Correction de l'épreuve de mathématique I
Agrégation interne 2020
M.TARQI [1] CPGE Med VI-Kénitra- Maroc

Partie I : drapeaux de sous-espaces vectoriels

1. Il est clair que, pour tout i compris entre 0 et $n-1$, $E_i \subset E_{i+1}$, et comme $e_{i+1} \in E_{i+1} \setminus E_i$ alors $E_i \subsetneq E_{i+1}$. Donc il s'agit bien d'un drapeau total de E.

2. Soit $(E_i)_{0\leq i\leq n}$ un drapeau total de E. On a donc

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_n = E.$$

Puisque il s'agit d'une suite finie de $n+1$ sous-espaces vectoriels strictement croissante (au sens de l'inclusion), alors nécessairement $\dim(E_i) = i$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. Pour $1 \leq i \leq n-1$, on considère une base $(e_1, e_2, ..., e_i)$ une base de E_i. D'après le théorème de la base incomplète il existe un vecteur $e_{i+1} \in E_{i+1} \setminus E_i$ et qui forme avec les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_i$ une base de E_{i+1}. Ainsi $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E, adaptée au drapeau $(E_i)_{0\leq i\leq n}$.

3. Soit $(E_i)_{0\leq i\leq n}$ un drapeau total de E. Construisons par récurrence sur $0 \leq i \leq n-1$ une base orthonormée de E_{i+1}.

Soit $(e_1, e_2, ..., e_i)$ une base orthonormée de E_i (tout espace euclidien admet une base orthonormée) et $f_{i+1} \in E_{i+1} \setminus E_i$ qui forme avec $e_1, e_2, ..., e_i$ une base de E_{i+1}. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(e_1, e_2, ..., e_i, f_{i+1})$ pour construire une base orthonormée de E_{i+1}, les i premiers vecteurs restent inchangés, ainsi on obtient une base orthonormée de E_{i+1} de la forme $(e_1, e_2, ..., e_i, e_{i+1})$, en particulier $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E et aussi est une base adaptée au drapeau $(E_i)_{0\leq i\leq n}$.

4. Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une base de vecteurs propres de u. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $E_i = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_i)$, on vérifie facilement que $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ est un drapeau total de E et que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u(E_i) \subset E_i$.

5. a) Soit $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n-1}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \min\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \\
&\Rightarrow \quad u^{n-1-i}\left(\sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k u^k(x)\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k u^{n-1-i+k}(x) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_i u^{n-1}(x) = 0,
\end{aligned}$$

car pour $k > i+1$, $n-1-i+k > n$ et donc $u^{n-1-i+k}(x) = 0$. Donc $\lambda_i = 0$ puisque $u^{n-1}(x) \neq 0$, ce qui contredit la définition de i. Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ est libre.

La famille $\left(u^{n-j}(x)\right)_{1\leq j\leq k}$ est une sous-famille d'une famille libre donc elle est libre.

b) Posons $E_i = \ker(u^i)$ pour $i \in [\![0,n]\!]$. On a $E_0 = \{0\}$, $E_n = E$ et $E_i \subset E_{i+1}$. Supposons qu'il existe un indice $1 \leq i \leq n-1$ tel que $E_{i+1} = E_i$, on peut le supposer minimal. Alors on aura $E_i = E_k$ pour tout $k \geq i$, en particulier $E_i = E_n$, ce qui entraîne $\ker(u^i) = E$ et donc $u^i = 0$ ce qui contredit la définition de l'indice de nilpotence n. En conclusion $E_i \subsetneq E_{i+1}$ et donc $\left(\ker(u^i)\right)_{0\leq i\leq n}$ est un drapeau total de E.

On vérifie sans peine que, pour chaque $1 \leq i \leq n$, $\left(u^{n-j}(x)\right)_{1\leq j\leq i}$ est une base de E_i, et donc $\left(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ est une base adaptée au drapeau $\left(\ker(u^i)\right)_{0\leq i\leq n}$.

6. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de trigonalisation de u et $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de u représentant l'endomorphisme u dans $\mathscr{B}$. Comme précédemment la famille $(E_i)_{0\leq i\leq n}$ définie par $E_i = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_i)$ est un drapeau total. De plus, on a $t_{ij} = 0$ pour tout $i < j$, donc $u(e_j) = \sum_{i=1}^{j} t_{ij} e_i$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, ce qui montre $u(E_i) \subset E_i$.

Inversement, si $(E_i)_{0\leq i\leq n}$ est un drapeau total stable par u avec $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base adaptée à ce drapeau, alors pour tout k, il existe des scalaires $t_{1k}, t_{2k}, ..., t_{kk}$ tels que $u(e_k) = \sum_{i=1}^{k} t_{ik} e_i$, ce qui montre que la matrice de u dans cette base est triangulaire, donc u est trigonalisable.

7. Supposons u trigonalisable, alors d'après la question précédente E admet un drapeau total stable par u, que l'on note $(E_i)_{0\leq i\leq n}$. Comme dans la question 3., on peut construire dans chaque E_i une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_i)$, alors on voit bien que la matrice dans la base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ est triangulaire supérieure.

Partie II : des groupes quotients

8. a) Si H est un sous-groupe distingué, alors dans ce cas, la loi de groupe de G est compatible avec la relation $\mathscr{R}$, en effet si X et Y sont deux classes d'éléments de G suivant H, XY en est une aussi.

1. ⋄ medtarqi@yahoo.fr ⋄ http ://alkendy.x10.mx

Il existe des éléments g_1 et g_2 de G tels que $X = g_1H$ et $Y = g_2H$. Nous avons alors

$$XY = (Hg_1)(g_2H) = H(g_1g_2)H,$$

comme H est distingué, nous pouvons remplacer $H(g_1g_2)$ par $(g_1g_2)H$ et nous trouvons $XY = g_1g_2HH$. Mais $HH = H$ (puisque H est un sous-groupe de G), donc la relation obtenue peut s'écrire $XY = g_1g_2H$, ce qui montre bien que XY est une classe suivant H.

De ce qui précède, il résulte qu'en faisant correspondre à une classe X et une classe Y l'ensemble XY, nous définissons une loi de composition $\star$ dans l'ensemble des classes suivant H et que cette loi peut être caractérisée par la relation

$$(g_1H) \star (g_2H) = g_1g_2H.$$

Prouvons que cette loi est une loi de groupe. Elle est associative, car elle est induite par une loi de composition associative définie dans l'ensemble des parties de G. Il est clair que H est une classe suivant H, à savoir la classe eH du neutre e la règle $(g_1H) \star (g_2H) = g_1g_2H$ montre donc que H est neutre à gauche (faire $g_1 = e$) et à droite (faire $g_2 = e$), ainsi, H est l'élément neutre pour notre loi $\star$. Enfin, la règle $(g_1H) \star (g_2H) = g_1g_2H$ donne $(gH) \star (g^{-1}H) = H$ et aussi $(g^{-1}H) \star (gH) = H$, ce qui montre que la classe gH admet la classe $g^{-1}H$ pour inverse. Nous avons donc défini une loi de groupe dans l'ensemble des classes d'éléments de G suivant H.

b) La relation $(g_1H) \star (g_2H) = g_1g_2H$ montre que l'application $\pi : g \mapsto gH$ de G sur G/H est un homomorphisme de groupes, il est surjectif par construction.

9. a) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n inversibles est stable par rapport aux opérations produit et passage à l'inverse. Ainsi si $T \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $S \in TU_n^+(\mathbb{K})$, alors $T^{-1}ST \in T_n^+(\mathbb{K})$ de plus si on pose $T = (t_{ij})_{1\le i,j\le n}$, alors le coefficient de $T^{-1}ST$ d'indice i de la diagonale est $t_{ii}^{-1} \times 1 \times t_{ii} = 1$ et donc $T^{-1}ST \in TU_n^+(\mathbb{K})$. Ceci montre que $TU_n^+(\mathbb{K})$ est distingué dans $T_n^+(\mathbb{K})$.

b) Choisissons les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc si on considère $T = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \in TU_n^+(\mathbb{K})$, alors $T^{-1}ST \notin TU_n^+(\mathbb{K})$. Donc $TU_n^+(\mathbb{K})$ n'est pas distingué dans $\mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$.

10. Le sous-groupe H est à la fois la classe à gauche et la classe à droite modulo H de l'élément neutre. Si G/H à deux éléments, $G \setminus H$ est donc l'autre classe, à droite et à gauche. Classes à droite et classes à gauche coïncident, donc $gH = Hg$ ou encore $gHg^{-1} = Hgg^{-1} = H$ pour tout $g \in G$. Ainsi $H \lhd G$.

11. a) Vérification immédiate. Δ n'est autre que le sous-groupe engendré par A et B.

b) On a $\Gamma = \{I_2, A, A^2, A^3\}$, donc Δ/Γ à deux éléments et par conséquent Γ est sous-groupe distingué dans Δ, donc Δ/Γ à une structure de groupes. R est le sous-groupe engendré par B est d'ordre 2 ($B^2 = I_2$), ainsi les groupes Δ/Γ et R sont isomorphes puisque les deux sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) Le groupe produit $\Gamma \times R$ est commutatif comme produit de deux groupes commutatifs, mais Δ ne l'est pas puisque $AB \neq BA$. Donc $\Gamma \times R$ et Δ ne sont pas isomorphes.

12. a) On a $HgK = \bigcup_{h\in H} hgK = \bigcup_{k\in K} Hgk$ (réunion de classe à gauche et aussi réunion de classe à droite).

b) Considérons sur G la relation binaire $\mathscr{S}$ définie par :

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2, g_2 \mathscr{S} g_2 \Leftrightarrow g_2 \in Hg_1K.$$

$\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence, en effet :

• $\mathscr{S}$ symétrique : $\forall (g_1, g_2) \in G^2$, on a :
$g_1 \mathscr{S} g_2 \Leftrightarrow g_2 \in Hg_1K \Leftrightarrow g_1 \in H^{-1}g_2K^{-1} = Hg_2K \Leftrightarrow g_2 \mathscr{S} g_1$.

• $\mathscr{S}$ réflexive : $\forall g \in G$, $g \mathscr{S} g$.

• $\mathscr{S}$ transitive : si $g_1 \mathscr{S} g_2$ et $g_2 \mathscr{S} g_3$, alors $g_2 \in Hg_1K$ et $g_3 \in Hg_2K$, donc $g_3 \in Hg_1K$, donc $g_1 \mathscr{S} g_3$.

Ainsi, l'ensemble des classes d'équivalence à savoir $\{\overline{g} = HgK \mid g \in G\}$ forme une partition de G, c'est-à-dire $G = \bigcup_{g\in G} HgK$.

Partie III. décomposition de Bruhat et matrices

13. a) Dans ce cas $u_\sigma(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $u_\sigma(\varepsilon_n) = \varepsilon_1$, d'où :

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si $\sigma = c_1c_2...c_k$, alors $u_\sigma = u_{c_1} \circ u_{c_2} \circ ... \circ u_{c_k}$, donc cette égalité s'écrit matriciellement sous la forme $P_\sigma = P_{c_1}P_{c_2}...P_{c_k}$.

c) u_σ transforme une base orthonormée en une base orthonormée , donc la matrice P_σ représentant l'endomorphisme u_σ est une matrice orthogonale.

d) D'après la définition de déterminant, on a $\det(P_\sigma) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. Ainsi $P_\sigma \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, σ est une permutation paire.

14. a) On rappelle que $E_{ij}E_{lk} = \delta_{jl}E_{ik}$ pour tous i,j,k,l de $[\![1,n]\!]$. Si $A = \sum_{1\le l,k\le n} a_{lk}E_{lk}$, alors

$$\begin{aligned} T_{ij}(\lambda)A &= (I_n + \lambda E_{ij}) \sum_{1\le l,k\le n} a_{lk}E_{lk} \\ &= A + \lambda \sum_{1\le l,k\le n} a_{lk}E_{ij}E_{lk} \\ &= A + \lambda \sum_{1\le l,k\le n} \delta_{jl}a_{lk}E_{ik} \\ &= A + \lambda \sum_{1\le l,k\le n} \delta_{jl}a_{lk}E_{ik} \\ &= A + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik} \end{aligned}$$

Donc multiplier A à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$, c'est ajouter à la i-ème ligne de A la j-ème ligne de A multipliée par λ ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

b) Multiplier A à gauche par $D_i(\lambda)$, c'est multiplier la i-ème ligne de A par λ ($L_i \leftarrow \lambda L_i$).

Multiplier A à droite par $T_{i,j}(\lambda)$, c'est ajouter à la i-ème colonne de A la j-ème ligne de A multipliée par λ ($C_i \leftarrow C_i + \lambda L_j$).

Multiplier A à droite par $D_i(\lambda)$, c'est multiplier la i-ème colonne de A par λ ($C_i \leftarrow \lambda C_i$).

c) On remarque que $P_{i,j} = I_n - (E_{i,i}+E_{j,j}) + (E_{i,j}+E_{j,i})$. Donc multiplier A à gauche par cette matrice permet d'échanger les lignes i et j de A.

De même multiplier A à droite par la matrice $P_{i,j}$ permet d'échanger les colonnes i et j de A.

Plus généralement, multiplier A à gauche par P_σ revient à faire agir la permutation σ sur les lignes de A et multiplier A à droite par P_σ revient à faire agir la permutation σ sur les colonnes de A.

15. Supposons qu'on a $P_\sigma^{-1}UP_{\sigma'} = V$. Supposons $\sigma' \neq \sigma$, donc il existe i tel que $\sigma(i) < \sigma'(i)$. Le coefficient $V(i,i)$ de V est non nul car V inversible, et l'égalité précédente nous donne l'égalité : $V(i,i) = U(\sigma(i),\sigma'(i)) = 0$, d'où une contradiction.

16. a) Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $i_1 = \max\{k, a_{k,1} \neq 0\}$ (qui est bien défini car A est inversible). Pour tout $k < i_1$, on effectue l'opération $L_k \leftarrow L_k - \dfrac{a_{k,1}}{a_{i_1,1}}L_{i_1}$ en multipliant à gauche par $T_{k,i_1}\left(\dfrac{-a_{k,1}}{a_{i_1,1}}\right)$. On effectue aussi l'opération $L_{i_1} \leftarrow \dfrac{1}{a_{i_1,1}}L_{i_1}$, en multipliant à gauche par $D_{i_1}\left(\dfrac{1}{a_{i_1,1}}\right)$. Pour $k > 1$, on fait $C_k \leftarrow C_k - a_{i_1,k}C_1$ par multiplication à droite par $T_{1,k}\left(-a_{i_1,k}\right)$. On a donc transformé A en une matrice A_1 n'ayant que des 0 sur la i_1-ème ligne et la première colonne, sauf à l'indice $(i_1,1)$ où il y a un 1. A_1 est inversible donc $i_2 = \max\{k, a_{k,2} \neq 0\}$ est bien défini. On réitère les opérations précédentes pour annuler la ligne i_2 et la colonne 2. On continue ainsi jusqu'à la n-ème colonne. Par construction, la suite (i_k) est injective donc bijective. Elle définit donc une permutation $\sigma \in S_n$.

Comme $T_{i,j}(\lambda)$ et $D_i(\lambda)$ sont des éléments de $T_n^+(\mathbb{K})$, alors on a donc trouvé $T_1, T_2 \in T_n^+(\mathbb{K})$ tels que $P_\sigma = T_1AT_2$. Ainsi, $A = T_1^{-1}P_\sigma T_2^{-1} = UP_\sigma V$ avec $U = T_1^{-1}$ et $V = T_2^{-1}$.

b) Montrons l'unicité de σ. Si $UP_\sigma V = U'P_{\sigma'}V$, notons $T = U'^{-1}U \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $S = U'V^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$. On a alors $P_{\sigma'}S = TP_\sigma$, donc d'après la question 15. $\sigma' = \sigma$.

17. Supposons $c \neq 0$ (même raisonnement si $a \neq 0$).

- Étape 1 : $T_{1,2}\left(\dfrac{-a}{c}\right)A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$
- Étape 2 : $P_\sigma T_{1,2}\left(\dfrac{-a}{c}\right)A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & -\dfrac{1}{c} \end{pmatrix}$ où $\sigma = (12)$.

D'où la décomposition de Bruhat $A = UP_\sigma V$, avec $U = T_{1,2}\left(\dfrac{-a}{c}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & \dfrac{-1}{c} \end{pmatrix}$.

Si $c = 0$, la décomposition de Bruhat est $A = IP_{id}A$ (dans ce cas $A \in T_2^+(\mathbb{K})$).

18. a) Si A satisfait la propriété (E_1), alors A est le produit de deux matrices inversibles, donc elle est inversible. Si A satisfait la propriété (E_2), alors le mineur d'ordre n, qui est non nul, n'est autre que le déterminant de A, donc A est inversible.

b) Si A est inversible a une décomposition UV avec $U \in T_n^-(\mathbb{K})$ et $V \in T_n^+(\mathbb{K})$. Considérons la décomposition par blocs $U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & U_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ 0 & V_3 \end{pmatrix}$ où U_1 et V_1 sont des matrices carrées d'ordre k, alors $U_1V_1 = (a_{i,j})_{1\le i,j\le k}$ est une matrice d'ordre k a un déterminant non nul.

c) La propriété est évidente si $n = 1$. Supposons qui elle est vraie à l'ordre $n-1$, $n \ge 2$. Écrivons A sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{K}$ et A_1 est une matrice d'ordre $n-1$ dont les mineurs principaux sont non nuls. D'après l'hypothèse de récurrence il existe $U_1 \in T_{n-1}^-(\mathbb{K})$ et $V_1 \in T_{n-1}^+(\mathbb{K})$ tels que $A_1 = U_1V_1$. On cherche $U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ L_1 & c_1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} V_1 & C_1 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ avec c_1 imposé non nul vérifiant $A = UV$, c'est-à-dire $A = \begin{pmatrix} U_1V_1 & U_1C_1 \\ L_1V_1 & L_1C_1 + c_1c_2 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{cases} U_1C_1 = A_2 \\ L_1V_1 = A_3, \\ L_1C_1 + c_1c_2 = a, \end{cases}$ d'où l'on déduit C_1, L_1 et c_2 d'une manière unique.

19. L'application qui à une matrice $M = (x_{ij})_{1\le i,j\le n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ fait correspondre son déterminant $\det(M) =$

$\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)}$ est continue, puisqu'elle est polynomiale en les coefficients de la matrice (x_{ij}).

D'autre part, on peut regarder l'application φ_k comme composée de l'application linéaire $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \mapsto A_k = (a_{i,j})_{1\le i,j\le k}$ qui est continue (linéaire en dimension finie) et l'application det de $\mathscr{M}_k(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{C}$, donc φ_k est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Donc $\varphi_k^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On voit bien aussi que l'ensemble des matrices vérifiant (E_2) est exactement $\bigcap_{k=1}^n \varphi_k^{-1}(\mathbb{C}^*)$, qui est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, or $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors l'ensemble considéré est un ouvert de $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$.

20. a) Posons $T = (t_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ avec $t_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $t_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On a $P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1\le i,j\le n}$, donc le coefficient d'indice (i,j) de la matrice $P_\tau T$ est donné par :

$$\begin{aligned}(P_\tau T)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n \delta_{i,\tau(k)} t_{k,j}\\ &= \delta_{i,\tau(\tau^{-1}(i))} t_{\tau^{-1}(i),j}\\ &= t_{\tau^{-1}(i),j}\end{aligned}$$

et celui de la matrice $P_\tau T P_\tau$ est donné par :

$$\begin{aligned}(P_\tau T P_\tau)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n t_{\tau^{-1}(i),k}\delta_{k,j}\\ &= t_{\tau^{-1}(i),\tau(j)}\\ &= t_{\tau(i),\tau(j)} = t_{n-i+1,n-j+1}\end{aligned}$$

Donc $(P_\tau T P_\tau)_{i,j} = 0$ si $i < j$, c'est-à-dire $P_\tau T P_\tau \in T_n^-(\mathbb{C})$. Donc $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau \subset T_n^-(\mathbb{C})$. De même , on peut montrer que $P_\tau T_n^-(\mathbb{C}) P_\tau \subset T_n^+(\mathbb{C})$ ce qui équivalent à $T_n^-(\mathbb{C}) \subset P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau \subset T_n^-(\mathbb{C})$, puisque $\tau^{-1} = \tau$. D'où l'égalité demandée :

$$P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau = T_n^-(\mathbb{C}).$$

b) D'après la question précédente $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) = T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C})$, donc cet ensemble est exactement l'ensemble des matrices vérifiant la propriété (E_1) et donc (E_2), par suite c'est un ouvert d'après la question 19.

c) Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. L'ensemble des valeurs propres des matrices principales extraites de A $((A_{ij})_{1\le i,j\le k},\ 1 \le k \le n)$ est fini. Il existe donc une suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de réels qui tend vers 0 et qui ne rencontre pas cet ensemble. Donc chaque matrice $A - \lambda_p I_n$ vérifie la propriété (E_2) et donc aussi la propriété (E_1), ainsi il existe $U_p \in T_n^-(\mathbb{C})$ et $V_p \in T_n^+(\mathbb{C})$ tels que $A - \lambda_p I_n = U_p V_p$. On a alors

$$A - \lambda_p I_n = P_\tau^{-1}\left(P_\tau U_p P_\tau^{-1}\right) P_\tau V_p,$$

avec $P_\tau U_p P_\tau^{-1} \in T_n^+(\mathbb{C})$. Autrement dit $A - \lambda_p I_n$ est de la forme $P_\tau T_p P_\tau S_p$ avec $(T_p, S_p) \in T_n^+(\mathbb{C})$ $(P_\tau^{-1} = P_{\tau^{-1}} = P_\tau)$. Par un argument de continuité et par passage à la limite, on voit que A appartient à l'adhérence de $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$, ce qu'il fallait démontrer.

d) Notons φ_τ l'application en question. On a $\varphi_\tau(A) = \varphi_\tau(b) \Leftrightarrow P_\tau A = P_\tau B \Leftrightarrow A = B$, car P_τ est inversible. De plus $\forall B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $B = \varphi_\tau\left(P_{\tau^{-1}} B\right)$. Ainsi φ_τ est bijective et $\varphi_\tau^{-1} = \varphi_{\tau^{-1}}$.

D'autre part, si $|||.|||$ désigne la norme subordonnée associe à la norme $\|.\|$, alors on a, pour tout $(A,B) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})^2$,

$$|||\varphi_\tau(A) - \varphi_\tau(B)||| = |||P_\tau(A-B)||| \le |||P_\tau|||\,|||A-B|||.$$

Donc φ_τ est lipschitzienne, donc elle est continue, de même pour l'application inverse. Donc il s'agit bien d'un homéomorphisme.

e) $T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$ est l'image réciproque par φ_τ de l'ouvert $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$ (la question 19.(b)), donc est un ouvert de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

De plus la densité est conservé par l'homéomorphisme φ_τ, donc $T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

On a $\bigcup_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma\neq\tau}} T_n^+(\mathbb{C}) P_\sigma T_n^+(\mathbb{C}) = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \setminus T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$.

Donc $\bigcup_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma\neq\tau}} T_n^+(\mathbb{C}) P_\sigma T_n^+(\mathbb{C})$ est un fermé dense dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Partie IV : décomposition de Bruhat et drapeau

21. • Montrons d'abord qu'il s'agit bien d'une action. En effet, $\forall g \in GL(E)$, $\forall (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \Delta$, $g(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E.

◇ Si $g = \mathrm{Id}_E$ et $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \Delta$, alors $g.(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = g.(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

◇ $\forall g,h \in \mathbf{GL}(E)$, $\forall (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \Delta$,

$$\begin{aligned} h.\left(g.(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) &= h.g(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\\ &= (h(g(e_i)))_{i\in[\![1,n]\!]}\\ &= h\circ g(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\\ &= (h\circ g).(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\end{aligned}$$

Donc on bien une action de groupe de $\mathbf{GL}(E)$ sur Δ.

• Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ deux bases de E, donc il existe un endomorphisme unique $g \in \mathbf{GL}(E)$ tel que $g(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Ainsi $g.(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = (f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, donc l'opération est transitive.

• Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ un base de E et $g \in \bigcap_{\mathscr{B}\in\Delta} \mathrm{Stab}_{\mathscr{B}}$, alors $(g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n)) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ce qui est équivalent à $\forall i \in [\![1,n]\!],\quad g(e_i) = e_i$, donc $g = \mathrm{Id}_E$. Ainsi $\bigcap_{\mathscr{B}\in\Delta} \mathrm{Stab}_{\mathscr{B}} = \{\mathrm{Id}_E\}$. donc l'opération est fidèle.

22. Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un drapeau total, pour tout $g \in \mathbf{GL}(E)$ $\dim g(E_i) = \dim E_i$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $E_i \subset E_{i+1}$, donc $g(E_i) \subset g(E_{i+1})$ et l'inclusion est stricte car $\dim g(E_{i+1}) = i+1 > i = \dim g(E_i)$. Donc $(g(E_i))_{1\in[\![1,n]\!]}$ est un drapeau total. Les autres propriété d'une action sont immédiates.

• Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux drapeaux totaux de E. Fixons $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base adaptée au drapeau $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base adaptée au drapeau $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. Soit g l'endomorphisme qui transforme $(e_1,e_2,...,e_n)$ en $(f_1,f_2,...,f_n)$, alors on a bien :

$$g.(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = (F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}.$$

D'où la transitivité.

• Si $\mathscr{B} = (e_1,e_2,...,e_n)$ est une base de E et $g \in \mathbf{GL}(E)$, alors

$$\begin{aligned} \delta(g.\mathscr{B}) &= \delta\left(g(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) \\ &= (\mathrm{Vect}(g(e_1),...,g(e_i)))_{i\in[\![1,n]\!]} \\ &= (g(\mathrm{Vect}(e_1,...,e_i)))_{i\in[\![1,n]\!]} = g.\delta(\mathscr{B}) \end{aligned}$$

23. $\forall g \in \mathbf{GL}(E)$, $g \in \mathrm{Stab}_{\delta(\mathscr{B}_0)}$ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $g(E_i) = E_i$ où $E_i = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,...,\varepsilon_i)$. Donc pour chaque i il existe des scalaires t_{ji}, $1 \le j \le i$ tels que $g(\varepsilon_i) = \sum_{j=1}^{i} t_{ji}\varepsilon_j$, donc la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_0$ est triangulaire supérieure inversible (car g est inversible). Donc on peut identifier $\mathrm{Stab}_{\delta(\mathscr{B}_0)}$ et $T_n^+(\mathbb{K})$.

24. On peut vérifier facilement que la relation R est une relation d'équivalence en remarquant que l'ensemble $T_n^+(\mathbb{K})$ est stable par le produit et le passage à l'inverse.

25. a) Si $\overline{M} = \overline{N}$, alors $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K})$. D'après l'identification de $\mathrm{Stab}_{\delta(\mathscr{B}_0)}$ et $T_n^+(\mathbb{K})$, ceci est équivalent à

$$M^{-1}N.\delta(\mathscr{B}_0) = \delta(\mathscr{B}_0)$$

ou encore

$$M.M^{-1}N.\delta(\mathscr{B}_0) = M.\delta(\mathscr{B}_0),$$

d'où $N.\delta(\mathscr{B}_0) = M.\delta(\mathscr{B}_0)$, c'est-à-dire $\varphi(M) = \varphi(N)$. Donc φ est bien définie.

b) Soient $M,N \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$. On a $\varphi\left(\overline{M}\right) = \varphi\left(\overline{N}\right) \Leftrightarrow M.\delta(\mathscr{B}_0) = N.\delta(\mathscr{B}_0)$, alors $MN^{-1} \in \mathrm{Stab}_{\delta(B_0)} = T_n^+(\mathbb{K})$ donc $M\mathscr{R}N$ et par conséquent $\overline{M} = \overline{N}$. D'où l'injectivité de φ.

Soit $(E_i)_{1\le i\le n} \in \mathscr{D}$ et $(e_1,e_2,...,e_n)$ une base adaptée à ce drapeau. Soit M la matrice transformant $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ à $(e_1,e_2,...,e_n)$, alors $M.\delta(\mathscr{B}_0) = (E_i)_{1\le i\le n}$ c'est-à-dire $\varphi\left(\overline{M}\right) = (E_i)_{1\le i\le n}$. D'où la surjectivité de φ.

26. On a $\varphi\left(\overline{XY}\right) = XY.\delta(\mathscr{B}_0) = X.(Y.\delta(\mathscr{B}_0)) = X.\varphi\left(\overline{Y}\right)$.

27. Soit maintenant $(X,Y) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})^2$. Il est clair que $(\overline{X},\overline{Y}) = X\left(\overline{I_n},\overline{X^{-1}Y}\right)$. On écrit alors la décomposition de Bruhat de $X^{-1}Y$: il existe des matrices triangulaires supérieurs T_1 et T_2 et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $X^{-1}Y = T_1P_\sigma T_2$. On a donc

$$\begin{aligned} (\overline{X},\overline{Y}) &= X\left(\overline{I_n},\overline{X^{-1}Y}\right) \\ &= X\left(\overline{I_n},\overline{T_1P_\sigma T_2}\right) \\ &= X\left(\overline{I_n},\overline{T_1P_\sigma}\right) \text{ car } T_2 \in T_n^+(\mathbb{K}) \\ &= XT_1\left(\overline{T_1^{-1}},\overline{P_\sigma}\right) \\ &= XT_1\left(\overline{I_n},\overline{P_\sigma}\right) \end{aligned}$$

Ainsi toute orbite contient un élément de la forme $(\overline{I_n},\overline{P_\sigma})$.

L'unicité : Supposons $XT_1\left(\overline{I_n},\overline{P_\sigma}\right) = XT_1'\left(\overline{I_n},\overline{P_{\sigma'}}\right)$, c'est-à-dire $\left(\overline{XT_1},\overline{XT_1P_\sigma}\right) = \left(\overline{XT_1'},\overline{XT_1'P_{\sigma'}}\right)$, donc $\overline{XT_1P_\sigma} = \overline{XT_1'P_{\sigma'}}$ donc $XT_1P_\sigma\mathscr{R}XT_1'P_{\sigma'}$, donc $(XT_1P_\sigma)^{-1}\left(XT_1'P_{\sigma'}\right) \in T_n^+(\mathbb{K})$ ou encore $P_\sigma^{-1}T_1^{-1}T_1'P_{\sigma'} \in T_n^+(\mathbb{K})$, d'après la question 15, on a $\sigma' = \sigma$.

28. Soit $(\overline{X},\overline{Y}) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$. D'après la question précédente il existe une permutation unique σ telle que $(\overline{X},\overline{Y})$ soit dans l'orbite de $(\overline{I_n},\overline{P_\sigma})$. Supposons que $(\overline{I_n},\overline{P_\sigma})$ et $(\overline{I_n},\overline{P_{\sigma'}})$ que soient dans le même orbite, alors il existe matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $(\overline{I_n},\overline{P_{\sigma'}}) = A(\overline{I_n},\overline{P_\sigma})$, c'est-à-dire $(\overline{I_n},\overline{P_{\sigma'}}) = (\overline{A},\overline{AP_\sigma})$, donc $A\mathscr{I}_n$ et $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ et puis $P_{\sigma'}^{-1}AP_\sigma \in T_n^+(\mathbb{K})$ et donc $\sigma' = \sigma$.

En conclusion, il y a une bijection entre les orbites et le groupe $\mathfrak{S}_n$. Donc le nombre d'orbites dans l'action de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$ est $n!$.

• • • • • • • •