

Notations

- ▷ On rappelle que l'on note \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ou nul, \mathbb{Z} l'anneau des entiers relatifs, \mathbb{Q} le corps des nombres rationnels, \mathbb{R} le corps des nombres réels et \mathbb{C} le corps des nombres complexes.
- ▷ On se place dans un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

- ▷ Pour tout vecteur x de E et tout réel positif r , on note $B(x, r)$ (resp. $\overline{B}(x, r)$, resp. $S(x, r)$) la boule ouverte (resp. la boule fermée, resp. la sphère) de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| < r\}, \quad \overline{B}(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| \leq r\} \quad \text{et} \quad S(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| = r\}.$$

- ▷ Pour toute partie A de E , on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A , c'est-à-dire le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A , \overline{A} l'adhérence de A , c'est-à-dire le plus petit fermé contenant A et $\text{Fr}(A)$ la frontière de A :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

- ▷ Si a est un élément de E , on note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .
- ▷ Pour toute partie fermée et non vide F de E et tout $x \in E$, on admet sans démonstration que l'ensemble

$$\{\|x - f\|, f \in F\}.$$

admet une borne inférieure notée $\inf_{f \in F} \|x - f\|$ et on pose

$$d_F(x) = d(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|.$$

- ▷ On pose alors $\Gamma(x) = \{f \in F \mid \|x - f\| = d(x, F)\}$. C'est donc l'ensemble (éventuellement vide) des points de F pour lesquels la borne inférieure est atteinte.
- ▷ **Lorsque $\Gamma(x)$ est un singleton, on note $\pi(x)$ son unique élément.**
- ▷ Si u et v sont deux vecteurs de E , on appelle segment $[u, v]$ l'ensemble défini par :

$$[u, v] = \{x \in E \mid \exists t \in [0, 1], x = (1 - t)u + tv\}.$$

- ▷ Soient A une partie de E et $u : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $0 \in \overline{A}$. On dit que $u(h) = \underset{h \rightarrow 0}{o}(\|h\|)$ lorsqu'il existe une fonction δ définie sur un voisinage V de 0 telle que

$$\forall h \in V \cap A, u(h) = \delta(h) \|h\| \quad \text{et} \quad \delta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

- ▷ Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que l'on dit que f est différentiable en un élément a de Ω lorsqu'il existe une forme linéaire $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(a + h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(\|h\|).$$

Lorsqu'elle existe, ℓ est unique et est notée $df(a)$ et l'image $\ell(h)$ du vecteur h de E par ℓ est notée $df(a) \cdot h$. Le gradient de f en a est alors l'unique vecteur v de E vérifiant :

$$\forall h \in E, df(a) \cdot h = \langle v, h \rangle.$$

On le note $\nabla f(a)$. Ainsi, sous réserve d'existence, on a :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \underset{h \rightarrow 0}{o}(\|h\|).$$

- ▷ Pour tout réel x , on note $[x]$ sa partie entière.

Le problème a pour objectif d'étudier la différentiabilité de la fonction $d_F : x \mapsto d(x, F)$ en fonction de la partie F .

On fixe donc une partie F de E **non vide** et **fermée**.

Partie I — Résultats préliminaires

1. Montrer que, pour tout vecteur x de E , $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

2. a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $f \in F$, on a :

$$d_F(y) \leq \|y - x\| + \|x - f\|.$$

b) En déduire que d_F est 1-lipschitzienne.

3. Soient x un vecteur de E et x_0 un vecteur de F . On pose $r = \|x - x_0\|$ et $K = \overline{B}(x, r) \cap F$.

a) Montrer que K est une partie compacte et non vide de E .

b) Montrer que $\Gamma(x)$ est non vide.

4. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est en outre une partie convexe de E .

a) Montrer que, quels que soient les vecteurs u et v de E , on a : $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

b) Soit x un vecteur de E et soient f et f' deux éléments de $\Gamma(x)$. On suppose que $f \neq f'$.

Montrer que :
$$\left\| \frac{1}{2}(f + f') - x \right\|^2 < d(x, F)^2.$$

En déduire que, pour tout vecteur x de E , $\Gamma(x)$ est un singleton.

Ainsi, avec les notations de l'introduction, $\Gamma(x) = \{\pi(x)\}$.

c) On souhaite montrer que : $\forall x \in E, \forall f \in F, \langle f - \pi(x), x - \pi(x) \rangle \leq 0$.

Pour cela, on fixe des éléments x de E et f de F . On introduit la fonction

$$\varphi: \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|(1-t)\pi(x) + tf - x\|^2 \end{cases}.$$

i. Montrer que φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

ii. Justifier que φ admet un minimum en 0. Conclure.

d) On fixe un vecteur x de E . Soit z un vecteur de F . On suppose que :

$$\forall f \in F, \langle f - z, x - z \rangle \leq 0.$$

Montrer que $z = \pi(x)$.

Partie II — Étude en dimension 1

On suppose, dans toute cette partie, que $E = \mathbb{R}$, et que \mathbb{R} est muni de sa structure euclidienne canonique.

5. Expliciter $d_{\{0\}}$, puis déterminer l'ensemble des points où $d_{\{0\}}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

Dans les questions 6 à 10, on suppose que $F = \mathbb{Z}$ et on étudie donc la fonction $d_{\mathbb{Z}}$.

6. Montrer que \mathbb{Z} est fermé dans \mathbb{R} .
7. Justifier que $d_{\mathbb{Z}}$ est 1-périodique. Étudier la parité.
8. Pour tout x élément de $[0, 1[$, expliciter, en justifiant, $d_{\mathbb{Z}}(x)$ en fonction de x . Tracer le graphe de $d_{\mathbb{Z}}$.
9. Étudier la dérivabilité de $d_{\mathbb{Z}}$ en tout point de $[0, 1[$.
10. Développement en série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.
- Calculer les coefficients de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.
 - La série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$ converge-t-elle simplement/uniformément/normalement vers $d_{\mathbb{Z}}$?
 - En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
On commencera par justifier la convergence des séries.

Pour toute la suite de la partie, on fixe une partie fermée F de \mathbb{R} . On note Ω le complémentaire de F . C'est donc une partie ouverte de \mathbb{R} .

11. On définit, sur Ω , une relation binaire \sim de la manière suivante : étant donnés deux éléments x et y de Ω , on dit que x est en relation avec y lorsqu'il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ inclus dans Ω et contenant les éléments x et y :

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, \quad x \sim y \iff (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \text{ et } (x, y) \in]a, b[\text{ et }]a, b[\subset \Omega).$$

- Montrer que \sim est une relation d'équivalence.
- Montrer que les classes d'équivalences sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints.
- En déduire qu'il existe une famille $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, indexée par un ensemble I fini ou dénombrable, telle que

$$\Omega = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[.$$

12. Soit x un élément de Ω . Il existe donc un unique i_0 élément de I tel que $x \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$.
- Exprimer $d_F(x)$ à l'aide de x , de a_{i_0} et b_{i_0} .
 - Étudier la dérivabilité de d_F en x .
13. On suppose dans cette question que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Soit x un élément de $\overset{\circ}{F}$. Étudier la dérivabilité de d_F en x .

14. Étude à la frontière.

- a) On suppose, dans cette question, que $F = [0, 1]$. Expliciter $\text{Fr}(F)$.
 d_F est-elle dérivable en un point de $\text{Fr}(F)$?
- b) Dans cette question, on pose : $F = \mathbb{R} \setminus \Omega$ où $\Omega = \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} \right[$, la réunion étant prise sur l'ensemble des entiers naturels n tels que $n \geq 2$.
- Justifier rapidement que $\Omega \subset \left] 0, \frac{1}{2} \right[$, que F est un fermé de \mathbb{R} et que $0 \in \text{Fr}(F)$.
 - Soit $x \in \Omega$. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $n \geq 2$ et $x \in \left] \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} \right[$.
 Montrer que $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
 - En déduire qu'il existe un réel C strictement positif tel que $\forall x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$, $d_F(x) \leq Cx^3$.
 - Montrer que d_F est dérivable à droite en 0 et en calculer $(d_F)'_d(0)$.
 - d_F est-elle dérivable en 0 ?

Partie III — Étude de cas particuliers en dimension n

15. On fixe un vecteur x_0 de E et on suppose, dans cette question seulement, que $F = \{x_0\}$.

- a) Expliciter d_F . Soit x un élément de E . Expliciter $\Gamma(x)$.
- b) Montrer que la fonction $g: \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \|x - x_0\|^2 \end{cases}$ est différentiable sur E et calculer son gradient.
- c) En déduire que d_F est différentiable sur $E \setminus \{x_0\}$ et montrer que :

$$\forall a \in E \setminus \{x_0\}, \nabla d_F(a) = \frac{1}{\|a - x_0\|} (a - x_0).$$

- d) Étude de la différentiabilité de d_F en x_0 . Supposons que d_F soit différentiable en x_0 .
- Montrer que, pour tout vecteur h de E , on a :

$$d_F(x_0 + th) = t \langle \nabla d_F(x_0), h \rangle + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t).$$

- Conclure.

16. On suppose, dans cette question seulement, que F est un sous-espace vectoriel de E , distinct de E .

- a) Montrer que pour tout vecteur x de E , $\Gamma(x)$ est un singleton, et que π (défini dans le préambule du sujet) est le projecteur orthogonal sur F .
- b) Montrer que, pour tout élément a de E , d_F^2 est différentiable en a et calculer son gradient.
- c) En déduire que, pour tout élément a de $E \setminus F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.
- d) On fixe un vecteur a de F . L'objet de cette question est l'étude de la différentiabilité de d_F en a .
- On suppose que d_F est différentiable en a et on pose : $u = \nabla(d_F)(a)$.
 Soit $h \in F^\perp$. Montrer que : $\langle u, h \rangle = \|h\|$.
Indication : on pourra procéder de manière analogue à la question 15.d.
 - Conclure.

17. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$, dont les éléments sont notés en colonne, muni de sa structure euclidienne canonique et que : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^2 \right\}$.
L'objet de cette question est d'étudier la différentiabilité de d_F en $0_{\mathbb{R}^2}$.
- Dessiner l'allure de F .
 - Montrer que F est un fermé de \mathbb{R}^2 .
 - Montrer que $0_{\mathbb{R}^2} \in \text{Fr}(F)$.
 - Montrer que, pour tout vecteur u de \mathbb{R}^2 , $d_F(u) \leq \|u\|^2$.
Indication : on pourra séparer les cas où $u \in F$ et où $u \in \mathbb{R}^2 \setminus F$.
 - En déduire que d_F est différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$ et donner son gradient en $0_{\mathbb{R}^2}$.

Partie IV — Distance à la sphère unité

On suppose, dans cette partie seulement, que : $F = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

F est donc la sphère de centre 0_E et de rayon 1.

18. Soit a un élément de $E \setminus \{0_E\}$. On pose $u = \frac{1}{\|a\|}a$ et on fixe un vecteur y de F .
- Montrer qu'il existe un plan vectoriel \mathcal{P} contenant a , u et y .
 - Montrer que $S = F \cap \mathcal{P}$ est le cercle unité de \mathcal{P} , pour la structure euclidienne sur \mathcal{P} induite par celle de E .
 - Montrer que $\Gamma(a) = \{u\}$.
19. Montrer que, pour tout vecteur a de E : $d_F(a) = \left| \|a\| - 1 \right|$.
20. Montrer que, pour tout vecteur a de E tel que $a \neq 0_E$ et $a \notin F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.
21. Expliciter $\Gamma(0_E)$.
22. Soit a un vecteur de F . Montrer que d_F n'est pas différentiable en a .
Indication : On pourra calculer $d_F(a + ta)$, pour tout t élément de $] -1, 1[$.
23. On fixe un vecteur unitaire v .
- Étudier la dérivabilité en 0 de $\varphi : \begin{cases}] -1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto d_F(tv) \end{cases}$.
 - Conclure quant à la différentiabilité de d_F en 0.

Partie V — Une condition nécessaire de différentiabilité à l'extérieur de F

Dans cette partie, on fixe un vecteur a de $E \setminus F$ et on suppose que d_F est différentiable en a .
On souhaite montrer qu'alors :

$$\Gamma(a) \text{ est un singleton et que } \nabla d_F(a) = \frac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a)).$$

On pose $u = \nabla d_F(a)$.

- 24.** a) Montrer que, pour tout $t > 0$, $d_F(a + tu) - d_F(a) \leq t \|u\|$.
b) En déduire que $\|u\| \leq 1$.

Dans la suite de cette partie, on se donne **un** élément y de $\Gamma(a)$.

- 25.** a) Montrer que pour tout $x \in [a, y]$,

$$\|x - y\| = d_F(a) - \|a - x\|.$$

- b) En déduire que pour tout $x \in [a, y]$,

$$d_F(x) = \|x - y\|.$$

- 26.** On fixe $t \in]0, d_F(a)]$ et on pose $v = \frac{1}{d_F(a)}(a - y)$.

- a) Montrer que

$$d_F(a - tv) = d_F(a) - t.$$

- b) Montrer que

$$\langle u, v \rangle = 1 = \|u\| \|v\|.$$

- c) En déduire que $u = v$ et conclure.

Partie VI — Étude de la réciproque

Dans cette partie, on fixe $a \in E \setminus F$ et on suppose que $\Gamma(a)$ est un singleton. Ainsi, avec les notations du préambule,

$$\Gamma(a) = \{\pi(a)\}.$$

On souhaite montrer que d_F est différentiable en a et que $\nabla(d_F)(a) = \frac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a))$.

- 27.** Dans cette question, on se propose de montrer que :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\pi(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in U, \Gamma(x) \subset V.$$

On va l'établir à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(\pi(a))$ de $\pi(a)$ tel que :

$$\forall U \in \mathcal{V}(a), \exists x \in U, \Gamma(x) \not\subset V.$$

On dispose ainsi d'une suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a et d'une suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, y_p \in \Gamma(x_p) \text{ et } y_p \notin V.$$

On pose : $M = \sup_{p \in \mathbb{N}} \|x_p - a\|$.

a) Justifier succinctement que M est bien défini, puis montrer que $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On note ℓ une valeur d'adhérence de $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

b) Justifier succinctement l'existence de ℓ .

c) Montrer que $\ell \in F \cap (E \setminus V)$.

d) Montrer que $\ell \in \Gamma(a)$, puis conclure.

28. On pose : $R = \|a - \pi(a)\|$.

a) Justifier que $R > 0$ et expliciter $\overline{B}(a, R) \cap F$.

b) Soit x un élément de $B(a, R)$. On fixe un élément y de $\Gamma(x)$.

On considère la fonction $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \|(1-t)x + ty - a\|^2 - R^2 \end{cases}$.

i. Montrer que φ est un trinôme du second degré. Que dire du signe des racines de ce trinôme ?

ii. Montrer que $[x, y] \cap S(a, R)$ est un singleton. On note $p(x, y)$ le point d'intersection.

Il existe donc un unique $t_{x,y} \in [0, 1]$ vérifiant : $p(x, y) = (1 - t_{x,y})x + t_{x,y}y$.

iii. Que vaut $\varphi(t_{x,y})$? En déduire une expression de $t_{x,y}$.

c) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B(a, R), \|x - a\| < \eta \implies \forall y \in \Gamma(x), \|p(x, y) - y\| < \varepsilon.$$

d) En déduire que :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\pi(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in U, \forall y \in \Gamma(x), p(x, y) \in V.$$

29. Pour tout x élément de $B(a, R)$, on note y_x un élément de $\Gamma(x)$. Montrer que :

a) $\forall x \in B(a, R), \|x - p(x, y_x)\|^2 - \|a - p(x, y_x)\|^2 = 2 \langle x - a, a - p(x, y_x) \rangle + \|x - a\|^2$;

b) $\|x - p(x, y_x)\|^2 - \|a - p(x, y_x)\|^2 = 2 \langle x - a, a - \pi(a) \rangle + \underset{x \rightarrow a}{o}(\|x - a\|)$.

30. Montrer que : $d_F^2(x) = d_F^2(a) + \langle x - a, 2(a - \pi(a)) \rangle + \underset{x \rightarrow a}{o}(\|x - a\|)$.

31. En déduire que d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

32. Soit Ω un ouvert inclus dans $E \setminus F$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, $\Gamma(x)$ est un singleton.

Montrer que d_F est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

Partie VII — Une condition nécessaire de différentiabilité en un point de F

Dans cette partie, on fixe un élément a de F et on suppose que d_F est différentiable en a . On souhaite montrer que : $\nabla(d_F)(a) = 0$.

On pose encore : $u = \nabla(d_F)(a)$.

33. Montrer le résultat dans le cas où $a \in \overset{\circ}{F}$.

34. On se place dans le cas où $a \in \text{Fr}(F)$.

a) Montrer que : $d_F(a - tu) = -t\|u\|^2 + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t)$.

b) Conclure.

————— FIN DU SUJET —————