Concours "Inspecteur des Impôts" session 2006

Epreuve 3 : Mathématiques & Statistiques

Enoncé

Concours nationaux : Inspecteur-élève généraliste (internes et externes)

- à affectation régionale Ile-de-France
- à affectation nationale

http ://megamaths.perso.neuf.fr/

[0] [inspecteurimpots2006ep3e] v1.00

Durée de l'épreuve : 3h. L'usage de la calculatrice est autorisé. Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

Partie I

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère une droite $\mathcal{D}$ sur laquelle on définit un repère normé $(O, \overrightarrow{i})$. On désigne par A_p $(p \in \mathbb{Z})$ le point d'abscisse p et par M le point d'abscisse x où x est un nombre réel. On définit l'application f qui, à l'abscisse de tout point M de $\mathcal{D}$, associe le produit des distances de M aux deux points A_p les plus proches.

1.a) Vérifier que, si $E(x)$ désigne la partie entière[1] de x, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - E(x))(E(x) + 1 - x)$$

b) Montrer que f est 1-périodique.

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

d) Etudier les variations de f.

e) On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ complétant le repère $(O, \overrightarrow{i})$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2) On considère à présent la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = E(x+1)\, f(x)\,.$$

a) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $g(x)$ pour tout $x \in [p, p+1[$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

d) Calculer l'aire $\mathcal{A}_p$ du domaine compris entre $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = p$ et $x = p+1$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{A}_p$. Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II

[1] Si x est un nombre réel, sa partie entière est le plus grand entier inférieur ou égal à x et vérifie : $x - 1 < E(x) \leq x$.

Dans l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les matrices A, I_n et P suivantes ;

$$A = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 2a & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix} \quad \text{où } a \in]0,1],$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer, pour tout entier $k \in [1, n]$, le déterminant $\det(A - kaI_n)$.

2) Calculer P^{-1} et prouver que $A = P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale à déterminer.

3) Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4) Déterminer la limite suivante : $\lim_{p\to+\infty} A^p$.

Partie III

Dans la statistique d'un événement suffisamment rare dont les issues possibles sont les x_i, on a noté les effectifs n_i correspondants :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	229	325	257	119	50	17	2	1	0

1) Calculer la moyenne de cette distribution.

2) Est-il raisonnable de penser que cette distribution est approximativement de Poisson ? On calculera pour cela les effectifs théoriques de la loi de Poisson ayant la même moyenne m et le même effectif total $N = \sum_{i=1}^{8} n_i$.

3) Calculer l'écart-type σ de la distribution statistique. En déduire que la réponse faite à la question précédente est vraisemblable.

Partie IV

On dispose de nombreuses boules blanches, de nombreuses boules rouges et d'une urne contenant initialement 3 boules blanches et 7 boules rouges indiscernables au toucher. Un tirage consiste à tirer une boule de l'urne.

Si c'est une boule rouge, on la conserve, puis l'on remet une boule blanche dans l'urne. Par contre, si c'est une boule blanche, on la conserve, mais l'on ne remet pas de boule dans l'urne.
On procède ainsi à trois tirages successifs. Si les trois boules tirées successivement sont toutes de la même couleur, on entreprend alors de jeter un dé non pipé et l'on note le nombre de points fournis par ce dé. Par contre, si les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur, on jette deux dés non pipés et l'on totalise les points de chacun de ces deux dés.

1) Quelle est la probabilité de jeter un seul dé ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 ?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?