times V$ on a $\varphi(x,y)=-\varphi(y,x)$

-IV-

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $p \in]0,1[$ un réel fixé.
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = n] > 0$$

Soit Y une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, m \in [\![0, n]\!] \quad \mathbb{P}[Y = m | X = n] = \mathrm{C}_n^m (1-p)^{n-m} p^m$$

On pose $Z = X - Y$.

Rappels :
Si V est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction génératrice G_V pour tout $s \in]0,1[$ par :

$$G_V(s) = \mathbb{E}\left[\, s^V \,\right]$$

Cette fonction, de classe $\mathcal{C}^\infty$, caractérise la loi de la variable aléatoire V, c'est-à-dire que si V et W sont deux variables aléatoires de même fonction génératrice alors V et W ont même loi.

1. On suppose que X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = n] = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

   (a) Démontrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.
   (b) Démontrer que Y et Z sont indépendantes.
   (c) Démontrer que Z suit une loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$.

2. On suppose dans que Y et Z sont indépendantes. Soient s et t appartenant à $]0,1[$.
   (a) Démontrer que $\mathbb{E}\left[\, s^Y t^Z \,\right] = \mathbb{E}\left[\, (ps + (1-p)t)^X \,\right]$.
   (b) Prouver que $\mathbb{E}\left[\, s^Y t^Z \,\right] = \mathbb{E}\left[\, s^Y \,\right] \mathbb{E}\left[\, t^Z \,\right]$.
   On considère la fonction g définie pour tout $(s,t) \in]0,1[^2$ par $g(s,t) = \ln\left(\mathbb{E}\left[\, s^Y t^Z \,\right]\right)$.
   Prouver que $g(s,t) = g_1(s) + g_2(t)$ pour tout $(s,t) \in]0,1[^2$.
   (c) Calculer la dérivée seconde de $\ln(G_X(u))$ pour tout $u \in]0,1[$.
   Déduire du 2(b) une équation vérifiée par G_X, G_X' et G_X'' sur $]0,1[$.
   (d) Montrer que la fonction génératrice d'une loi de Poisson est solution de l'équation précédente.