

- à affectation régionale Île-de-France
- à affectation nationale

ANNÉE 2007

---

## ÉPREUVE N° 3

DURÉE : 3 heures. – COEFFICIENT : 4

---

*Le candidat traitera obligatoirement le sujet ou l'un des deux sujets correspondant à l'option formulée dans sa demande d'admission à concourir.*

Il trouvera ces sujets aux pages suivantes du présent fascicule :

Pages 3 et 4 : Option Droit privé (deux sujets) ;

Pages 5, 6, 7 et 8 : Option Mathématiques et statistiques (un sujet).

### **Recommandations importantes**

*Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie informatisée.*

*Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne devra porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.*

*Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.*

# MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Code-matière 033

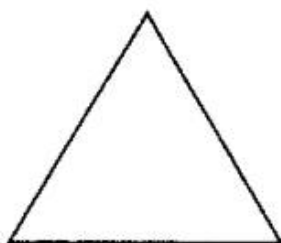
*L'usage de la calculatrice est autorisée.*

**Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.**

*Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.*

**-I-**

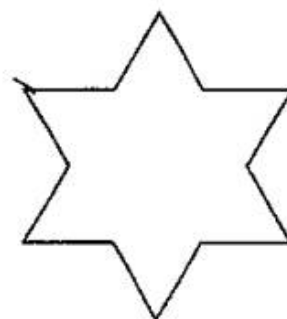
Soit  $\mathcal{P}_0$  un triangle équilatéral de côté  $l = l_0$ . On divise chaque côté en trois segments de même longueur  $l_1$ . On construit sur chaque segment médian un triangle équilatéral de côté  $l_1$ . On obtient le polygone  $\mathcal{P}_1$  :



$\mathcal{P}_0$



Procédé de construction

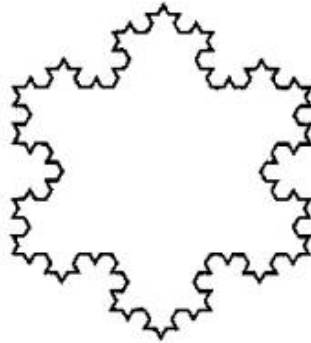


$\mathcal{P}_1$

On itère indéfiniment ce processus de construction et on note  $\mathcal{P}_n$  le polygone obtenu après la  $n$ -ième application du procédé de construction. On note  $c_n$  le nombre de côté de  $\mathcal{P}_n$ ,  $l_n$  la longueur de ses côtés,  $p_n$  son périmètre et  $\mathcal{A}_n$  son aire.

1. Calculer  $c_n$ ,  $l_n$ ,  $p_n$  et  $\mathcal{A}_n$  pour  $n = 0, 1, 2$ .
2. Démontrer que  $c_{n+1}$  et  $c_n$  sont liés par une relation de récurrence, puis en déduire  $c_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Démontrer que  $l_{n+1}$  et  $l_n$  sont liés par une relation de récurrence, puis en déduire  $l_n$  en fonction de  $n$  et  $l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Calculer  $p_n$  en fonction de  $n$  et  $l$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$
5. On pose  $u_n = \mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 
  - (a) Calculer  $u_0 = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0$  et  $u_1 = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$
  - (b) Démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{4}{9}$ , puis calculer  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - (c) En déduire  $\mathcal{A}_n$  en fonction de  $n$  et  $l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
6. Démontrer que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une infinité de polygones de périmètres plus grands que  $10^n$  et d'aires plus petites que 1.



-II-

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x}$$

On définit formellement la suite  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  des fonctions composées par :

$$\begin{cases} f^0 &= \text{Id} \\ f^n &= f \circ f^{n-1} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

On note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble de définition de la fonction  $f^n$ . En particulier  $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}$

#### A— Étude des fonctions $f^n$ , $n \geq 1$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_1$  de la fonction  $f^1 = f$ , puis l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_2$  de la fonction  $f^2$ .
2. Démontrer que  $x \in \mathcal{D}_n$  si et seulement si  $f^{n-1}(x) \neq 0$  et  $x \in \mathcal{D}_{n-1}$ .
3. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{R} \setminus ]0; 1[ \subset \mathcal{D}_n$$

Indication : considérer  $x < 0$ , puis  $x \geq 1$ .

En déduire que les solutions de l'équation  $f^n(x) = 0$  appartiennent à  $]0; 1[$ .

4. Étudier les variations de  $f$  sur  $]0; 1[$ , puis en déduire les variations de  $f^n$  sur  $]0; 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
5. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe un unique  $x_n \in ]0; 1[$  tel que  $f^n(x_n) = 0$ .
6. Démontrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante. En déduire qu'elle converge vers  $l \in \left] \frac{4}{5}; 1 \right]$ .

## B— Suite récurrente

Avec les notations de la partie précédente on pose :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^* \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

On fixe  $u_0 \in \mathcal{D}$  et on considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que si  $u$  converge alors sa limite appartient à  $\{1; 4\}$ .
2. Étudier la suite  $u$  lorsque le premier terme est  $u_0 = 1$ , puis lorsque  $u_0 = 4$ .
3. On suppose que  $u_0 \in \mathcal{D} \setminus \{1; 4\}$ 
  - (a) Démontrer que si  $u_0 > 4$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_n > 4$ .  
En déduire que si  $u_0 \in \mathbb{R} \setminus [0; 4]$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $u_n > 4$ .  
Démontrer que si  $u_0 \in \mathbb{R} \setminus [0; 4]$  alors  $u$  est décroissante.  
Conclure.
  - (b) Démontrer que si  $u_0 \in ]1; 4[$  alors  $u$  est croissante, puis en déduire qu'elle converge vers 4.
  - (c) Démontrer que si  $u_0 \in \mathcal{D} \cap ]0; \frac{4}{5}[$  alors  $u$  converge vers 4.
  - (d) Démontrer que si  $u_0 \in \mathcal{D} \cap ]\frac{4}{5}; 1[$  alors il existe  $k \geq 1$  tel que  $u_k \in \mathcal{D} \cap ]0; \frac{4}{5}[$ .
  - (e) Conclure

## -III-

On considère un appareil  $\mathcal{A}$  constitué de trois composants  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ . On suppose que ces trois composants fonctionnent de manières indépendantes<sup>1</sup>.

- Le composant  $C_1$  a une probabilité  $p_1 = 0,1$  de tomber en panne.
  - Le composant  $C_2$  a une probabilité  $p_2 = 0,07$  de tomber en panne.
  - Le composant  $C_3$  a une probabilité  $p_3 = 0,3$  de tomber en panne.
1. Calculer la probabilité pour que l'appareil  $\mathcal{A}$  tombe en panne.
  2. Déterminer la probabilité que  $C_3$  tombe en panne sachant que l'appareil est tombé en panne.
  3. Le composant  $C_3$  étant très fragile on adapte  $\mathcal{A}$  en adjoignant à  $C_3$  un composant  $C'_3$  identique et indépendant.  
Dès que  $C_3$  tombe en panne  $C'_3$  prend le relais.  
Déterminer la probabilité pour que cette évolution de l'appareil  $\mathcal{A}$  tombe en panne.  
Calculer la probabilité que le système  $C_3 \cup C'_3$  soit en panne sachant que l'appareil  $\mathcal{A}$  est en panne.

## -IV-

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $]0, 1[$ .

On définit la variable aléatoire  $Y$  par :

$$Y = -\ln(X)$$

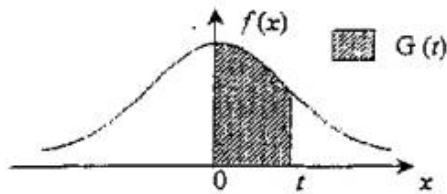
1. Déterminer la densité de probabilité  $g$  de la variable aléatoire  $Y$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .

<sup>1</sup>En particulier leurs pannes sont indépendantes

ANNEXE

au sujet de mathématiques et statistiques

AIRES DE LA COURBE NORMALE CENTRÉE RÉDUITE



Cette table donne les aires situées en dessous de la courbe normale centrée réduite  $f$  entre 0 et  $t \geq 0$ .

$$P(0 \leq T \leq t) = G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-x^2/2} dx$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4773	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,5000
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000