Agrégation interne ; CAER 2018

Deuxième épreuve

Olivier HALGAND
olivier.halgand@ac-lyon.fr

Partie I : Quelques propriétés de la distance à un fermé

I-A : Généralités

1. Soient A et B deux parties non vides de E avec $A \subset B$. Soient $x \in E$. Alors, par définition :

$$\forall b \in B, \quad d_B(x) \leqslant d(x, b).$$

En particulier, tout élément a de A étant aussi élément de B, on a :

$$\forall a \in A, \quad d_B(x) \leqslant d(x, a).$$

Ceci signifie que $d_B(x)$ est <u>un</u> minorant de l'ensemble $\mathfrak{D} = \big\{d(a, x) \ ; \ a \in A\big\}$. Or, par définition de la borne inférieure, $d_A(x)$ est le plus grand minorant de $\mathfrak{D}$. Donc :

$$\boxed{A \subset B \ \Rightarrow \ \Big(\forall x \in E, \quad d_B(x) \leqslant d_A(x)\Big).}$$

2. Soient A une partie non vide de E, et $x \in E$. Pour tout réel positif r, on note $\mathscr{B}(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r, c'est-à-dire :

$$\mathscr{B}(x, r) = \big\{y \in E \ \big| \ d(x, y) < r\big\}.$$

On a alors les équivalences :

$$x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ \mathscr{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ \big| \ d(x, a) < \varepsilon,$$

et donc :

$$\boxed{x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ d(x, A) = 0.}$$

3. a) Pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $a \in A$, l'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$d_A(x) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a),$$

c'est-à-dire que $d_A(x) - d(x, y)$ minore l'ensemble $\mathfrak{D}' = \big\{d(y, a) \ ; \ a \in A\big\}$. Or, $d_A(y)$ est le plus grand minorant de $\mathfrak{D}'$, donc :

$$d_A(x) - d(x, y) \leqslant d_A(y),$$

et donc :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \quad d_A(x) \leqslant d(x, y) + d_A(y).}$$

b) En inversant les rôles de x et y on a aussi :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d_A(y) - d_A(x) \leqslant d(y, x),$$

ce qui permet d'écrire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \big|d_A(x) - d_A(y)\big| \leqslant d(x, y),$$

ce qui signifie que

$$\boxed{d_A : E \to \mathbb{R} \text{ est une application 1-lipschitzienne.}}$$

4. Soit $x \in E$.

- Puisque $A \subset \overline{A}$, d'après **1.** : $d_{\overline{A}}(x) \leqslant d_A(x)$.
- Soit $y \in \overline{A}$. Alors d'après **2.** : $d_{\overline{A}}(y) = 0$ et, d'après **3.** :
$$d_A(x) = d_A(x) - d_A(y) \leqslant d(x,y).$$
Ainsi, $d_A(x)$ est un minorant de $\mathfrak{D}'' = \{d(x,y)\ ;\ y \in \overline{A}\}$, d'où :
$$d_A(x) \leqslant \inf_{y \in \overline{A}} d(x,y) = d_{\overline{A}}(x).$$

On en déduit donc que :
$$\forall x \in E, \quad d_A(x) = d_{\overline{A}}(x),$$
soit :
$$\boxed{d_A = d_{\overline{A}}.}$$

5. **a)** Soient A et B deux parties fermées non vides de E.

$\Rightarrow$ Supposons que $d_A = d_B$ et considérons $x \in A$. Alors :
$$0 = d(x, \overline{A}) = d(x, A) = d(x, B) = d(x, \overline{B}),$$
donc, d'après **2.** : $x \in \overline{B} = B$. Ainsi, tout élément de A appartient aussi à B, c'est-à-dire : $A \subset B$. De la même manière, on a aussi $B \subset A$ et donc $A = B$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si $A = B$, alors évidemment $d_A = d_B$.

On a donc démontré que :
$$\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont des parties fermées et non vides de } E, \text{ alors : } d_A = d_B \ \Leftrightarrow\ A = B.}$$

b) Si A et B sont deux parties non vides de E, alors on a l'équivalence :
$$\boxed{d_A = d_B \ \Leftrightarrow\ \overline{A} = \overline{B}.}$$

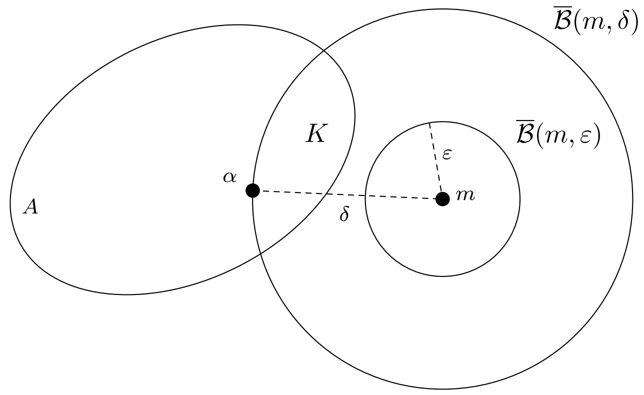
6. Soient A un compact non vide de E, et $x \in E$. On considère $g : a \in A \mapsto d(x,a) \in \mathbb{R}_+$. Alors, l'inégalité triangulaire donne :
$$\forall (a,a') \in A^2, \quad \left|g(a) - g(a')\right| = \left|d(x,a) - d(x,a')\right| \leqslant d(a,a'),$$
ce qui montre que g est continue sur le compact A puisqu'elle est 1-lipschitzienne. On en déduit que $g(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un segment. En particulier g atteint sa borne inférieure :
$$\boxed{\exists a \in A \ \big|\ d_A(x) = d(x,a).}$$

7. On suppose ici que E est un espace affine euclidien, d étant la distance euclidienne associée, et que A est un fermé non vide de E. Soit $m \in E$.

- Si $m \in A = \overline{A}$, alors $d_A(m) = d(m,m) = 0$.
- Si $m \notin A$, alors le complémentaire A^c de A dans E étant ouvert :
$$\exists \varepsilon > 0 \ \big|\ \overline{\mathscr{B}}(m,\varepsilon) \cap A = \varnothing.$$
Soient $\alpha \in A$, $\delta = d(\alpha, m)$ et $K = A \cap \overline{\mathscr{B}}(m,\delta)$. Alors, K est un fermé comme intersection de deux fermés, et K est aussi borné car $K \subset \overline{\mathscr{B}}(m,\delta)$. Puisque E est de dimension finie (puisqu'il est euclidien), K est un compact de E. Donc, d'après **6.** :
$$\exists k \in K \ \big|\ d_K(m) = d(k,m).$$

Or, si $a \in A$ alors soit $a \in K$ et alors : $\delta \geqslant d(a,m) \geqslant d_K(m) = d(k,m)$; soit $a \notin K$ et alors $d(a,m) \geqslant \delta \geqslant d_K(m)$. Donc, dans tous les cas, on a : $d(a,m) \geqslant d(k,m)$ et donc : $d_A(m) \geqslant d(k,m)$. Enfin, puisque $k \in K$ et $K \subset A$, on obtient finalement :

$$\boxed{\exists k \in A \mid d_A(m) = d(k,m).}$$



8. On suppose ici que $E = \mathbb{R}$, que A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists!\, a \in A \mid d_A(x) = d(x,a) = |x-a|.$$

a) Supposons que A ne soit pas fermé. Il existe donc un réel $x \in \overline{A} \setminus A$ et alors :

$$\forall a \in A,\ d(x,a) > 0 \qquad \text{et :} \qquad d_A(x) = 0$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc

$$\boxed{A \text{ est fermé.}}$$

b) Supposons que A ne soit pas un intervalle (A contient donc au moins deux éléments). Il existe donc deux réels a et a' de A, avec $a < a'$, et tels que :

$$\exists x \in \left]a, a'\right[,\ x \notin A.$$

Considérons les ensembles

$$A_- = \{a \in A \mid a < x\} = A \cap \left]-\infty, x\right] \qquad \text{et :} \qquad A_+ = \{a \in A \mid a > x\} = A \cap \left[x, +\infty\right[.$$

L'ensemble A_- est non vide, puisqu'il contient a, est fermé comme intersection de deux fermés, et est majoré par x : il possède un plus grand élément a_1. De même, A_+ est non vide, fermé et est minoré : il possède un plus petit élément a_2. On a donc :

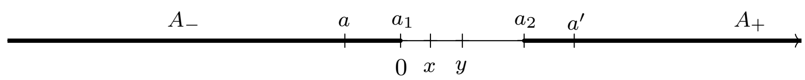
$$a_1 < x < a_2 \qquad \text{et :} \qquad \forall y \in \left]a_1, a_2\right[, \quad y \notin A.$$

En particulier, $y = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ n'appartient pas à A et :

$$d(y,A) = |y - a_1| = |y - a_2|,$$

ce qui contredit l'hypothèse : on obtient donc une contradiction ;

$$\boxed{A \text{ est un intervalle.}}$$



9. Soit p le projeté orthogonal de x sur H : on sait que $d_H(x) = \|\overrightarrow{xp}\|$. Notons $\alpha = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$. Alors $\overrightarrow{xp}$ est orthogonal à H, donc colinéaire au vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n} = \frac{1}{\alpha}(a_1, \ldots, a_n)$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{xp} = \lambda\,\overrightarrow{n}$, et donc :

$$p = \lambda\,\overrightarrow{n} + x = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\,a_1 + x_1, + \ldots, \frac{\lambda}{\alpha}\,a_n + x_n\right).$$

De plus, $p \in H$, donc :

$$a_1\left(\frac{\lambda}{\alpha}\,a_1 + x_1\right) + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda}{\alpha}\,a_n + x_n\right) + b = 0,$$

d'où :

$$\lambda\alpha + (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b) = 0,$$

et donc :

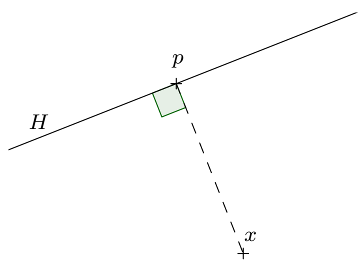
$$\lambda = -\frac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b}{\alpha}.$$

On obtient donc :

$$\|\overrightarrow{xp}\| = \|\lambda\,\overrightarrow{n}\| = |\lambda|,$$

et donc :

$$\boxed{d_H(x) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.}$$



I-B : Quelques exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

10. a) Puisque u est symétrique (réel), u est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de vecteurs propres ; pour $i \in [\![1, n]\!]$, on notera λ_i la valeur propre associée au vecteur propre ε_i. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Il existe alors un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$x = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

On en déduit que :

$$u(x) = x_1u(\varepsilon_1) + \cdots + x_nu(\varepsilon_n) = x_1\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\lambda_n\varepsilon_n.$$

• En notant : $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i = \lambda_{i_0}$, on a alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{i_0},$$

et donc :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \lambda_{i_0}^2 \sum_{i=1}^n x_i^n = \lambda_{i_0}^2 \|x\|^2 = \lambda_{i_0}^2,$$

d'où la majoration : $\|u\| \leqslant \lambda_{i_0}$.

• De plus :

$$u(\varepsilon_{i_0}) = \lambda_{i_0}\varepsilon_{i_0}, \quad \text{donc :} \quad \|u(\varepsilon_{i_0})\| = \lambda_{i_0},$$

d'où la minoration : $\|u\| \geqslant \lambda_{i_0}$.

Finalement :

$$\boxed{\|u\| = \lambda_{i_0}.}$$

b) En notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{\|A\| = \|u\| = \max_{\lambda \in \mathcal{S}\mathrm{p}(u)} \lambda = \max_{\lambda \in \mathcal{S}\mathrm{p}(A)} \lambda.}$$

11. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

a) Alors :

$${}^t({}^tM\,M) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tM\,M,$$

ce qui signifie que ${}^tM\,M$ est symétrique. Ainsi, ${}^tM\,M$ est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, c'est-à-dire (en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tM\,M$) qu'il existe une matrice orthogonale P telle que :

$${}^tP({}^tM\,M)P = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Comme M est supposée inversible, son déterminant est non nul donc il en est de même de ${}^tM\,M$ puisque : $\det({}^tM\,M) = \big(\det(M)\big)^2$. Or, puisqu'on a aussi :

$$\det({}^tM\,M) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

il s'ensuit que les valeurs propres de ${}^tM\,M$ sont non nulles.

De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^tX({}^tM\,M)X = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0,$$

ce qui prouve que ${}^tM\,M$ est positive : ses valeurs propres sont donc positives. On peut donc considérer les matrices :

$$R = \mathrm{Diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big) \quad \text{et} \quad C = PR\,{}^tP,$$

de sorte que, d'une part, C et R aient les mêmes valeurs propres, d'autre part :

$${}^tC = {}^t(PR\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^tR\,{}^tP = PR\,{}^tP = C,$$

donc C est symétrique et enfin :

$$C^2 = (PR^tP)(PR^tP) = PR({}^tPP)R^tP = PR^2\,{}^tP = P\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n){}^tP = {}^tM\,M.$$

$$\boxed{\text{Il existe } C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ symétrique à valeurs propres strictement positives telle que : } C^2 = {}^tM\,M.}$$

b) Puisque C est diagonalisable à valeurs propres strictement positives, C est inversible. On peut donc considérer la matrice $U = MC^{-1}$. On a alors : $M = UC$ et aussi :

$${}^tU\,U = {}^t(MC^{-1})(MC^{-1}) = {}^t(C^{-1})\,{}^tMMC^{-1} = ({}^tC)^{-1}({}^tM\,M)C^{-1},$$

donc, puisque ${}^tC = C$ et que $C^2 = {}^tM\,M$:

$${}^tU\,U = C^{-1}C^2C^{-1} = I_n.$$

Il s'ensuit que U est inversible et que $U^{-1} = {}^tU$, c'est-à-dire que U est orthogonale :

$$\boxed{\exists U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \;\big|\; M = UC.}$$

12. **a)** On sait que la fonction det est continue et on peut écrire :

$$\mathscr{F} = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\;;\; \det(M) = 1\big\} = \det{}^{-1}\big(\{1\}\big).$$

Ainsi $\mathscr{F}$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue :

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est un fermé.}}$$

b) Pour tout $x > 1$, la matrice $M(x) = \text{Diag}\left(x, \frac{1}{x}, 1, \ldots, 1\right)$ appartient à $\mathscr{F}$ et, d'après **10.** : $\|M(x)\| = x$. Ainsi, $\mathscr{F}$ n'est pas borné :

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ n'est pas compact.}}$$

13. • Soit $M \in \mathscr{F}$. Alors $\det(M) = 1 \neq 0$ et donc M est inversible. D'après **11.**, il existe un unique couple (U, C), avec $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle à valeurs strictement positives vérifiant $C^2 = {}^t M\, M$, tel que : $M = UC$.

D'après **10.**, on sait que :

$$\|C\| = \max_{\lambda \in \mathcal{S}\text{p}(C)} \lambda \geqslant 1.$$

Soient $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, et u un endomorphisme orthogonal de E. Alors on sait que u conserve la norme, donc : $\big\|u(x)\big\| = 1$. Ainsi, si x est un vecteur de norme 1, alors $u(x)$ est aussi de norme 1, donc :

$$\|u\| = \sup_{x \in E,\, \|x\|=1} \big\|u(x)\big\| = 1.$$

Ainsi, puisque $C = U^{-1}M$, et que $U^{-1} = {}^tU$ est orthogonal, on a :

$$1 \leqslant \|C\| = \|U^{-1}C\| \leqslant \|U^{-1}\|\, \|M\| = \|M\|.$$

Il s'ensuit que :

$$d(0_n, \mathscr{F}) \geqslant 1.$$

• De plus, $I_n \in \mathscr{F}$ et :

$$d(0_n, I_n) = \|I_n\| = \|Id_E\| = \sup_{x \in E,\, \|x\|=1} \|Id_E(x)\| = \sup_{x \in E,\, \|x\|=1} \|x\| = 1,$$

donc :

$$d(0_n, \mathscr{F}) \leqslant 1.$$

• Finalement :

$$\boxed{d(0_n, \mathscr{F}) = 1.}$$

14. Reprenons les notations de la question précédente. On a vu que :

$$1 \leqslant \|C\| \leqslant \|M\|,$$

donc : $\|M\| = 1 \;\Rightarrow\; \|C\| = 1$, c'est-à-dire que la plus grande valeur propre de C est 1. Or, on a aussi :

$$\det(M) = \det(UC) = \det(U)\, \det(C) \quad \text{avec} \quad \big|\det(U)\big| = 1.$$

Il s'ensuit que : $\big|\det(C)\big| = 1$ et puisque

$$\det(C) = \prod_{\lambda \in \mathcal{S}\text{p}(C)} \lambda > 0,$$

on a : $\det(C) = \det(U) = 1$. Les valeurs propres de C sont donc positives, inférieures à 1 et leur produit égale 1 : elles sont donc toutes égales à 1 et donc, en reprenant les notations de **11.a)** :

$$C = P I_n\, {}^tP = I_n.$$

Il s'ensuit que $M = U$ est orthogonale. Réciproquement, on a vu que toute matrice orthogonale a pour norme 1. Donc :

$$\boxed{\forall M \in \mathscr{F}, \quad \Big(d(0_n, M) = 1 \;\Leftrightarrow\; M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\Big).}$$

15. **a)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| = 1$. Alors, la série géométrique $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} \|A\|^p$ converge, donc

$$\boxed{\text{si } \|A\| < 1, \text{ alors la série } \sum_{p \in \mathbb{N}} A^p \text{ converge absolument}}$$

et, pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{p=0}^{p_0} A^p\right)\big(I_n - A\big) = \sum_{p=0}^{p_0} A^p - \sum_{p=0}^{p_0} A^{p+1} = I_n - A^{p_0+1}.$$

Or : $\lim\limits_{p\to+\infty} A^p = 0_n$, donc :

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} A^p\right)\big(I_n - A\big) = I_n,$$

ce qui signifie que

$$\boxed{(I_n - A) \text{ est inversible et : } \big(I_n - A\big)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} A^p.}$$

b) Soient $T \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\|T - M\| < \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$.

Puisque $I_n - T^{-1}M = T^{-1}(T - M)$, alors :

$$\big\|I_n - T^{-1}M\big\| \leqslant \big\|T^{-1}\big\|\,\|T - M\| < 1.$$

Donc, d'après **15.a)**, $I_n - \big(I_n - T^{-1}M\big) = T^{-1}M$ est inversible. Le produit de deux matrices inversibles étant inversible, il s'ensuit que

$$\boxed{M \in GL_n(\mathbb{R}).}$$

16. • Soient $T \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) = 0$. D'après **15.b)**, puisque M n'est pas inversible (et par contraposition) :

$$\|T - M\| \geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Il s'ensuit que

$$d(T, \mathscr{S}) \geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

• Considérons la décomposition polaire $T = UC$ de T et notons $0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \lambda_n$ les valeurs propres de C. D'après **11.**, il existe une matrice orthogonale P telle que :

$$C = P\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,{}^tP.$$

On sait de plus que C est inversible, et que les valeurs propres de C^{-1} sont $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$. Il s'ensuit que :

$$\big\|C^{-1}\big\| = \max_{\lambda\in\mathcal{S}\mathrm{p}(C)} \frac{1}{\lambda} = \lambda_1^{-1}.$$

On peut donc écrire :

$$\big\|T^{-1}\big\| = \big\|C^{-1}U^{-1}\big\| \leqslant \big\|C^{-1}\big\|\,\big\|U^{-1}\big\| = \big\|C^{-1}\big\| = \lambda_1^{-1}.$$

En prenant $M = U\,P\mathrm{Diag}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,{}^tP$, alors $M \in \mathscr{S}$ et :

$$T - M = UP\Big(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) - \mathrm{Diag}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\Big)\,{}^tP = UP\mathrm{Diag}(\lambda_1, 0, \ldots, 0)\,{}^tP = U\,C',$$

avec $C' = P\mathrm{Diag}(\lambda_1, 0, \ldots, 0)\,{}^tP$ symétrique réelle à valeurs propres positives. D'où, d'après **10.** :

$$d(T, M) = \|T - M\| \leqslant \|U\|\,\|C'\| = \|C'\| = \lambda_1 = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

• Finalement :

$$\boxed{d(T, \mathscr{S}) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.}$$

Partie II : Points d'une courbe à égale distance d'une droite

17. a) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2(\mathrm{e}^x + 1) - 2x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{2(\mathrm{e}^x + 1 - x\,\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

Considérons la fonction $\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x + 1 - x\,\mathrm{e}^x$. Alors ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi'(x) = -x\,\mathrm{e}^x\,.$$

Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi(x) = 1$. Et aussi, en écrivant $\psi(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^x + 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \quad \text{d'où :} \quad \lim_{x\to+\infty} \psi(x) = -\infty.$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\psi'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
ψ	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Sur $]-\infty, 0]$, $\psi > 1$ donc ψ ne s'annule pas. Sur $[0, +\infty[$, ψ est strictement décroissante. C'est donc une bijection (continue) de $[0, +\infty[$ sur $\psi\big([0, +\infty[\big) =]-\infty, 2]$. En particulier, il existe un unique $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que : $\psi(\alpha) = 0$.

De plus : $\psi(1) = 1$ et $\psi(2) = 1 - \mathrm{e}^2 < 0$, donc : $\boxed{\alpha \in]1, 2[.}$

Enfin, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On a donc le tableau suivant :

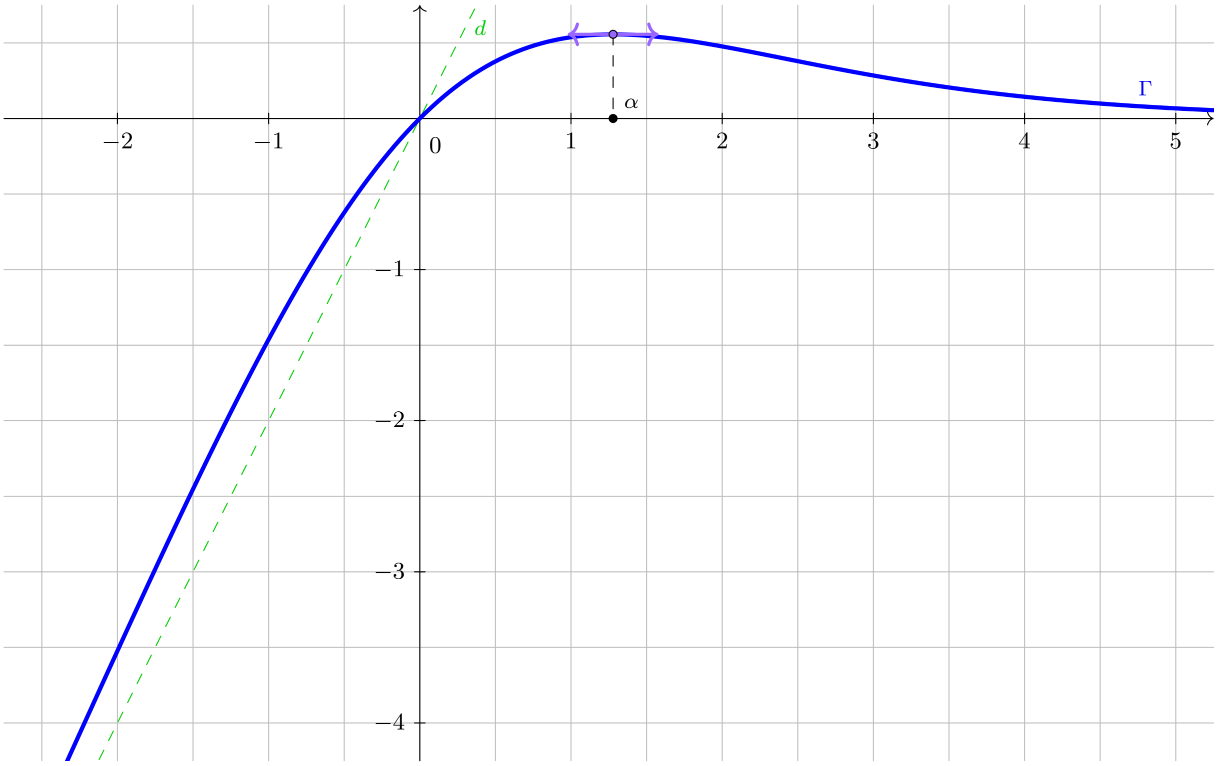
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

b) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1} = 2$ et :

$$f(x) - 2x = \frac{2}{x}\mathrm{e}^x + 1 - 2x = \frac{-2x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Il s'ensuit que la droite d d'équation $y = 2x$ est asymptote à Γ (au voisinage de $-\infty$).

La courbe Γ a donc pour allure :



18. On utilise une dichotomie.

```
Procedure alpha(epsilon)
    a :=1                              # Initialisations : α ∈ ]1, 2[
    b :=2
    Tant Que b − a > epsilon
        m := (a + b)/2
        y := 1 + (1 − m) ∗ expo(m)
        Si y = 0 alors                 # Cas où on a trouvé α
            a :=m
            b :=m
        Si y > 0 alors
            a :=m
        Si y < 0 alors
            b :=m
    Fin Tant Que
    Afficher m
```

19. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. De plus, par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0, \quad \text{d'où :} \quad f(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi. Donc :

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.}$$

20. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f_n(0) = 0$ donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = f(0)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et t $n_0 \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^n\,\mathrm{e}^{-nx} = 2x\,\mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^{n_0} (-\,\mathrm{e}^{-x})^n.$$

Or : $\left|-\,\mathrm{e}^{-x}\right| = \mathrm{e}^{-x} < 1$, donc la série géométrique $\sum (-\,\mathrm{e}^{-x})^n$ converge et on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}\ \frac{1}{1-(-\,\mathrm{e}^{-x})} = \frac{2x\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{2x}{\mathrm{e}^{x}+1} = f(x).$$

Ainsi

$$\boxed{\text{sur } [0,+\infty]\text{, on a l'égalité : } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f.}$$

21. • Pour tout $x > 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est alternée. Donc, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n_0 est majoré par $\left|f_{n_0+1}(x)\right|$ c'est-à-dire :

$$\left|R_{n_0}(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{n_0} f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \left|f_{n_0+1}(x)\right| = 2x\mathrm{e}^{-(n_0+2)x},$$

donc, si $0 < a < b < +\infty$ et si $x \in [a,b]$, alors :

$$\left|R_{n_0}(x)\right| \leqslant 2b\,\mathrm{e}^{-(n_0+2)a}\,.$$

Cette majoration des restes est indépendante de x et montre que les restes tendent uniformément vers 0 sur tout segment de $[0,+\infty[$. Donc, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de $[0,+\infty[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme pour f, on a : $f_n(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant 2x\,\mathrm{e}^{-x},$$

la fonction $x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{-x}$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$ (de même que pour f).

• On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n étant de classe $\mathscr{C}^1$, on peut effectuer une intégration par parties, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= 2(-1)^n \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\ \mathrm{d}t\\ &= 2(-1)^n\left(\left[t\,\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{-(n+1)}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{2(-1)^n}{n+1}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\ \mathrm{d}t = \frac{2(-1)^n}{n+1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty},\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

On en déduit donc, en séparant les termes d'indice pair des termes d'indice impair (ce qui est possible car la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ converge absolument), que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \\
&= 2\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2p+1)^2}\right) \\
&= 2\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}\right) - 4\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - 4\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4(p+1)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2},
\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

22. a) Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Une équation de Δ étant $y = 0$, d'après **9.** on a :

$$d(A,\Delta) = \frac{|0x_A + 1y_A|}{\sqrt{0^2+1^2}} = |y_A|.$$

Ainsi, avec $M_1\big(x_1, f(x_1)\big)$ et $M_2\big(x_2, f(x_2)\big)$, on a :

$$\boxed{d(M_1,\Delta) = d(M_2,\Delta) \iff \big|f(x_1)\big| = \big|f(x_2)\big|.}$$

b) Soit $x \in \,]0,\alpha]$ et $M\big(x, f(x)\big)$. Alors, puisque f est continue et strictement croissante sur $]0,\alpha]$, on a :

$$f(x) \in \,]f(0), f(\alpha)] = \,]0, f(\alpha)].$$

Or, f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha,+\infty[$: c'est donc une bijection de $[\alpha,+\infty[$ sur $f\big([\alpha,+\infty[\big) = \,]0, f(\alpha)]$. On en déduit que :

$$\exists\,!\, y \in [\alpha,+\infty[\;\big|\; f(y) = f(x),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\text{il existe un unique point } N \text{ de } \Gamma, \text{ d'abscisse } y \in [\alpha,+\infty[, \text{ tel que : } d(M,\Delta) = d(N,\Delta).}$$

23. a) D'après **17.a)**

$$\boxed{f_1 \text{ (resp. } f_2\text{) est strictement crissante (resp. décroissante).}}$$

Pour tout $x \in \,]0,\alpha]$, on a donc :

$$f(x) = f_1(x) = f(y) = f_2(y) = f_2\big(\varphi(x)\big), \quad \text{donc :} \quad \varphi(x) = f_2^{-1}\big(f_1(x)\big)$$

d'où :

$$\boxed{\varphi = f_2^{-1} \circ f_1.}$$

b) Puisque f est continue, il en est de même de f_1 et f_2, donc aussi de f_2^{-1}, et donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est continue.}}$$

De plus, f_2 étant strictement décroissante, il en est de même de f_2^{-1}. Et puisque f_1 est strictement croissante, il s'ensuit que

$$\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante.}}$$

Enfin, d'une part : $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0$ et, d'autre part : $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$ donc : $\lim_{x\to 0} f_2^{-1}(x) = +\infty$. Par composition de limites de fonctions continues :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty.}$$

24. Par définition, pour tout $x \in \,]0,\alpha]$, on a l'égalité : $f(x) = f\big(\varphi(x)\big)$, soit :

$$\frac{2x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{2\varphi(x)}{1+\mathrm{e}^{\varphi(x)}} = \frac{2\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\varphi(x)}}{\mathrm{e}^{-\varphi(x)}+1}.$$

On en déduit donc, puisque les quantités sont strictement positives :

$$\ln x + \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^x}\right) = \ln 2 + \ln\big(\varphi(x)\big) - \varphi(x) - \ln\big(1+\mathrm{e}^{-\varphi(x)}\big),$$

d'où :

$$\frac{\ln x}{\varphi(x)} = \frac{\ln 2}{\varphi(x)} + \frac{\ln\big(\varphi(x)\big)}{\varphi(x)} - 1 - \frac{\ln\big(1+\mathrm{e}^{-\varphi(x)}\big)}{\varphi(x)} - \frac{\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^x}\right)}{\varphi(x)}.$$

Maintenant, d'après **23.b)**, $\varphi(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, donc on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\varphi(x)} = -1,$$

et donc :

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x).}$$

25. La fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc f_1 et f_2 sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. De plus, puisque f_2' ne s'annule pas sur $]\alpha,+\infty[$, alors f_2^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, f(\alpha)[$.

Par composition,

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,\alpha[.}$$

26. • Tout d'abord, d'après **17.a)**, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2\psi(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2},$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{2\psi'(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} - \frac{4\psi(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^3}.$$

On en déduit, puisque $\psi(\alpha) = 0$:

$$f''(\alpha) = \frac{2\psi'(\alpha)}{(\mathrm{e}^\alpha+1)^2} = \frac{-2\alpha\,\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha+1)^2} < 0.$$

• Ensuite, d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de α on a :

$$f(x) \underset{\alpha}{=} f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2}\,f''(\alpha) + \mathrm{o}\big((x-\alpha)^2\big),$$

donc :

$$f(x) - f(\alpha) \underset{\alpha}{\sim} \frac{(x-\alpha)^2}{2}\,f''(\alpha).$$

• Or, puisque pour tout $x \in]0,\alpha]$, on a : $f(x) = f\big(\varphi(x)\big)$ et que $\varphi(\alpha) = \alpha$, on en déduit que dans un voisinage à gauche de α :

$$f\big(\varphi(x)\big) - f(\alpha) \underset{\alpha}{\sim} \frac{\big(\varphi(x)-\alpha\big)^2}{2} f''(\alpha),$$

d'où on déduit :

$$\frac{\big(\varphi(x)-\alpha\big)^2}{2} f''(\alpha) \underset{\alpha}{\sim} \frac{(x-\alpha)^2}{2} f''(\alpha) \quad \text{d'où :} \quad \big(\varphi(x)-\alpha\big)^2 \underset{\alpha}{\sim} (x-\alpha)^2.$$

Or si $x \in]0,\alpha[$, alors $x - \alpha < 0$, et d'après **23.b)** φ est strictement décroissante sur $]0,\alpha]$ donc : $\varphi(x) - \alpha > \varphi(\alpha) - \alpha = 0$. Il s'ensuit que :

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha) \underset{\alpha}{\sim} -(x-\alpha), \qquad \text{ou} \qquad \varphi(x) \underset{\alpha}{=} \alpha - (x-\alpha) + \mathrm{o}(x-\alpha),$$

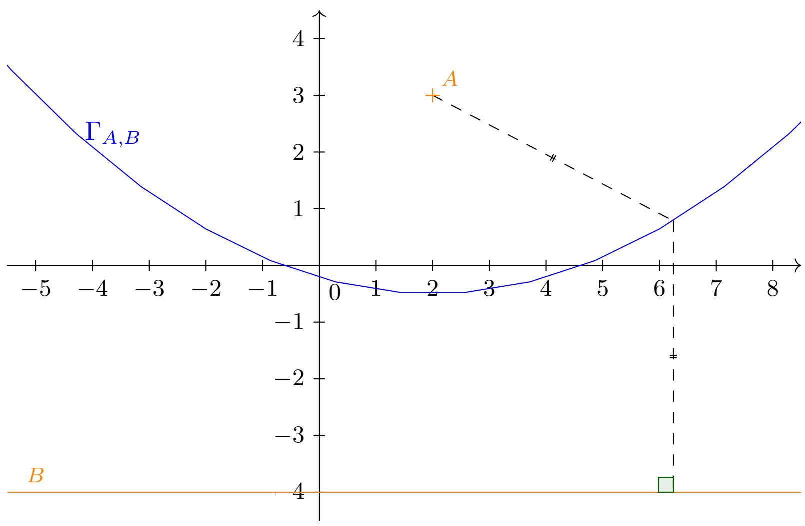
d'où on peut conclure que :

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } \alpha \text{ et : } \varphi'(\alpha) = -1.}$$

Partie III : Courbe médiatrice de deux fermés dans $\mathbb{R}^2$

27. a) Si A est un point et B une droite horizontale alors, d'après le rappel donné au début du sujet,

$$\boxed{\text{la courbe médiatrice de } A \text{ et } B \text{ est la parabole de centre } A \text{ et de directrice } B.}$$



b) On suppose que $A = \{(0,1)\}$ et $B = \{B_1(-1,-1), B_2(1,-1)\}$, et soit $M(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$. La médiatrice de $[B_1, B_2]$, qui est la droite d'équation $x = 0$, sépare le plan en deux demi-plans : l'un d'inéquation $x < 0$ correspondant aux points qui sont plus proches de B_1 que de B_2 ; l'autre d'inéquation $x > 0$ correspondant aux points qui sont plus proches de B_2 que de B_1.

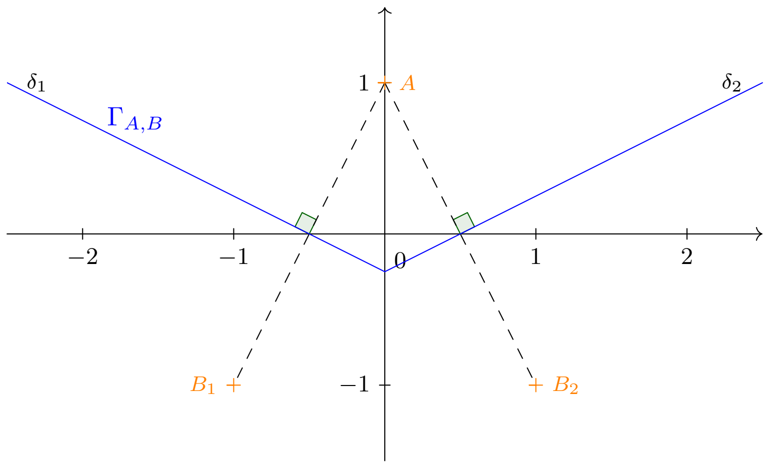
• Ainsi, si $x_M \leqslant 0$, $d(M,B) = d(M,B_1)$ et donc :

$$d(M,B) = d(M,A) \Leftrightarrow d(M,B_1) = d(M,A) \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice } \delta_1 \text{ de } [A,B_1].$$

• De même, si $x_M \geqslant 0$, alors $d(M,B) = d(M,B_2)$ et donc :

$$d(M,B) = d(M,A) \Leftrightarrow d(M,B_2) = d(M,A) \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice } \delta_2 \text{ de } [A,B_2].$$

$$\boxed{\text{la courbe médiatrice de } A \text{ et } B \text{ est la réunion des deux demi-droites } \delta_1,\ x \leqslant 0 \text{ et } \delta_2,\ x \geqslant 0.}$$



28. **a)** Soient $a \in A$ et $t \geqslant 0$. Par définition, on a :

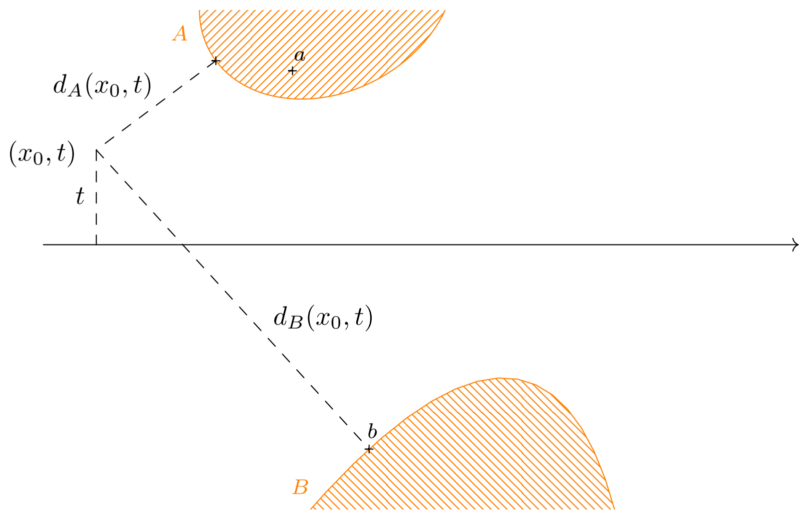
$$d\big((x_0,t),A\big) \leqslant d\big((x_0,t),a\big),$$

et puisque B est situé au-dessous de Δ et que (x_0,t) est situé au-dessus de Δ :

$$d\big((x_0,t),B\big) \geqslant d\big((x_0,t),\Delta\big) = t.$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad \Phi_{x_0}(t) = d_A(x_0,t) - d_B(x_0,t) \leqslant d\big((x_0,t),a\big) - t.}$$



b) En notant (x_a, y_a) les coordonnées de a, on a :

$$\begin{aligned}\Big(d\big((x_0,t),a\big) - t\Big)\Big(d\big((x_0,t),a\big) + t\Big) &= d^2\big((x_0,t),a\big) - t^2 \\ &= (x_a - x_0)^2 + (y_a - t)^2 - t^2 \\ &= \Big((x_a - x_0)^2 + y_a^2\Big) - 2y_a\, t.\end{aligned}$$

Donc, en posant : $\mu = -\big((x_a - x_0)^2 + y_a^2\big)$ et $\lambda = 2y_a > 0$, on obtient :

$$\Big(d\big((x_0,t),a\big) - t\Big)\Big(d\big((x_0,t),a\big) + t\Big) = -(\lambda t + \mu).$$

Or, si $t > 0$, alors :

$$d\big((x_0,t),a\big) + t > 0,$$

et, si $t \leqslant 0$, alors, comme en **28.a)** :

$$d\big((x_0,t),a\big) > d\big((x_0,t),\Delta\big) = -t, \quad \text{donc :} \quad d\big((x_0,t),a\big) + t > 0.$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\exists \lambda > 0,\ \exists \mu \in \mathbb{R} \ \big|\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad d\big((x_0,t),a\big) - t = -\frac{\lambda t + \mu}{d\big((x_0,t),a\big) + t}.}$$

Si $t > -\dfrac{\mu}{\lambda}$, alors $\lambda t + \mu > 0$ et donc : $d\big((x_0,t),a\big) - t < 0$. D'après l'inégalité obtenue en **28.a)**, il s'ensuit que :

$$\boxed{\exists t_0 \in \mathbb{R} \ \big|\ \Phi_{x_0}(t_0) < 0.}$$

c) De même, soient $b \in B$ et $t \leqslant 0$. Alors on a :

$$d_B(x_0,t) \leqslant d\big((x_0,t),b\big) \quad \text{et} \quad d_A(x_0,t) \geqslant d_\Delta(x_0,t) = -t,$$

donc :

$$\Phi_{x_0}(t) \geqslant -d\big((x_0,t),b\big) - t.$$

Or, en notant (x_b,y_b) les coordonnées de b, on a comme précédemment et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Big(d\big((x_0,t),b\big) - t\Big)\Big(d\big((x_0,t),b\big) + t\Big) = \Big((x_b - x_0)^2 + y_b^2\Big) - 2y_b\, t = \lambda' t + \mu',$$

avec : $\lambda' = -2y_b > 0$ et $\mu' = (x_b - x_0)^2 + y_b^2$.

Or, si $t < 0$, alors

$$d\big((x_0,t),b\big) - t > 0,$$

et, si $t \geqslant 0$, alors :

$$d\big((x_0,t),b\big) > d\big((x_0,t),\Delta\big) = t, \quad \text{donc :} \quad d\big((x_0,t),b\big) - t > 0.$$

On peut donc conclure :

$$\exists \lambda' > 0,\ \exists \mu' \in \mathbb{R} \ \big|\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad -d\big((x_0,t),b\big) - t = -\frac{\lambda' t + \mu'}{d\big((x_0,t),b\big) - t}.$$

Enfin, si $t < -\dfrac{\mu'}{\lambda'}$, alors $\lambda' t + \mu' < 0$ et donc : $-d\big((x_0,t),b\big) - t > 0$, et il s'ensuit que :

$$\boxed{\exists t_1 \in \mathbb{R} \ \big|\ \Phi_{x_0}(t_1) > 0.}$$

d) La fonction Φ_{x_0} est continue sur $\mathbb{R}$ et on a vu qu'il existe deux réels t_0 et t_1 tels que : $\Phi_{x_0}(t_0) < 0$ et $\Phi_{x_0}(t_1) > 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\exists y_0 \in \mathbb{R} \ \big|\ \Phi_{x_0}(y_0) = 0.}$$

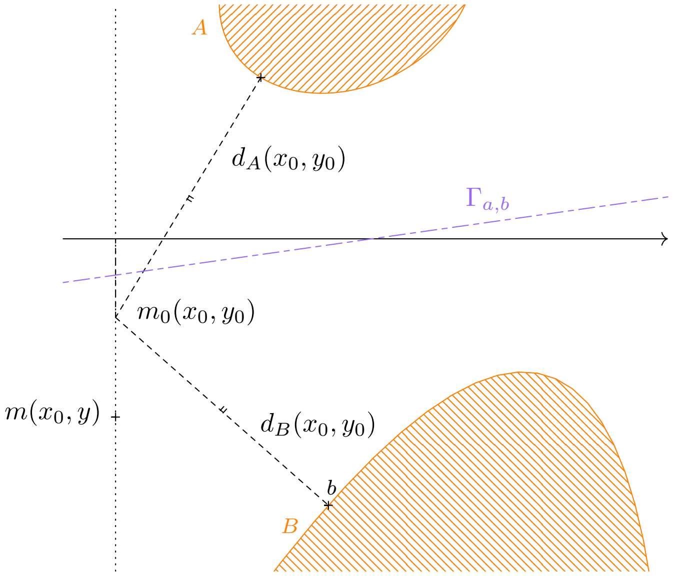
e) Soit $m(x_0,y)$ avec $y < y_0$. Considérons la médiatrice $\Gamma_{a,b}$ du segment $[a,b]$. On sait qu'elle partage le plan en deux demi-plans : l'un correspondant aux points qui sont au-dessus de $\Gamma_{a,b}$ et qui sont plus proches de a que de b qu'on notera $\mathscr{P}_a$; l'autre correspondant aux points qui sont au-dessous de $\Gamma_{a,b}$ et qui sont plus proches de b que de a qu'on notera $\mathscr{P}_b$.

Puisque

$$d(m,b) = d_B(m_0) = d_A(m_0) \leqslant d(m_0,a),$$

ce qui signifie que $m \in \mathscr{P}_b$. Or, la droite (ab) n'étant pas horizontale puisque $y_a \neq y_b$, $\Gamma_{a,b}$ n'est pas verticale. Ainsi, m étant au-dessous de m_0, m est aussi au-dessous de $\Gamma_{a,b}$, c'est-à-dire : $m \in \mathscr{P}_b$, ou encore :

$$\boxed{d(m,b) < d(m,a).}$$



Or, on sait que
$$d_B(m) \leqslant d(m,b) \quad \text{et} \quad \exists a \in A \;\big|\; d_A(m) = d(m,a).$$
On obtient donc :
$$\Phi_{x_0}(y) = B_A(m) - d_B(m) \geqslant d(m,a) - d(m,b),$$
et donc, d'après l'inégalité précédemment prouvée :
$$\boxed{\Phi_{x_0}(y) > 0.}$$

f) On démontre de même que pour tout $y > y_0$, $\Phi_{x_0}(y) < 0$. Il s'ensuit que :
$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \exists!\, y_0 \in \mathbb{R} \;\big|\; \Phi_{x_0}(y_0) = 0 \quad \text{soit :} \quad d_A(x_0, y_0) = d_B(x_0, y_0).$$
Ainsi,
$$\boxed{\text{l'application } \varphi_{A,B} : x_0 \in \mathbb{R} \mapsto y_0 \in \mathbb{R} \text{ admet } \Gamma_{A,B} \text{ pour graphe.}}$$

29. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers σ : il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N} \;\big|\; \Big(N > n \text{ et } \left|u_N - \sigma\right| > \varepsilon\Big).$$

• En particulier pour $n = 0$, il existe $n_0 > n$ tel que : $\left|u_{n_0} - \sigma\right| > \varepsilon$.

De même, pour $n = n_0$, il existe $n_1 > n_0$ tel que : $\left|u_{n_1} - \varepsilon\right| > \varepsilon$.

• Supposons qu'on ait défini les termes $(u_{n_i})_{0\leqslant i\leqslant p}$ tels que : $n_0 < n_1 < \ldots < n_p$ et que : $\forall i \in [\![0,p]\!]$, $\left|u_{n_i} - \sigma\right| > \varepsilon$. Alors, de même, il existe $n_{p+1} > n_p$ tel que : $\left|u_{n_{p+1}} - \sigma\right| > \varepsilon$.
On construit ainsi une suite $v = (u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont σ n'est pas une valeur d'adhérence.

• Or, si cette suite v possède une valeur d'adhérence, alors ce serait aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que ce serait σ, ce qui n'est pas le cas. Donc v ne possède pas de valeur d'adhérence.

Or, la suite v est bornée (puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est), donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède (au moins) une valeur d'adhérence : d'où une contradiction !

Finalement :
$$\boxed{\text{si la suite bornée } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne possède qu'une seule valeur d'adhérence } \sigma, \text{ alors elle converge vers } \sigma.}$$

30. **a)** • Soit $m_0 \in \Gamma_{A,B}$. D'après **28.b)** avec $t = y_0$, on a :

$$\forall a \in A, \quad \big(d(m_0, a) - y_0\big)\big(d(m_0, a) + y_0\big) = -2y_a y_0 + \big((x_0 - x_a)^2 + y_a^2\big)$$

avec $d(m_0, a) + y_0 > 0$. Supposons que $d(m_0, a) - y_0 < 0$; on aurait alors :

$$d(m_0, a) < y_0 \quad \text{donc :} \quad d(m_0, a) < d(m_0, \Delta) \text{ et } \ y_0 > 0,$$

d'où :

$$d(m_0, a) < d(m_0, \Delta) < d(m_0, B),$$

ce qui est contradictoire avec le choix de m_0 pour lequel il existe $a \in A$ tel que : $d(m_0, a) = d_A(m_0) = d_B(m_0)$. Donc, on a aussi :

$$d(m_0, a) + y_0 \geqslant 0,$$

ce qui implique que :

$$-2y_a y_0 + \big((x_0 - x_a)^2 + y_a^2\big) \geqslant 0,$$

et donc, puisque $y_a > 0$:

$$y_0 \leqslant \frac{(x_0 - x_a)^2 + y_a^2}{2y_a}.$$

• De même, d'après **28.c)**, on a :

$$\forall b \in B, \quad \big(d(m_0, b) - y_0\big)\big(d(m_0, b) + y_0\big) = -2y_b y_0 + \big((x_0 - x_b)^2 + y_b^2\big) \geqslant 0$$

et donc, puisque $y_b < 0$:

$$y_0 \geqslant \frac{(x_0 - x_b)^2 + y_b^2}{2y_b}.$$

• Ainsi, avec

$$P_1 = \frac{(X - x_a)^2 + y_a^2}{2y_a} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{(X - x_b)^2 + y_b^2}{2y_b},$$

on peut conclure que :

$$\boxed{\text{il existe deux polynômes } P_1 \text{ et } P_2 \text{ de degré 2 tels que : } P_1 \leqslant \varphi_{A,B} \leqslant P_2.}$$

b) D'après **30.a)**, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_1(x_n) \leqslant y_n \leqslant P_2(x_n).$$

Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et que P_1 et P_2 sont continues sur $\mathbb{R}$ (donc en x), les suites $\big(P_1(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(P_2(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $P_1(x)$ et $P_2(x)$. On en déduit qu'elles sont bornées :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\big|\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \leqslant P_1(x_n) \leqslant P_2(x_n) \leqslant \beta,$$

et il s'ensuit que

$$\boxed{\text{la suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

c) La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, elle possède au moins une valeur d'adhérence. Supposons donc que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence σ_1 et σ_2. Il existe alors deux suites extraites $\big(y_{\tau_1(n)}\big)$ et $\big(y_{\tau_2(n)}\big)$ convergeant respectivement vers σ_1 et σ_2.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in \Gamma_{A,B}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_A\big(x_{\tau_1(n)}, y_{\tau_1(n)}\big) = d_B\big(x_{\tau_1(n)}, y_{\tau_1(n)}\big).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, et par continuité de d_A et d_B, on obtient :

$$d_A(x, \sigma_1) = d_B(x, \sigma_1) \quad \text{soit :} \quad \Phi_x(\sigma_1) = 0.$$

De la même manière, on a aussi

$$d_A(x, \sigma_2) = d_B(x, \sigma_2) \quad \text{soit :} \quad \Phi_x(\sigma_2) = 0.$$

Or, d'après **28.**, Φ_x s'annule en un unique point. Donc $\sigma_1 = \sigma_2$:

$$\boxed{\text{la suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une unique valeur d'adhérence.}}$$

d) La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et possède une unique valeur d'adhérence. D'après **29.**, on en déduit qu'elle converge. En notant y sa limite, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_A(x_n, y_n) = d_B(x_n, y_n) \quad \text{d'où :} \quad d_A(x, y) = d_B(x, y),$$

ce qui signifie que $y = \varphi_{A,B}(x)$.

On a donc démontré que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\varphi_{A,B}(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y = \varphi_{A,B}(x)$. D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, cela signifie que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi_{A,B} \text{ est continue en tout } x \in \mathbb{R}, \text{ donc sur } \mathbb{R}.}$$

31. Dans l'exemple **27.a)**, $\varphi_{A,B}$ est une fonction polynôme de degré 2 donc

$$\boxed{\varphi_{A,B} \text{ n'est pas lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$$

32. **a)** D'une part, l'intervalle I est compact et, d'autre part, l'application $\varphi_{A,B}$ est continue. Donc $\varphi_{A,B}(I)$ est compact et donc, le produit cartésien :

$$\boxed{\Gamma' = I \times \Gamma_{A,B}(I) \text{ est compact.}}$$

b) Puisque Γ' est compact et que d_A est continue, $d\big\{_A(m)\ ;\ m \in \Gamma'\big\}$ est compact. En particulier, il est borné et donc :

$$\boxed{\exists R_0 > 0 \mid \forall m \in \Gamma',\ d_A(m) \leqslant R_0.}$$

c) L'application : $(m, v) \in \Gamma' \times \overline{B}(0,1) \mapsto m + v$ est continue sur le compact $\Gamma' \times \overline{B}(0,1)$, donc son image est compacte. En particulier, elle est bornée. En d'autres termes

$$\boxed{\text{il existe } R > 0 \text{ tel que, pour tout } m \in \Gamma', \text{ on ait : } \overline{B}(m, R_0) \subset \overline{B}(0, R).}$$

33. D'une part, K_A (resp. K_B) est un compact comme intersection du fermé A et du compact $\overline{B}(0,1)$. De plus, on a : $K_A \subset A \subset \mathscr{P}^+$ (resp. $K_B \subset B \subset \mathscr{P}^-$).

De plus, d'après le choix de R_0, pour tout $m \in \Gamma'$ on a : $d_A(m) \leqslant R_0$ et donc : il existe $a \in A$ tel que : $d(m, a) \leqslant R_0$. Ainsi : $a \in \overline{B}(m, R_0) \subset \overline{B}(0, R)$, ce qui signifie que : $a \in A \cap \overline{B}(0, R) = K_A$ qui est donc non vide. De même, on a : $K_B \neq \varnothing$.

$$\boxed{K_A \text{ et } K_B \text{ sont des parties compactes non vides de } \mathbb{R}^2 \text{ telles que : } K_A \subset \mathscr{P}^+ \text{ et } K_B \subset \mathscr{P}^-.}$$

Considérons $x \in I$ et soit $y = \varphi_{A,B}(x)$. Alors on sait qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que :

$$d_A(x, y) = d\big((x, y), a\big) = d\big((x, y), b\big) = d_B(x, y).$$

Or, $(x, y) \in \Gamma'$ donc $d\big((x, y), a\big) \leqslant R_0$ et donc : $a \in K_A$. De la même façon : $b \in K_B$. On peut donc écrire :

$$d_{K_A}(x, y) = d_A(x, y) = d_B(x, y) = d_{K_B}(x, y),$$

et donc :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \varphi_{A,B}(x) = y = \varphi_{K_A,K_B}(x).}$$

34. Notons $\mathscr{R} = (O; I, J)$ et soient $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ deux points distincts de Γ. Alors le coefficient directeur de la corde $[M, N]$ de Γ est :

$$\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \tan(\alpha), \quad \text{où : } \alpha = \big((OI), (MN)\big) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Notons $\mathscr{R}_\theta = \left(O; \vec{\imath}_\theta, \vec{\jmath}_\theta\right)$. Alors, dans ce repère, le coefficient directeur de la corde $[M, N]$ est : $\tan(\alpha - \theta)$. Or, la courbe Γ est encore une courbe de fonction pour tout $\theta \in \left]-\rho, \rho\right[$ si, et seulement si, Γ ne possède aucune corde parallèle à l'axe $(O, \vec{\jmath}_\theta)$. Ceci implique d'une part que $\rho \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, d'autre part, que :

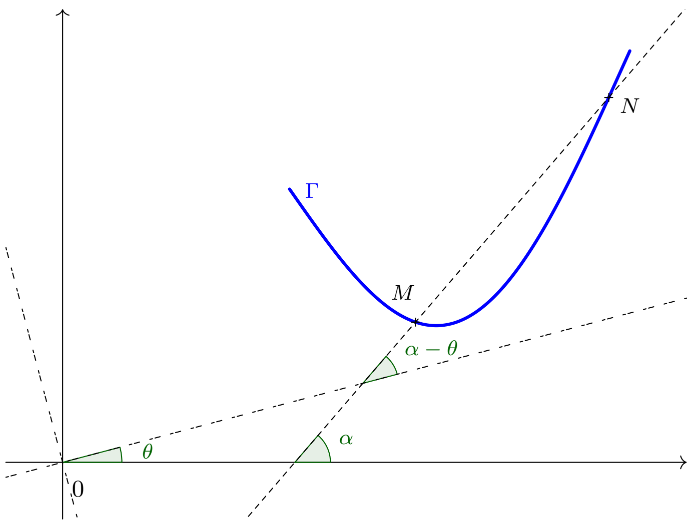
$$\forall \theta \in \left]-\rho, \rho\right[, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha - \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \text{soit :} \quad \theta - \frac{\pi}{2} < \alpha < \theta + \frac{\pi}{2}.$$

d'où :

$$\rho - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} - \rho,$$

et donc :

$$-\operatorname{cotan}(\rho) < \tan \alpha < \operatorname{cotan}(\rho).$$

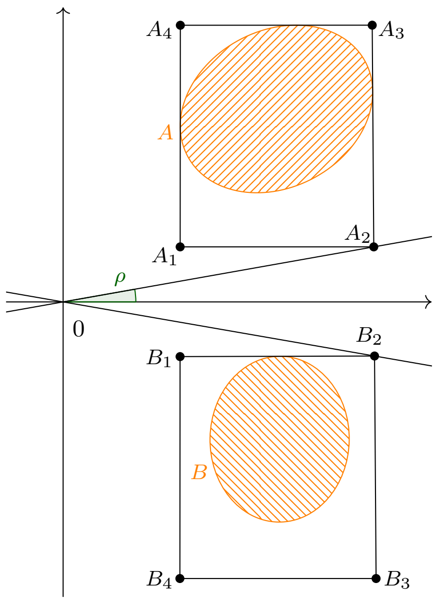


35. D'après **33.**, on peut supposer que A et B sont compacts. A une translation près, on peut aussi supposer que $A \cup B \subset \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\right\}$. Notons alors $\alpha_1 = \min\left\{x \ ; \ (x, y) \in A \cup B\right\}$, $\alpha_2 = \max\left\{x \ ; \ (x, y) \in A \cup B\right\}$, $\beta_1 = \min\left\{|y| \ ; \ (x, y) \in A \cup B\right\}$ et $\beta_2 = \max\left\{|y| \ ; \ (x, y) \in A \cup B\right\}$.

Alors, A est inclus dans le rectangle de sommets $A_1(\alpha_1, \beta_1)$, $A_2(\alpha_2, \beta_1)$, $A_3(\alpha_2, \beta_2)$ et $A_4(\alpha_1, \beta_2)$, et B est inclus dans le rectangle de sommets $B_1(\alpha_1, -\beta_1)$, $B_2(\alpha_2, -\beta_1)$, $B_3(\alpha_2, -\beta_2)$ et $B_4(\alpha_1, -\beta_2)$.

Les droites (OA_2) et (OB_2) séparent les compacts A et B et ont pour coefficients directeurs respectifs $\dfrac{\beta_1}{\alpha_2}$ et $-\dfrac{\beta_1}{\alpha_2}$. En notant $\rho = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\beta_1}{\alpha_2}\right)$, pour tout $\theta \in \left]-\rho, \rho\right[$, l'axe $(O\vec{\imath}_\theta)$ jouant le rôle de l'axe des abscisses, $\Gamma_{A,B}$ est encore le graphe d'une fonction dans le repère $\mathscr{R}_\theta$. Alors, d'après **34.**

$$\boxed{\varphi_{A,B} \text{ est lipschitzienne sur } I.}$$



Partie IV : Existence d'asymptotes lorsque A et B sont compacts

36. a) Notons b_1 (resp. b_2) le sommet supérieur droit (resp. gauche) du rectangle B. Si le point m est situé au-dessous de la droite (b_1b_2), alors l'angle $\widehat{ab_1m}$ est obtus (ou éventuellement droit) donc, dans le triangle ab_1m, le côté opposé à cet angle obtus est strictement plus grand que les autres côtés, d'où :

$$d_A(m) = d(a, m) > d(b_1, m) \geqslant d_B(m).$$

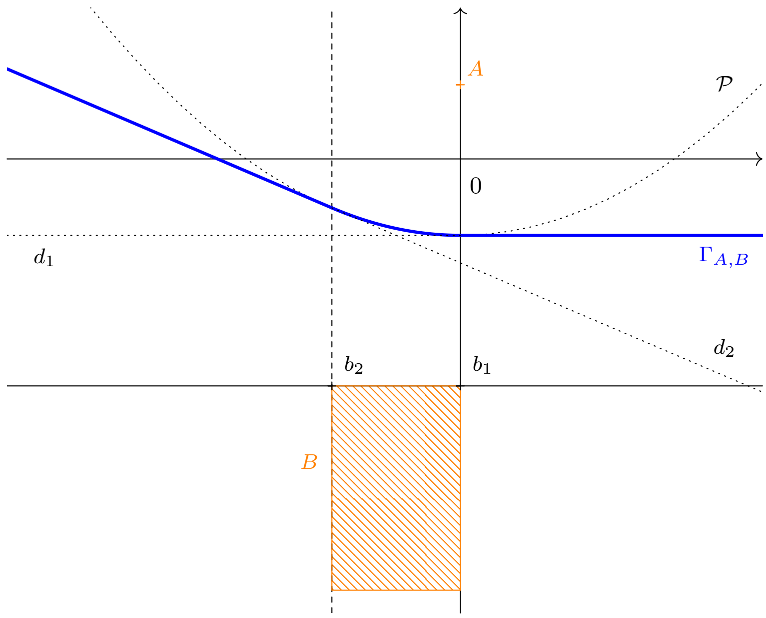
Ainsi, $m \notin \Gamma_{A,B}$:

$$\boxed{\Gamma_{A,B} \text{ est strictement au-dessus de la droite } (b_1b_2).}$$

b) Notons d_1 (resp. d_2) la médiatrice de $[a, b_1]$ (resp. de $[a, b_2]$), (α, β) les coordonnées de b_2, et considérons $m_0(x_0, y_0) \in \Gamma_{A,B}$. On distingue trois cas.

- Si $x_0 \geqslant 0$, alors : $d_B(m_0) = d(m_0, b_1)$ donc $m_0 \in 1$.
- Si $x_0 \leqslant \alpha$, alors $d_B(m_0) = d(m_0, b_2)$ donc $m_0 \in 2$.
- Si $\alpha \leqslant x_0 \leqslant 0$, alors $d_B(m_0) = d\big(m_0, (b_1b_2)\big)$, donc m_0 appartient à la parabole $\mathcal{P}$ de foyer a et de directrice (b_1b_2).

On obtient donc le schéma suivant :



c) Sur $]-\infty, \alpha[$ et sur $]0, +\infty[$, $\varphi_{A,B}$ est affine, donc elle est dérivable. De plus, sur $]\alpha, 0[$, f est une fonction polynôme du second degré, donc elle est aussi dérivable.

Enfin, on sait que, en tout point m d'une parabole de foyer f et de directrice (d), la tangente à la parabole est la médiatrice de $[f, h]$, h étant le projeté orthogonal de m sur (d). Ainsi, ans notre cas, d_1 (resp. d_2) est la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point d'abscisse 0 (resp. α), ce qui implique que $\varphi_{A,B}$ est dérivable en 0 et en α.

Finalement

$$\boxed{\varphi_{A,B} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

37. Soit $m = (x, y) \in \mathscr{P}$. Avec les notations de **28.**, on sait que l'application Φ_x est continue et s'annule en un unique point qu'on a noté $\varphi_{A,B}(x)$. De plus, d'après **28.e)f)** :

$$y < \varphi_{A,B}(x) \;\Leftrightarrow\; \Phi_x(y) > 0 \;\Leftrightarrow\; d_A(m) - d_B(m) > 0.$$

On a donc :

$$\boxed{d_A(m) \geqslant d_B(m) \ \Leftrightarrow\ y \leqslant \varphi_{A,B}(x).}$$

38. **a)** Soient $a \in A$ et $x \in \mathbb{R}$. Par définition, le point $\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big)$ est équidistant de $\{a\}$ et B, d'où, pour tout $b \in B$:

$$d_{\{a\}}\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big) = d_B\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big) \leqslant d\Big(\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big), b\Big) = d_{\{b\}}\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big).$$

Donc, d'après **37.**, on obtient :

$$\varphi_{a,B}(x) \geqslant \varphi_{a,b}(x).$$

Ceci étant vrai pour tout réel x, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi_{a,B} \geqslant \varphi_{a,b}.}$$

b) • Puisque pour tout $b \in B$, on a : $\varphi_{a,b} \leqslant \varphi_{a,B}$, alors $\sup\limits_{b\in B} \varphi_{a,b}$ existe et :

$$\sup_{b\in B} \varphi_{a,b} \leqslant \varphi_{a,B}.$$

• De plus, puisque B est fermé et non vide, d'après **7.** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in B \mid d_{\{a\}}\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big) = d\Big(\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big), \beta\Big).$$

Ainsi :

$$\varphi_{a,B}(x) = \varphi_{a,\beta}(x) \leqslant \sup_{b\in B} \varphi_{a,b}(x),$$

et donc :

$$\varphi_{a,B} \leqslant \sup_{b\in B} \varphi_{a,b}.$$

• Finalement, on a l'égalité :

$$\boxed{\sup_{b\in B} \varphi_{a,b} = \varphi_{a,B}.}$$

39. • D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a \in A$:

$$d_B\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big) = d_{\{a\}}\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big) \geqslant d_A\big(x, \varphi_{a,B}(x)\big),$$

donc d'après **37.** :

$$\varphi_{a,B}(x) \geqslant \varphi_{A,B}(x).$$

On en déduit donc que :

$$\forall a \in A, \quad \varphi_{a,B} = \sup_{b\in B} \varphi_{a,b} \geqslant \varphi_{A,B},$$

ce qui assure également l'existence de $\inf\limits_{a\in A} \left(\sup\limits_{b\in B} \varphi_{a,b}\right) \geqslant \varphi_{A,B}$.

D'autre part, d'après **7.**, il existe $a \in A$ tel que

$$d_B\big(x, \varphi_{A,B}(x)\big) = d_A\big(x, \varphi_{A,B}(x)\big) = d\Big(\big(x, \varphi_{A,B}(x)\big), a\Big) = d_{\{a\}}\big(x, \varphi_{A,B}(x)\big),$$

et il s'ensuit que :

$$\exists a \in A,\ \varphi_{a,B}(x) = \varphi_{A,B}(x), \quad \text{d'où :} \quad \inf_{a\in A} \varphi_{a,B}(x) \leqslant \varphi_{A,B}(x).$$

On obtient donc :

$$\boxed{\inf_{a\in A} \left(\sup_{b\in B} \varphi_{a,b}\right) = \varphi_{A,B}.}$$

• Comme en **38.**, pour tout $a \in A$, tout $b \in B$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$d_{\{b\}}\big(x, \varphi_{A,b}(x)\big) = d_A\big(x, \varphi_{A,b}(x)\big) \leqslant d_{\{a\}}\big(x, \varphi_{A,b}(x)\big),$$

d'où, d'après **37.** :

$$\varphi_{A,b}(x) \leqslant \varphi_{a,b}(x).$$

Ainsi, $\inf\limits_{a\in A} \varphi_{a,b}(x)$ existe et :

$$\varphi_{A,b}(x) \leqslant \inf_{a\in A} \varphi_{a,b}(x) \quad \text{d'où :} \quad \varphi_{A,b} \leqslant \inf_{a\in A} \varphi_{a,b}.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $b \in B$:

$$\exists \alpha \in A \mid d_A\big(x, \varphi_{A,b}(x)\big) = d\Big(\big(x, \varphi_{A,b}(x)\big), \alpha\Big),$$

donc :

$$\varphi_{A,b}(x) = \varphi_{\alpha,b}(x) \geqslant \inf_{a\in A} \varphi_{a,b}(x) \quad \text{d'où :} \quad \varphi_{A,b} \geqslant \inf_{a\in A} \varphi_{a,b},$$

et donc :

$$\boxed{\varphi_{A,b} = \inf_{a\in A} \varphi_{a,b}.}$$

Et, comme en **39.**, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $b \in B$:

$$d_A\big(x, \varphi_{A,b}(x)\big) = d_{\{b\}}\big(x, \varphi_{A,b}(x)\big) \geqslant d_B\big(x, \varphi_{A,b}(x)\big),$$

donc d'après **37.** :

$$\varphi_{A,b}(x) \leqslant \varphi_{A,B}(x).$$

On en déduit donc que :

$$\forall b \in B, \quad \varphi_{A,b} = \inf_{a\in A} \varphi_{a,b} \leqslant \varphi_{A,B},$$

ce qui assure également l'existence de $\sup\limits_{b\in B} \left(\inf\limits_{a\in A} \varphi_{a,b}\right) \leqslant \varphi_{A,B}$.

Enfin, toujours d'après **7.**, il existe $b \in B$ tel que

$$d_A\big(x, \varphi_{A,B}(x)\big) = d_B\big(x, \varphi_{A,B}(x)\big) = d\Big(\big(x, \varphi_{A,B}(x)\big), b\Big) = d_{\{b\}}\big(x, \varphi_{A,B}(x)\big),$$

et il s'ensuit que :

$$\exists b \in B,\ \varphi_{A,b}(x) = \varphi_{A,B}(x), \quad \text{d'où :} \quad \sup_{b\in B} \varphi_{A,b}(x) \geqslant \varphi_{A,B}(x).$$

On obtient donc :

$$\boxed{\sup_{b\in B} \left(\inf_{a\in A} \varphi_{a,b}\right) = \varphi_{A,B}.}$$

40. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $\tau : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - ty$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Puisque A est un compact non vide, $\tau(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$: il possède donc un maximum. On peut donc définir le réel :

$$p(t) = \max_{(x,y)\in A} (x - ty).$$

Alors, A est inclus dans le demi-plan $\big\{(x, y) \in \mathscr{P}\ ;\ x \leqslant ty + p(t)\big\}$ et il existe $(x, y) \in A$ tel que : $x - ty = p(t)$, donc : $\mathscr{D}_t \cap A \neq \varnothing$. Par construction, le réel $p(t)$ est unique :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ il existe un unique réel } p(t) \text{ tel que } \mathscr{D}_t \text{ s'appuie sur } A \text{ à droite.}}$$

b) Puisque A est un compact de $\mathbb{R}^2$, il est borné : il existe donc un réel $k > 0$ tel que :

$$A \subset [-k, k] \times [-k, k].$$

Alors :

$$\forall (x, y) \in A,\ \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad x - ty = x - sy + (s - t)y \leqslant p(s) + k\,|t - s|.$$

Ainsi, $p(s) + k\,|t - s|$ est un majorant de $\big\{x - ty\ ;\ (x, y) \in A\big\}$. Par définition de $p(t)$, on a donc :

$$p(t) \leqslant p(s) + k\,|t - s|, \quad \text{d'où :} \quad p(t) - p(s) \leqslant k\,|t - s|.$$

De même, en permutant s et t, on obtient

$$p(s) - p(t) \leqslant k\,|s - t|,$$

et donc :

$$\big|p(t) - p(s)\big| \leqslant k\,|t - s|,$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la fonction } p \text{ est lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$$

c) • Soient deux réels s et t tels que $s < t$. On a vu en **40)a)** qu'il existe $(x_t, y_t) \in A$ tel que : $p(t) = x_t - ty_t$. Puisque $A \subset \mathscr{P}^+$, on a $y_t > 0$ et donc :

$$p(t) = x_t - ty_t < x_t - sy_t \leqslant p(s),$$

ce qui démontre que

$$\boxed{\text{la fonction } p \text{ est strictement décroissante.}}$$

Comme en **35.**, considérons le réel strictement positif $\beta = \min\big\{y\ ;\ (x, y) \in A\big\}$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $-k \leqslant x_t \leqslant k$ et $\beta \leqslant y_t \leqslant k$.

- Si $t \geqslant 0$, alors

$$-tk \leqslant -ty_t \leqslant -t\beta \quad \text{d'où :} \quad -k - tk \leqslant x_t - ty_t = p(t) \leqslant -k - t\beta.$$

  Or : $\lim\limits_{t \to +\infty} (-k - t\beta) = -\infty$, donc d'après le théorème de majoration :

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = -\infty.$$

- De même, si $t \leqslant 0$, alors :

$$-t\beta \leqslant -ty_t \leqslant -tk \quad \text{d'où :} \quad -k - t\beta \leqslant x_t - ty_x = p(t) \leqslant -k - tk,$$

  et, puisque $\lim\limits_{t \to -\infty} (-k - t\beta) = +\infty$, d'après le théorème de minoration :

$$\lim_{t \to -\infty} p(t) = +\infty.$$

Ainsi, p étant continue puisque lipschitzienne, on a : $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et donc

$$\boxed{p \text{ est une bijection (strictement décroissante) de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

41. • On définit de même la fonction $q : t \in \mathbb{R} \mapsto \max\limits_{(x,y)\in B}(x - ty)$. On démontre de même que q est lipschitzienne (donc continue) sur $\mathbb{R}$.

Soient s et t sont deux réels tels que $t < s$. On sait qu'il existe $(x'_t, y'_t) \in B$ tel que : $q(t) = x'_t - ty'_t$ avec, puisque $B \subset \mathscr{P}^-$, $y'_t < 0$. On a alors :

$$q(t) = x'_t - ty'_t < x'_t - sy'_t \leqslant q(s),$$

ce qui prouve que q est strictement croissante.

• En posant $\beta' = \max\{y\ ;\ (x, y) \in B\} < 0$ et $k' > 0$ tel que $B \subset [-k', k'] \times [-k', k']$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $-k' \leqslant x'_t \leqslant k'$ et $-k' \leqslant y'_t \leqslant \beta'$.

- Si $t \geqslant 0$, alors :

$$-k' - t\beta' \leqslant x'_t - ty'_t = q(t) \leqslant k' + tk' \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}(-k' - t\beta') = +\infty,$$

  donc :

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = +\infty.$$

- Et, si $t \leqslant 0$, alors :

$$-k' + tk' \leqslant x'_t - ty'_t = q(t) \leqslant k' - t\beta' \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty}(k' - t\beta') = -\infty,$$

  donc :

$$\lim_{t\to-\infty} q(t) = -\infty.$$

• On en déduit que q est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $p - q$ est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(t_0) - q(t_0) = 0$, d'où on en déduit que :

$$\boxed{\text{il existe une unique droite } \mathscr{D}_{t_0} = \delta \text{ qui s'appuie simultanément sur } A \text{ et } B \text{ à droite.}}$$

42. Puisque δ est fermée et que A et B sont compacts, les intersections $\delta \cap A$ et $\delta \cap B$ sont compactes, non vides par hypothèse, et disjointes puisque A et B le sont.

Notons $\alpha = \max\{x\ ;\ (x, y) \in A\}$, $\alpha' = \min\{x\ ;\ (x, y) \in B\}$ et m_A le point de $\delta \cap A$ d'abscisse α, m_B le point de $\delta \cap B$ d'abscisse α'. Alors, d'après le choix de α, si $a \in \delta \cap A$, alors $m_A \in [a, m_B]$ et donc

$$d(a, m_B) \geqslant d(m_A, m_B).$$

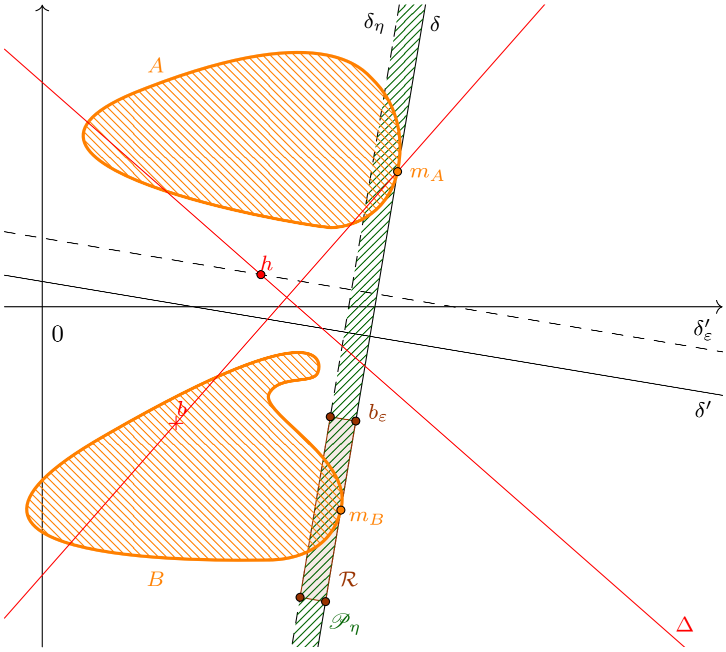
De même, si $b \in \delta \cap B$, alors $m_B \in [m_A, b]$ et donc :

$$d(m_A, b) \geqslant d(m_A, m_B).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Parmi les segments inclus dans } \delta \text{ dont les extrémités sont respectivement sur } A \text{ et } B,\\ \text{il en existe un unique de longueur minimale : c'est } [m_A, m_B].\end{array}}$$

43. Une équation de δ étant : $x = ty + p(t)$, une équation de δ' est : $y = -tx + s$. Soit $\varepsilon > 0$ et notons δ'_ε la droite d'équation $y = -tx + s + \varepsilon$, b_ε le symétrique de m_A par rapport à δ'_ε ; pour ε suffisamment petit, $b_\varepsilon \in \mathscr{P}^-$.

Soit $\eta > 0$ et notons δ_η la droite d'équation : $x = ty + p(t) - \eta$, et $\mathscr{P}_\eta$ la portion fermée de plan comprise entre δ et δ_η. Puisque B est compact, il existe η suffisamment petit tel que $\mathscr{P}_\eta \cap B$ ne contienne pas de points d'ordonnée strictement supérieure à celle de b_ε. On considère alors un rectangle plein fermé $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varepsilon, \eta)$ dont deux côtés sont portés par δ et δ_η, l'un des sommets est b_ε et tel que : $(B \cap \mathscr{P}_\eta) \subset \mathcal{R}$.



• D'après **38.a)**, on a :

$$\forall b \in B \cap \mathcal{R}, \quad \varphi_{m_A,b} \leqslant \varphi_{m_A,\mathcal{R}} = \sup_{r \in \mathcal{R}} \varphi_{m_A,r},$$

et, d'après **36.** :

$$\exists x_1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x_1 \ \Rightarrow\ \varphi_{m_A,\mathcal{R}}(x) = -tx + s + \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\exists x_1 > 0,\ \forall b \in B \cap \mathcal{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x_1 \ \Rightarrow\ \varphi_{m_A,b}(x) \leqslant -tx + s + \varepsilon.$$

• Si $\overline{B \setminus \mathcal{R}} = \varnothing$, alors on a donc démontré que :

$$\exists x_1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x_1 \ \Rightarrow\ \varphi_{m_A,B}(x) \leqslant -tx + s + \varepsilon.$$

• Supposons maintenant que $\overline{B \setminus \mathcal{R}} \neq \varnothing$. Alors, par construction de $\mathcal{R}$, pour tout $b \in \overline{B \setminus \mathcal{R}}$, la droite $(m_A b)$ n'est pas parallèle à δ ; la médiatrice Δ de $[m_A, b]$ n'est donc pas parallèle à δ'_ε : elles sont donc sécantes en un point h de coordonnées (x_h, y_h).

La demi-droite $\begin{cases} \delta'_\varepsilon \\ x \geqslant x_h \end{cases}$ étant au-dessus de la demi-droite $\begin{cases} \Delta \\ x \geqslant x_h \end{cases}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x_h \ \Rightarrow\ \varphi_{m_A,b}(x) \leqslant -tx + s + \varepsilon.$$

En posant $x_2 = \max\limits_{b \in \overline{B \setminus \mathcal{R}}} x_h$, qui est bien défini car $\overline{B \setminus \mathcal{R}}$ est compact, on peut écrire :

$$\forall b \in \overline{B \setminus \mathcal{R}},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x_2 \ \Rightarrow\ \varphi_{m_A,b}(x) \leqslant -tx + s + \varepsilon.$$

• Ainsi, avec $x_0 = \max(x_1, x_2)$, on a :

$$\forall b \in B,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x_0 \ \Rightarrow\ \varphi_{m_A,b}(x) \leqslant -tx + s + \varepsilon,$$

et donc, d'après **38.b)** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x_0 \ \Rightarrow\ \varphi_{m_A,B}(x) = \sup_{b \in B} \varphi_{m_A,b}(x) \leqslant -tx + s + \varepsilon.$$

Enfin, d'après **38.a)**, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x_0 \ \Rightarrow\ \varphi_{A,B}(x) \leqslant \varphi_{m_A,B}(x) \leqslant -tx + s + \varepsilon.$$

• De la même manière, on démontre qu'il existe $x'_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant x'_0 \;\Rightarrow\; \varphi_{A,B}(x) \geqslant -tx + s - \varepsilon,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha = \max(x_0, x'_0) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant \alpha \;\Rightarrow\; -tx + s - \varepsilon \leqslant \varphi_{A,B}(x) \leqslant -tx + s + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{la médiatrice } \delta' \text{ de } [m_A, m_B] \text{ est asymptote à } \Gamma \text{ en } +\infty.}$$