Agrégation interne - Mathématiques

Concours 2017 : Correction de l'épreuve 1

Thierry Gaspari, février 2017

Préliminaires.

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Alors il existe $r > 0$ et $a \in]-\pi, \pi[$ tel que $z = re^{ia}$.
   Les deux racines complexes de z sont alors $u_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{a}{2}}$ et $u_2 = -u_1 = \sqrt{r}e^{i(\pi+\frac{a}{2})}$.
   Puisque $a \in]-\pi, \pi[$, $\frac{a}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\pi + \frac{a}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, donc $u_1 \in \mathcal{O}^+$ alors que $u_2 \in \mathcal{O}^-$.
   Ainsi il existe un unique complexe dans $\mathcal{O}^+$ dont le carré vaut z.

2. (a) Soit $z \in \mathcal{O}^+$. Alors $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x > 0$, puis :

$$|g(z)|^2 = \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} < 1$$

   puisque $0 \leq (x-1)^2 + y^2 < x^2 + 1 + y^2 < (x+1)^2 + y^2$. Ainsi $g(\mathcal{O}^+) \subset \mathcal{D}$.

   (b) Pour $z' = x' + iy' \in \mathcal{D}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, on a :

$$g(z) = z' \Leftrightarrow z - 1 = z'(z+1) \Leftrightarrow z = \frac{1+z'}{1-z'}.$$

   De plus $Re(z) = Re\Big(\frac{(1 + x' + iy')(1 - x' + iy')}{(1-x')^2 + y'^2}\Big) = \frac{1 - |z'|^2}{(1-x')^2 + y'^2} > 0$ car $|z'| < 1$.
   Ainsi tout élément de $\mathcal{D}$ a un unique antécédent par g dans $\mathcal{O}^+$, donc :

   g réalise une bijection de $\mathcal{O}^+$ sur $\mathcal{D}$, notée $\tilde{g}$.

$$\tilde{g}^{-1} : \mathcal{D} \to \mathcal{O}^+, \ \ z \mapsto \frac{1+z}{1-z}.$$

3. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On a : ${}^t({}^tMM) = {}^tM\ {}^t{}^tM = {}^tMM$.
   De plus, si λ est une valeur propre de ${}^tMM$, alors il existe un vecteur X non nul tel que ${}^tMMX = \lambda X$. Puis :

$$\lambda \|X\|^2 = \langle \lambda X, X\rangle = \langle {}^tMMX, X\rangle = \langle MX, MX\rangle = \|MX\|^2 \geq 0$$

   donc $\lambda \geq 0$.
   Ainsi ${}^tMM$ est une matrice symétrique positive.
   Si de plus M est inversible, alors ${}^tMM$ l'est aussi comme produit de matrices inversibles, donc 0 n'est pas valeur propre de ${}^tMM$.
   Si M est inversible, ${}^tMM$ est une matrice symétrique définie positive.

   (b) Définissons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application : $\Psi(M, P) = Tr({}^tMP)$.
   . Ψ est bilinéaire grâce à la linéarité de la trace.
   . Ψ est symétrique car : $\Psi(P, M) = Tr({}^t({}^tMP)) = \Psi(M, P)$ puisque $Tr({}^tA) = Tr(A)$.
   . Ψ est positive car : $\Psi(M, M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2) \geq 0$.
   . Ψ est définie car : $\Psi(M, M) = 0 \Leftrightarrow \forall (i, k) \in [\![1, n]\!]^2, m_{k,i} = 0 \Leftrightarrow M = 0$.
   Ainsi Ψ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera :

$$\langle M, P\rangle = \Psi(M, P) = Tr({}^tMP).$$

   Puisque $N(M) = \langle M, M\rangle$,

   l'application N est le carré de la norme euclidienne associée à $\langle ., .\rangle$.

4. Définissons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application : $\phi(M, P) = Tr(M^*P)$.
 . ϕ est sesquilinéaire car :
 . ϕ est linéaire par rapport à la seconde variable :

$$\phi(M, \alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha\phi(M, P_1) + \beta\phi(M, P_2).$$

 . ϕ est semi-linéaire par rapport à la première variable :

$$\phi(\alpha M_1 + \beta M_2, P) = \overline{\alpha}\phi(M_1, P) + \overline{\beta}\phi(M_2, P).$$

 . ϕ est hermitienne car :

$$\phi(P, M) = Tr({}^t\overline{P}M) = Tr(\overline{{}^tP\overline{M}}) = \overline{Tr({}^tP\overline{M})} = \overline{Tr({}^t\overline{M}P)} = \overline{\phi(M, P)}.$$

 . ϕ est positive car : $\phi(M, M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}|m_{k,i}|^2) \geq 0$.
 . ϕ est définie car : $\phi(M, M) = 0 \Leftrightarrow \forall (i, k) \in [\![1, n]\!]^2, m_{k,i} = 0 \Leftrightarrow M = 0$.
 Ainsi ϕ est bien un produit hermitien sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

l'application $N' : M \mapsto Tr(M^*M)$ est le carré de la norme associée à ϕ.

Remarque : une petite erreur d'énoncé à signaler ici, il manquait 'le carré'.

Partie I.

5. Soit L dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $L^2 = I_n$.
 Remarque : par convention : on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$; si A est une matrice alors $Ker(A)$ désigne le noyau de l'application linéaire $x \mapsto Ax$; enfin on notera $diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
 (a) Le polynôme $Q = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de la matrice L.
 De plus ce polynôme Q est scindé et à racines simples sur $\mathbb{K}$ (rappelons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), donc L est diagonalisable et $Sp(L) \subset \{-1, 1\}$.
 Il existe donc deux sous-espaces vectoriels $F = Ker(L - I_n)$ et $G = Ker(L + I_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tels que $\mathbb{K}^n = F \oplus G$.
 Puisque $F = Ker(L - I_n)$, on a : $\forall x \in F, Lx = x$.
 Et $G = Ker(L + I_n)$ donc : $\forall x \in G, Lx = -x$.
 Remarque : F (ou G) peut être réduit à $\{0\}$.
 (b) Supposons F et G tous deux non réduits à $\{0\}$. D'après l'écriture $\mathbb{K}^n = F \oplus G$, on peut trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de G.
 La matrice de l'application linéaire canoniquement associée à L dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $D = diag(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$, où le nombre 1 apparaît r fois et -1 apparait $(n - r)$ fois.
 Ainsi $Tr(L) = r - (n - r) = dim(F) - dim(G)$.

 . Si $F = \{0\}$, alors $\mathbb{K}^n = G$ et $L = -I_n$, donc $Tr(L) = -n = dim(F) - dim(G)$.
 . Enfin, si $G = \{0\}$, alors $\mathbb{K}^n = F$ et $L = I_n$ puis $Tr(L) = n = dim(F) - dim(G)$.
 On a bien, dans tous les cas :

$$Tr(L) = dim(F) - dim(G) = 2r - n \quad \text{où } r = dim(F).$$

6. (a) . $\sim$ est réflexive car : $\forall L \in \mathcal{I}_n, L = I_n^{-1} L I_n$ donc $L \sim L$.

   . $\sim$ est symétrique car : $\forall (L, M) \in \mathcal{I}_n^2$, si $L \sim M$ alors il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = P^{-1}LP$, donc $L = PMP^{-1} = Q^{-1}MQ$ avec $Q = P^{-1}$ qui est dans $GL_n(\mathbb{K})$, et ainsi $M \sim L$.

   . $\sim$ est transitive. En effet, soient L, M, N dans $\mathcal{I}_n$ telle que $L \sim M$ et $M \sim N$. Alors il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $M = P^{-1}LP$ et $N = Q^{-1}MQ$. D'où $N = (PQ)^{-1}L(PQ)$. Puisque $PQ \in GL_n(\mathbb{K})$, $L \sim N$.

   En conclusion : $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{I}_n$.

   (b) Soient L et M dans $\mathcal{I}_n$.

   - Si $L \sim M$, alors il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = P^{-1}LP$. Puis $Tr(M) = Tr(P^{-1}(LP)) = Tr((LP)P^{-1}) = Tr(L)$.

   - Si $Tr(L) = Tr(M)$, alors d'après la question ($5a$) on peut en déduire que $Ker(L - I_n)$ et $Ker(M - I_n)$ ont la même dimension, de même que $Ker(L + I_n)$ et $Ker(M + I_n)$. Ainsi L et M sont semblables à la même matrice diagonale $D = diag(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$, donc L et M sont semblables (par transitivité de la relation $\sim$).

   Au final :

$$\forall (L, M) \in \mathcal{I}_n^2, \quad L \sim M \Leftrightarrow Tr(L) = Tr(M).$$

   (c) Pour $r \in [\![0, n]\!]$ on note D_r la matrice diagonale dont la diagonale contient r fois le nombre 1 puis $(n - r)$ fois le nombre -1.

   D'après ($5a$) et ($6b$), toute matrice L de $\mathcal{I}_n$ est semblable à une, et une seule, matrice D_r , où r désigne $dim(Ker(L - I_n))$.

   Ainsi la relation $\sim$ a exactement $(n + 1)$ classes d'équivalences sur $\mathcal{I}_n$.

   On peut noter : $\mathcal{I}_n / \sim = \{\overline{D_0}, \overline{D_1}, \dots, \overline{D_n}\}$

   avec $\overline{D_r} = \{M \in \mathcal{I}_n, M \sim D_r\} = \{M \in \mathcal{I}_n, Tr(M) = 2r - n\}$.

Fin de la partie I.

Partie II.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Sp(A) = \{\alpha\} \subset \mathcal{D}$. Soit $B = A - \alpha I_n$.

   (a) La seule valeur propre de B est 0, car pour X non nul :

$$BX = \lambda X \Rightarrow AX = (\lambda + \alpha)X \Rightarrow \lambda + \alpha \in Sp(A) \Rightarrow \lambda + \alpha = \alpha \Rightarrow \lambda = 0.$$

   On sait que le polynôme caractéristique de B est scindé puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et a pour racines les valeurs propres de B. Donc ici : $\chi_B(X) = X^n$.

   Le théorème de Cayley-Hamilton permet d'affirmer que $\chi_B(B) = 0$, donc : $B^n = 0$.

   (b) Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Puisque B et I_n commutent on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (\alpha)^{l-k} B^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{l}{k} (\alpha)^{l-k} B^k$$

   si on pose par convention $\binom{l}{k} = 0$ si $k > l$.

   (c) Pour k fixé dans $[\![0, n - 1]\!]$, le terme $\begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (\alpha)^{l-k}$ équivaut, lorsque l tend vers $+\infty$, à $l^k \alpha^l \times \dfrac{1}{k! \alpha^k}$, qui tend vers 0 par croissances comparées lorsque l tend vers $+\infty$, puisque $|\alpha| < 1$.

   Ainsi la suite matricielle (A^l) converge vers la matrice nulle.

8. Ici $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $Sp(A) \subset \mathcal{D}$.
Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A admet un polynôme annulateur (par exemple son polynôme caractéristique) scindé, de la forme $Q(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \alpha_i)^{n_i}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont les s valeurs propres distinctes de A.
D'après le lemme de décomposition des noyaux, que l'on peut appliquer puisque les polynômes $(X - \alpha_1)^{n_1}, \ldots, (X - \alpha_s)^{n_s}$ sont premiers entre eux deux à deux, on a :
$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_s \quad \text{avec } E_i = Ker((A - \alpha_i I_n)^{n_i}).$$
Chaque sous-espace caractéristique E_i est stable par A, donc sur une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A, notée B, est diagonale par blocs et de la forme $B = diag(B_1, \ldots, B_s)$ où chaque B_i est une matrice carrée.
On a alors, pour tout entier l : $B^l = diag(B_1^l, \ldots, B_s^l)$.
Pour chaque i fixé, B_i est une matrice vérifiant les hypothèses de la question (7) : B_i n'a qu'une seule valeur propre, puisque $\chi_{B_i}(X) = (X - \alpha_i)^{n_i}$, et cette valeur propre α_i est dans $\mathcal{D}$.
D'après ($7c$) on peut donc affirmer que pour chaque i fixé, la suite $(B_i^l)_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n_i,n_i}(\mathbb{C})$.
Et ainsi la suite de matrices (B^l) converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers la matrice nulle.
Enfin, puisqu'il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$, $A^l = PB^lP^{-1}$ donc :

la suite de matrices (A^l) converge elle aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers la matrice nulle.

Fin de la partie II.

Partie III.

9. Si $\alpha = i$ alors $\mathbf{u}^\alpha$ n'est pas bien définie puisque $u_1 = 0$, ce qui entraîne que u_2 n'est pas défini.
10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$ que u_l est bien définie et appartient à $\mathbb{R}^*$.
. Pour $l = 0$, $u_0 = \alpha$ est dans $\mathbb{R}^*$.
. Pour l fixé dans $\mathbb{N}$, supposons que u_l est bien défini et est dans $\mathbb{R}^*$. Alors $\frac{1}{u_l}$ est bien défini, donc u_{l+1} est bien défini, puis $u_{l+1} = \frac{u_l^2 + 1}{2u_l} \in \mathbb{R}^*$ car l'équation $t^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.
. Le principe de récurrence permet de conclure que la suite $\mathbf{u}^\alpha$ est bien définie et que tous ses termes sont dans $\mathbb{R}^*$.
Remarque : on s'autorisera à rédiger plus brièvement les prochaines récurrences.
Notons $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$. L'étude de la fonction h donne les résultats suivants :
h est décroissante sur $]0, 1[$, avec $h(]0, 1[) =]1, +\infty[$.
La fonction h est croissante sur $[1, +\infty[$ et laisse stable cet intervalle.
Sur $]0, +\infty[$, l'équation $h(t) = t$ n'a qu'une solution qui est $t = 1$, $\mathcal{C}_h$ étant au-dessus de la première bissectrice Δ sur $]0, 1[$, puis en-dessous de Δ sur $]1, +\infty[$.
Grace à ces résultats (*qui peuvent être illustrés sur la copie par un dessin*), on obtient que :
- Si $\alpha \geq 1$, alors : pour tout entier l, $u_l \geq 1$; $u_{l+1} - u_l = h(u_l) - u_l \leq 0$; donc (u_l) est décroissante et minorée par 1, donc (u_l) converge. Puisque h est continue sur $[1, +\infty[$, la limite de (u_l) est un point fixe de h, et 1 est le seul point fixe de h sur $[1, +\infty[$, donc (u_l) converge vers 1.

- Si $\alpha \in]0,1[$, alors $u_1 \in]1,+\infty[$, donc d'après le cas précédent (u_l) est décroissante à partir du rang 1 et converge vers 1.
Remarquons enfin que h est impaire, donc par symétrie : si $\alpha < 0$, alors (u_l) est croissante (à partir du rang 0 si $\alpha \leq -1$, du rang 1 si $\alpha \in]-1,0[$) et converge vers -1.
On retiendra que :

$$s^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > 0 \\ -1 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

11. (a) Soit $z = x + iy$ dans $\mathcal{O}^+$. $Re\big(f(z)\big) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}) > 0$ car $x > 0$. Donc $f(z) \in \mathcal{O}^+$.
Si $z \in \mathcal{O}^-$, $-z \in \mathcal{O}^+$ donc $f(-z) \in \mathcal{O}^+$; or $f(-z) = -f(z)$, donc $f(z) \in \mathcal{O}^-$.
En conclusion :

$$\mathcal{O}^+ \text{ et } \mathcal{O}^- \text{ sont stables par } f.$$

Si α n'est pas un imaginaire pur, alors il est dans $\mathcal{O}^+$ ou dans $\mathcal{O}^-$. Ces ensembles restants stables par f et f y étant bien définie (f est définie sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$), la suite $\mathbf{u}^\alpha$ est bien définie.

(b) Si w_l est bien définie et différent de 0 :

$$\begin{aligned} f(w_l) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1+\beta^{2^l}}{1-\beta^{2^l}} + \frac{1-\beta^{2^l}}{1+\beta^{2^l}}\Big) \\ &= \frac{(1+\beta^{2^l})^2 + (1-\beta^{2^l})^2}{2(1-\beta^{2^{l+1}})} \\ &= \frac{1+\beta^{2^{l+1}}}{1-\beta^{2^{l+1}}} = w_{l+1}. \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que la suite (w_l) est correctement définie.
$\beta \neq 1$ donc w_0 est bien définie et, en notant $\beta = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Re(w_0) = Re\Big(\frac{1+\beta}{1-\beta}\Big) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} \neq 0$$

car $|\beta|^2 = x^2 + y^2 \neq 1$. Donc w_0 n'est pas un imaginaire pur. Ainsi la suite (w_l) est bien définie grâce à $(11-a)$.
Si $|\beta| < 1$, $\lim\limits_{l\to+\infty} \beta^{2^l} = 0$ puis (w_l) converge vers 1.
Si $|\beta| > 1$, $\lim\limits_{l\to+\infty} \dfrac{1+\beta^{2^l}}{1-\beta 2^l} = \lim\limits_{l\to+\infty} \dfrac{\beta^{2^l}}{\beta 2^l} = -1.$
En résumé :

$$(w_l) \text{ converge vers 1 si } |\beta| < 1, \text{ vers } -1 \text{ si } |\beta| > 1.$$

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}\}$.
On suppose dans un premier temps $\alpha \in \mathcal{O}^+$.
D'après $(2b)$ du préliminaire, la fonction $\tilde{g}^{-1} : z \mapsto \dfrac{1+z}{1-z}$ est une bijection de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{O}^+$.
Donc il existe un unique $\beta \in \mathcal{D}$ tel que $\alpha = \frac{1+\beta}{1-\beta}$. La suite $\mathbf{u}^\alpha$ est alors la suite (w_l) étudiée à la question précédente, elle converge donc vers 1 (car ici $|\beta| < 1$).
Maintenant, si $\alpha \in \mathcal{O}^-$, des calculs analogues à ceux de $(2b)$ prouvent qu'il existe un unique β de module strictement supérieur à 1 tel que $\alpha = \frac{1+\beta}{1-\beta}$. La suite $\mathbf{u}^\alpha$ est alors la suite (w_l) étudiée à la question précédente, elle converge dans ce cas vers -1.
En résumé :

$$\text{Si } \alpha \in \mathcal{O}^+, \mathbf{u}^\alpha \text{ converge vers } s^\alpha = 1.$$

$$\text{Si } \alpha \in \mathcal{O}^-, \mathbf{u}^\alpha \text{ converge vers } s^\alpha = -1.$$

Fin de la partie III.

Partie IV.

12. *Remarque :* jusqu'à la fin du problème, à chaque fois qu'une matrice vérifiera (P), ou $(P+)$, ou $(P-)$, on utilisera le fait qu'elle est inversible puisque son spectre ne contiendra pas 0, donc certains résultats de cette partie IV lui seront applicables.

    (a) Puisque A est diagonalisable et $Sp(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$, avec $D = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, où les α_i sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A.

    Pour i fixé dans $[\![1, n]\!]$, α_i n'est pas un imaginaire pur. Ainsi la suite $\mathbf{u}^{\alpha_i}$ est bien définie : on notera $\alpha_l^{(i)}$ son l-ème terme.

    On va prouver par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$ la propriété

    $$\mathcal{P}(l) : \text{' } U_l \text{ est bien définie et } U_l = Pdiag(\alpha_l^{(1)}, \dots, \alpha_l^{(n)})P^{-1}.$$

    . $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $U_0 = A = Pdiag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)P^{-1} = Pdiag(\alpha_0^{(1)}, \dots, \alpha_0^{(n)})P^{-1}$.

    . Pour l fixé dans $\mathbb{N}$ on suppose $\mathcal{P}(l)$ vraie. Alors U_l est inversible car aucun $\alpha_l^{(i)}$ n'est nul, donc U_{l+1} est bien définie. De plus :

    $$\begin{aligned} U_{l+1} &= \frac{1}{2}P\big(diag(\alpha_l^{(1)}, \dots, \alpha_l^{(n)}) + diag(\frac{1}{\alpha_l^{(1)}}, \dots, \frac{1}{\alpha_l^{(n)}})\big)P^{-1} \\ &= Pdiag(\frac{1}{2}(\alpha_l^{(1)} + \frac{1}{\alpha_l^{(1)}}), \dots, \frac{1}{2}(\alpha_l^{(n)} + \frac{1}{\alpha_l^{(n)}}))P^{-1} \\ &= Pdiag(\alpha_{l+1}^{(1)}, \dots, \alpha_{l+1}^{(n)})P^{-1}. \end{aligned}$$

    Donc $\mathcal{P}(l+1)$ est vraie.

    . En conclusion, la suite récurrente $\mathbf{U}^A$ est bien définie.

    (b) On a obtenu que : $U_l = Pdiag(\alpha_l^{(1)}, \dots, \alpha_l^{(n)})P^{-1}$ (on note bien que la matrice P est fixée dès le départ donc indépendante de l).

    D'après la partie III, les suites $(\alpha_l^{(i)})_l$ convergent, soit vers 1 soit vers -1, selon le signe de la partie réelle de α_i. Ainsi

    $$\text{la suite récurrente } \mathbf{U}^A \text{ converge vers } L^A = Pdiag(s^{\alpha_1}, \dots, s^{\alpha_n})P^{-1}$$

    avec, on le rappelle, $s^{\alpha_i} = +1$ si $Re(\alpha_i) > 0$ et $s^{\alpha_i} = -1$ si $Re(\alpha_i) < 0$. Vu son écriture, L^A est bien une matrice diagonalisable et :

    $$(L^A)^2 = Pdiag(s^{\alpha_1 2}, \dots, s^{\alpha_n 2})P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n.$$

    (c) Posons $\delta_l = \frac{1}{2}\big(Tr(U_l) + Tr(U_l^{-1})\big)$.

    Par linéarité de la trace on a : $\delta_l = Tr(U_{l+1})$.

    Puisque l'application $M \mapsto Tr(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (toute forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est continue), la suite (δ_l) converge vers $Tr(L^A)$.

    On a : $Tr(L^A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s^{\alpha_i}$ = Nombre de valeurs propres dans $\mathcal{O}^+$ − nombre de valeurs propres dans $\mathcal{O}^-$.

13. (a) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Donc il existe P inversible et T triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $A = PTP^{-1}$. On notera $\beta_1, \dots, \beta_n$ les éléments diagonaux de T, qui sont les valeurs propres de A.

    Ainsi : $\frac{1}{2}(A + A^{-1}) = P\big(\frac{1}{2}(T + T^{-1})\big)P^{-1}$.

La matrice $\frac{1}{2}(T+T^{-1})$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont de la forme $d=\frac{1}{2}(\beta+\beta^{-1})$, avec $\beta\in Sp(A)$.

On note $\beta=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $x>0$ car $Sp(A)\subset\mathcal{O}^+$.

Le calcul donne : $Re(d)=\dfrac{x(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}>0$, donc $d\in\mathcal{O}^+$.

Ainsi les valeurs propres de la matrice $\frac{1}{2}(A+A^{-1})$ sont toutes dans $\mathcal{O}^+$, donc cette matrice vérifie bien $(P+)$.

Une récurrence rapide sur $l\in\mathbb{N}$ prouve alors que pour tout entier l, U_l est bien définie, est inversible, et vérifie $(P+)$.

(b) En reprenant les notations de la question précédente : $(A-I_n)(A+I_n)^{-1}=PSP^{-1}$ avec :

$$\begin{aligned}
S &= (T-I_n)(T+I_n)^{-1}=\begin{pmatrix}\beta_1-1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & \beta_n-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta_1+1} & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & \frac{1}{\beta_n+1}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}g(\beta_1) & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & g(\beta_n)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } Sp((A-I_n)(A+I_n)^{-1})\subset g(Sp(A)).$$

(c) En développant, on remarque que :

$$(I_n+U_l)(I_n-U_l^{-1})=I_n+U_l-U_l^{-1}-I_n=(U_l-I_n)(I_n+U_l^{-1}).$$

Ainsi : $(I_n-U_l^{-1})(I_n+U_l^{-1})^{-1}=(I_n+U_l)^{-1}(U_l-I_n)$ (notons cette égalité $(\diamond)$). On calcule maintenant :

$$\begin{aligned}
(U_{l+1}-I_n)(U_{l+1}+I_n)^{-1} &= \left(\frac{1}{2}(U_l+U_l^{-1})-I_n\right)\left(\frac{1}{2}(U_l+U_l^{-1})+I_n\right)^{-1} \\
&= (U_l+U_l^{-1}-2I_n)(U_l+U_l^{-1}+2I_n)^{-1}.
\end{aligned}$$

Or $U_l+U_l^{-1}-2I_n=(U_l-I_n)(I_n-U_l^{-1})$ et $U_l+U_l^{-1}+2I_n=(U_l+I_n)(I_n+U_l^{-1})$, d'où :

$$\begin{aligned}
(U_{l+1}-I_n)(U_{l+1}+I_n)^{-1} &= (U_l-I_n)(I_n-U_l^{-1})(I_n+U_l^{-1})^{-1}(U_l+I_n)^{-1} \\
&= (U_l-I_n)(I_n+U_l)^{-1}(U_l-I_n)(U_l+I_n)^{-1} \quad (\text{avec } (\diamond)) \\
&= \left((U_l-I_n)(U_l+I_n)^{-1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate utilisant cette relation donne :

$$(U_{l+1}-I_n)(U_{l+1}+I_n)^{-1}=\left((A-I_n)(A+I_n)^{-1}\right)^{2^{l+1}}.$$

Remarque : Les matrices A et U_l ont leur spectre inclus dans $\mathcal{O}^+$, ce qui justifie l'existence des inverses dans nos calculs.

(d) D'après ce dernier résultat et la question 8 de la partie II, il suffit de démontrer que le spectre de la matrice $(A-I_n)(A+I_n)^{-1}$ est inclus dans $\mathcal{D}$.

Or d'après $(13-b)$, ce spectre est contenu dans $g(Sp(A))$ qui est lui-même inclus dans $g(\mathcal{O}^+)$. Enfin, d'après $(2a)$ du préliminaire, $g(\mathcal{O}^+)\subset\mathcal{D}$.

On peut bien conclure que la suite $(U_l-I_n)(U_l+I_n)^{-1}$ converge vers la matrice nulle.

(e) Notons $C_l = (U_l - I_n)(U_l + I_n)^{-1}$. On vient de prouver que la suite matricielle (C_l) converge vers la matrice nulle.
D'une part $C_l(U_l + I_n) = C_l U_l + C_l$; d'autre part $C_l(U_l + I_n) = U_l - I_n$.
Donc $U_l - I_n = C_l U_l + C_l$, puis $(I_n - C_l)U_l = I_n + C_l$ et enfin :

$$U_l = (I_n - C_l)^{-1}(I_n + C_l).$$

En effet $(I_n - C_l)$ est inversible car si elle ne l'était pas, il existerait X non nul tel que $C_l X = X$, puis en posant $Y = (U + I_n)^{-1}X$ on aurait $(U - I_n)Y = (U + I_n)Y$ d'où $Y = 0$, ce qui est absurde car $X \neq 0$ et $(U + I_n)^{-1}$ est inversible.
Puisque (C_l) converge vers O_n, et que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue,

$$\text{la suite } (U_l) \text{ converge vers } L^A = I_n.$$

14. Ici $Sp(A) \subset \mathcal{O}^-$. On pose $B = -A$. Alors B satisfait $(P+)$ car $Sp(B) = \{-\lambda, \lambda \in Sp(A)\}$, donc d'après $(13-e)$ la suite $\mathbf{U}^B$ converge et sa limite est I_n. Or une récurrence rapide montre que pour tout entier l, le l-ème terme de cette suite $\mathbf{U}^B$ est l'opposé du l-ème terme de la suite $\mathbf{U}^A$, donc

$$\text{la suite } \mathbf{U}^A \text{ converge vers } -I_n.$$

15. (a) Le polynôme caractéristique (ou n'importe quel autre polynôme annulateur) de A est scindé sur $\mathbb{C}$ et peut s'écrire :

$$\chi_A = P_1 P_2 \text{ avec } P_1(X) = \prod_{\alpha \in Sp(A) \cap \mathcal{O}^+} (X - \alpha)^{n_\alpha} \text{ et } P_2(X) = \prod_{\alpha \in Sp(A) \cap \mathcal{O}^-} (X - \alpha)^{n_\alpha},$$

aucun de ces produits n'étant vide car A ne vérifie ni $(P+)$ ni $(P-)$.
Les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux donc, d'après le lemme de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \text{ avec } E_i = Ker(P_i(A)).$$

Comme dit plus haut on s'autorise la notation $Ker(B)$, lorsque B est une matrice, qui désigne le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à B.
Puisque A commute avec $P_1(A)$ et $P_2(A)$, les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont stables par A. Ainsi, en prenant une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ composée de $(e_1, \dots, e_r)$ qui est une base de E_1 et de $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ qui est une base de E_2, en notant P la matrice de passage de cette base vers la base canonique, on a bien :

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} P$$

avec $(C, D) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, $Sp(C) = Sp(A_{|E_1}) \subset \mathcal{O}^+$ et $Sp(D) = Sp(A_{|E_2}) \subset \mathcal{O}^-$.

(b) En notant (W_l) la suite $\mathbf{U}^C$ et (V_l) la suite $\mathbf{U}^D$, les produits matriciels par blocs et une récurrence rapide donnent :

$$\forall l \in \mathbb{N},\ \ U_l = P^{-1} \begin{pmatrix} W_l & 0 \\ 0 & V_l \end{pmatrix} P.$$

D'après les conclusions des questions 13 et 14, la suite (W_l) converge vers I_r et la suite (V_l) converge vers $-I_{n-r}$, donc :

$$(U_l) \text{ converge vers } L^A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix} P.$$

$$Sp(L^A) = \{-1, 1\}.$$

Fin de la partie IV.

Partie V.

16. Le polynôme caractéristique de B est donné par :

$$\chi_B(X) = det(XI_{2n} - B).$$

On calcule ce déterminant en effectuant, pour chaque ligne numérotée de 1 à n, $L_i \leftarrow L_i + XL_{i+n}$. On obtient alors :

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} O_n & X^2 I_n - A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix}.$$

On développe ensuite selon la première colonne, puis la deuxième, ..., ainsi de suite jusqu'à la n-ème colonne. On obtient alors :

$$\chi_B(X) = det(X^2 I_n - A) = \chi_A(X^2).$$

Ainsi : $\lambda \in Sp(B) \Leftrightarrow \lambda^2 \in Sp(A)$.

On sait que si α est une valeur propre de A, alors $\alpha \notin \mathbb{R}^-$ donc α a deux racines complexes, opposés l'une de l'autre, l'une notée $\sqrt{\alpha}$ étant dans $\mathcal{O}^+$ et l'autre, qui est $-\sqrt{\alpha}$, dans $\mathcal{O}^-$.

Par conséquent :

$$Sp(B) = \{\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha}, \alpha \in Sp(A)\}.$$

De plus l'égalité $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$ prouve que la multiplicité de $\sqrt{\alpha}$ pour B est la même que celle de α pour A.

17. Aucune valeur propre de A n'est dans $\mathbb{R}^-$, et les valeurs propres de A sont les carrés des valeurs propres de B, donc aucune valeur propre de B n'est dans $i\mathbb{R}$. Ainsi

$$B \text{ vérifie la propriété } (P).$$

On peut donc appliquer les conclusions des questions $13, 14, 15$:

$$\text{La suite } \mathbf{U}^B \text{ converge.}$$

18. On raisonne par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$.

. Pour $l = 0$, $U_0 = B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ donc la propriété est vraie pour $l = 0$ avec $Y_0 = I_n = P_0(A)$ (donc $P_0(X) = 1$).

. Fixons $l \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang l.

Alors $U_l = \begin{pmatrix} 0 & AY_l \\ Y_l & 0 \end{pmatrix}$ avec $Y_l \in \mathbb{C}[A]$.

Puisque U_l est inversible, Y_l l'est aussi car elle est de rang n, et :

$$U_l^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & Y_l^{-1} \\ Y_l^{-1}A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite :

$$U_{l+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(AY_l + Y_l^{-1}) \\ \frac{1}{2}(Y_l + Y_l^{-1}A^{-1}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour continuer on doit prouver que $Y_l^{-1} \in \mathbb{C}[A]$ et $A^{-1} \in \mathbb{C}[A]$.

Ceci se résume à démontrer que si Y est un polynôme en A, si Y est inversible, alors Y^{-1} est aussi un polynôme en A.

Supposons donc que $Y = P(A)$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$, et que Y est inversible.

Le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$ et s'écrit $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{r_i}$. Puisque $P(A)$ est inversible, aucune racine λ_i n'est dans le spectre de A, car sinon $P(A)$ serait le produit de plusieurs

matrices dont une, $(A-\lambda_i I_n)$, ne serait pas inversible, et ainsi $P(A)$ ne serait pas inversible. Ainsi le polynôme P est premier avec le polynôme caractéristique de A, ces deux polynômes n'ayant aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.
Le théorème de Bézout dit alors qu'il existe deux polynômes U et V tels que : $UP + V\chi_A = 1$.
En appliquant ceci en A, en rappelant que $\chi_A(A) = 0$ grâce au théorème de Cayley-Hamilton, $U(A)Y = I_n$. Ainsi $Y^{-1} = U(A) \in \mathbb{C}[A]$.
On en déduit que Y_l^{-1} et A^{-1} sont des polynômes en A. On pose :

$$Y_{l+1} = \frac{1}{2}(Y_l + Y_l^{-1}A^{-1}).$$

La matrice Y_{l+1} est aussi un polynôme en A car $\mathbb{C}[A]$ est un anneau.
Enfin, $\frac{1}{2}(AY_l + Y_l^{-1}) = AY_{l+1}$ car A et Y_l^{-1} commutent puisque $\mathbb{C}[A]$ est un anneau commutatif.
On a bien prouvé que la propriété demandée par l'énoncé est vraie au rang $l+1$.
. On conclut grâce au principe de récurrence que :

$$\forall l \in \mathbb{N},\ \ \exists Y_l \in \mathbb{C}[A],\ \ U_l = \begin{pmatrix} 0 & AY_l \\ Y_l & 0 \end{pmatrix}.$$

19. D'après (17) et (18), la suite (U_l) converge vers L^B qui sera de la forme : $L^B = \begin{pmatrix} 0 & C \\ L & 0 \end{pmatrix}$.
    Puisque $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{C}[A]$ est fermé donc $L \in \mathbb{C}[A]$ en tant que limite de la suite (Y_l) de $\mathbb{C}[A]$.
    Ensuite $C = \lim\limits_{l\to+\infty} AY_l = AL$.
    Enfin, puisque $L \in \mathbb{C}[A], AL = LA$.
20. Pour tout entier l, $2U_{l+1}U_l = U_l^2 + I_{2n}$, donc en passant à la limite : $2(L^B)^2 = (L^B)^2 + I_{2n}$ puis $(L^B)^2 = I_{2n}$.
    Or $(L^B)^2 = \begin{pmatrix} AL^2 & 0 \\ 0 & LAL \end{pmatrix}$, donc : $AL^2 = I_n$.
    Ainsi L^2 est une matrice inversible, donc L aussi, et en posant $R = L^{-1}$ on a : $R^2 = A$.
    Si λ est une valeur propre de R alors $\lambda^2 \in Sp(R^2) = Sp(A)$, donc $\lambda^2 \notin \mathbb{R}^-$, donc $\lambda \notin i\mathbb{R}$. Ainsi $Sp(R) \subset \mathcal{O}^+ \cup \mathcal{O}^-$ et d'après la question 1, il existe une unique matrice R ayant toutes ses valeurs propres dans $\mathcal{O}^+$ telle que $R^2 = A$.
21. - Soit A une matrice réelle symétrique définie positive.
    Il existe $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$, $D = diag(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ diagonale à coefficients strictement positifs telles que : $A = PD\ {}^tP$.
    On pose $S = Pdiag(\sqrt{\gamma_1}, \ldots, \sqrt{\gamma_n})\ {}^tP$.
    S est une matrice réelle symétrique, définie positive et $S^2 = A$.
    De plus $Sp(S) \subset \mathcal{O}^+$ donc S est bien l'unique matrice notée $\sqrt{A}$ définie dans la question (20).

    - Si A est hermitienne définie positive, la même démonstration fonctionne sauf qu'on écrit $A = PDP^*$ avec $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, D étant toujours diagonale avec des coefficients diagonaux réels strictement positifs.

Fin de la partie V.

Partie VI.

22. L'application $M \mapsto {}^tMM$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$, en tant qu'image réciproque du fermé $\{I_n\}$, est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tout M dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$, $N(M)^2 = Tr({}^tMM) = Tr(I_n) = n$ donc $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que

$$\mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \text{ est un compact de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

23. L'application $P \mapsto N(M-P)$ est continue (car lipschitzienne) sur le compact $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ donc atteint son minimum :

$$\text{Il existe bien } P_0 \text{ dans } \mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que : } \forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M-P_0) \leq N(M-P).$$

24. Soit P_0 dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$. Soit P dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
N(M+P) \leq N(M+P_0) &\Leftrightarrow Tr(({}^tM + {}^tP)(M+P)) \leq Tr(({}^tM + {}^tP_0)(M+P_0)) \\
&\Leftrightarrow Tr({}^tMM) + 2Tr({}^tPM) + n \leq Tr({}^tMM) + 2Tr({}^tP_0M) + n \\
&\Leftrightarrow Tr({}^tPM) \leq Tr({}^tP_0M).
\end{aligned}$$

Cette équivalence prouve directement l'équivalence entre les propositions (b) et (c).
- Supposons (a). Soit P dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
N(M-P_0) \leq N(M-P) &\Rightarrow (N(M-P_0))^2 \leq (N(M-P))^2 \\
&\Rightarrow Tr\big(({}^tM - {}^tP_0)(M-P_0)\big) \leq Tr\big(({}^tM - {}^tP)(M-P)\big) \\
&\Rightarrow Tr\big(- {}^tMP_0 - {}^tP_0M\big) \leq Tr\big(- {}^tMP - {}^tPM\big) \\
&\Rightarrow 2Tr\big(- {}^tP_0M\big) \leq 2Tr\big(- {}^tPM\big) \quad \text{car } Tr({}^tB) = Tr(B) \\
&\Rightarrow Tr\big({}^tP_0M\big) \geq Tr\big({}^tPM\big)
\end{aligned}$$

donc $(a) \Rightarrow (b)$.
- Supposons (b) (et donc (c)). Soit P dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
N(M-P_0)^2 &= Tr({}^tMM) - 2Tr({}^tP_0M) + n \\
&\leq Tr({}^tMM) - 2Tr({}^tPM) + n \\
&\leq N(M-P)^2.
\end{aligned}$$

donc $(b) \Rightarrow (a)$.
Finalement $(a), (b), (c)$ sont trois assertions équivalentes.

25. Soit M symétrique définie positive.
Soit $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$. On considère une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres associés à M. On a, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $Mv_i = \alpha_i v_i$ avec $\alpha_i > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
Tr({}^tPM) &= \sum_{i=1}^{n} \langle {}^tPMv_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Mv_i, Pv_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, Pv_i \rangle \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|v_i\| \times \|Pv_i\| \quad \text{(inégalité de Cauchy-Scwarz)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad (\text{car } \|v_i\| = \|Pv_i\| = 1) \leq Tr(M).
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $P_0 = I_n$, on a bien : $\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), Tr({}^tPM) \leq Tr({}^tP_0M)$.

Donc $P_0 = I_n$ est une matrice de $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M - P_0) \leq N(M - P)$.
Il reste à prouver que c'est la seule. Si P_1 est une matrice de $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ vérifiant aussi cette condition, alors $Tr({}^tP_1M) = Tr(M)$, donc les inégalités qui précèdent, en particulier celle de Cauchy-Schwarz, sont en fait des égalités. Ceci entraîne que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, P_1v_i et v_i sont colinéaires, et plus précisément que $\langle v_i, P_1v_i\rangle = +1$. Donc $P_1v_i = v_i$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$, donc P_1 est la matrice I_n.
En conclusion :
$P_0 = I_n$ est l'unique matrice de $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M - P_0) \leq N(M - P)$.

26. (a) La non-symétrie de M entraîne l'existence de deux entiers $i_0 \neq j_0$ tels que $m_{i_0,j_0} - m_{j_0,i_0} > 0$. On s'intéresse alors à la matrice de rotation plane P définie pour ce couple (i_0, j_0) (l'énoncé impose $i_0 < j_0$, mais la définition reste aussi valable même si $i_0 > j_0$ en changeant θ en $-\theta$).
Le produit PM a pour coefficients diagonaux, notés d_i, les mêmes que ceux de M, à l'exception des deux coefficients d_{i_0} et d_{j_0} qui valent :

$$d_{i_0} = \cos\theta m_{i_0,i_0} - \sin\theta m_{j_0,i_0} \quad ; \quad d_{j_0} = \sin\theta m_{i_0,j_0} + \cos\theta m_{j_0,j_0}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Tr(PM) - Tr(M) &= (\cos\theta m_{i_0,i_0} - \sin\theta m_{j_0,i_0}) + (\sin\theta m_{i_0,j_0} + \cos\theta m_{j_0,j_0}) - m_{i_0,i_0} - m_{j_0,j_0} \\ &= (\cos\theta - 1)(m_{i_0,i_0} + m_{j_0,j_0}) + \sin\theta(m_{i_0,j_0} - m_{j_0,i_0}). \end{aligned}$$

On veut prendre θ pour que cette quantité soit strictement positive, ce qui équivaut (lorsque $\sin\theta > 0$) à :

$$m_{i_0,j_0} - m_{j_0,i_0} > (\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta})(m_{i_0,i_0} + m_{j_0,j_0}).$$

En notant a la constante strictement positive $m_{i_0,j_0} - m_{j_0,i_0}$, et b la constante $m_{i_0,i_0} + m_{j_0,j_0}$, on cherche donc θ tel que $\sin\theta > 0$ et :

$$a > b(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}).$$

Or l'expression $\dfrac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$ est équivalente quans θ tend vers 0 à $\dfrac{\theta^2}{2\theta} = \dfrac{\theta}{2}$, qui tend vers 0 et qui peut donc être aussi petite que l'on souhaite. Puisque $a > 0$, on peut donc conclure qu'il existe $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ assez petit tel que $a > b(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta})$, et par suite tel que $Tr(PM) > Tr(M)$.

Ainsi, en posant $Q = {}^tP$, $Q \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ et $Tr({}^tQM) > Tr({}^tI_nM)$. Ceci contredit, d'après la question 24, l'hypothèse que : $\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M - I_n) \leq N(M - P)$.
Ainsi l'hypothèse que M est non symétrique est absurde, donc :

M est symétrique.

(b) i.

$$\begin{aligned} {}^tP_vP_v &= (I_n - 2v\,{}^tv)(I_n - 2v\,{}^tv) = I_n - 4v\,{}^tv + 4v({}^tvv)\,{}^tv \\ &= I_n - 4v\,{}^tv + 4({}^tvv)v\,{}^tv \quad \text{(le terme entre parenthèses est un scalaire)} \\ &= I_n - 4v\,{}^tv + 4v\,{}^tv \quad (\text{car } {}^tvv = \|v\|^2 = 1) = I_n. \end{aligned}$$

Donc $P_v \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$.

ii. On note L_i la i-ème ligne, qui est aussi la i-ème colonne, de la matrice symétrique M.
On note v_i la i-ème coordonnée du vecteur v.
On remarque que Mv est un vecteur-colonne, dont la i-ème coordonnée est $\langle {}^tL_i, v\rangle$.

On a : $\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \langle\ {}^t\!L_i, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} v_i\ {}^t\!L_i, v\rangle$.

D'autre part, $P_v = I_n - 2Z$ où Z est une matrice carrée, dont la i-ème ligne est égale à $v_i v$.

Ainsi : $P_v M = M - 2ZM$, où ZM est une matrice carrée, dont le i-ème coefficient diagonal vaut $v_i\langle v,\ {}^t\!L_i\rangle$. Par suite :

$$\begin{aligned} Tr(P_v M) &= Tr(M) - 2Tr(ZM) = Tr(M) - 2\sum_{i=1}^{n} v_i\langle v,\ {}^t\!L_i\rangle \\ &= Tr(M) - 2\langle v, \sum_{i=1}^{n} v_i\ {}^t\!L_i\rangle \\ &= Tr(M) - 2\langle v, Mv\rangle. \end{aligned}$$

(c) Soit λ une valeur propre de M. On sait déjà que λ est un réel car M est symétrique. Il existe un vecteur v de norme 1 tel que $Mv = \lambda v$.
Ainsi $Tr(P_v M) = Tr(M) - 2\lambda$.
Puisque $P_v \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), Tr(\ {}^t\!P_v M) \leq Tr(M)$.
Or P_v est symétrique donc : $Tr(M) - 2\lambda \leq Tr(M)$, ce qui prouve que $\lambda \geq 0$.
Donc M est symétrique positive.

(d) Il y a une petite coquille dans l'énoncé, il faut lire : soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la seule matrice P_0 dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M - P_0) \leq N(M - P)$, est $P_0 = I_n$.
On a déjà démontré que M est symétrique positive.
On raisonne par l'absurde en supposant M non inversible. Il existe v de norme 1 tel que $Mv = 0$, puis $Tr(P_v M) = Tr(M)$. Ainsi P_v est aussi une matrice unitaire telle que : $\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M - P_v) \leq N(M - P)$. Mais $P_v = I_n - 2v\ {}^t\!v \neq I_n$, ce qui contredit l'unicité supposée au début de la question.
En conclusion, M est inversible donc M est bien symétrique définie positive.

Conclusion des questions (25) *et* (26) :
M est symétrique définie positive si et seulement si la seule matrice P_0 dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M - P_0) \leq N(M - P)$, est $P_0 = I_n$.

27. (a) M est inversible donc la matrice ${}^t\!MM$ est symétrique définie positive. D'après (21), il existe une matrice notée $S = \sqrt{{}^t\!MM}$ qui est symétrique définie positive et dont le carré vaut ${}^t\!MM$.
On remarque que $S\ {}^t\!MM = S^3 = {}^t\!MMS$, donc S et ainsi S^{-1} commute avec ${}^t\!MM$.
Puisque S est inversible on peut poser $Q_0 = MS^{-1}$. On a :

$${}^t\!Q_0 Q_0 = {}^t\!S^{-1}\ {}^t\!MMS^{-1} = {}^t\!MM(S^{-1})^2 = {}^t\!MM(S^2)^{-1} = {}^t\!MM(\ {}^t\!MM)^{-1} = I_n.$$

Ainsi $Q_0 \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ et : $M = Q_0\sqrt{{}^t\!MM}$.
Remarque : il s'agit de la décomposition polaire.

(b) Avec les mêmes notations, en prenant $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$:

$$Tr(\ {}^t\!PM) = Tr\big(\ {}^t(\ {}^t\!Q_0 P)S\big) \leq Tr(S)$$

car S est symétrique définie positive et ${}^t\!Q_0 P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$, donc on peut appliquer (25).
Puisque $Tr(S) = Tr(\ {}^t\!Q_0 M)$, on a déjà prouvé que Q_0 vérifie :

$$\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M - Q_0) \leq N(M - P).$$

Il reste l'unicité à démontrer. Soit $P_0 \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M-P_0) \leq N(M-P)$.
On a alors : $Tr({}^tP_0M) = Tr({}^tQ_0M)$ puis $Tr\big({}^t({}^tQ_0P_0)S\big) = Tr(S)$.
Mais S est symétrique définie positive, donc l'unicité prouvée dans la question (25) permet d'affirmer que ${}^tQ_0P_0 = I_n$, donc $P_0 = Q_0$.
Finalement Q_0 est l'unique matrice P_0 de $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R}), N(M-P_0) \leq N(M-P).$$

28. Quand M n'est pas inversible l'unicité n'est pas assurée.
Si M est par exemple la matrice nulle, tous les éléments de $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ sont à une distance $\sqrt{n}$ de M, donc il n'y a pas ici unicité puisqu'on peut prendre pour P_0 n'importe quelle matrice de $\mathcal{U}_n(\mathbb{R})$.

Fin de la partie VI.

Partie VII.

29. Pour tout réel t, on a :

$$\gamma(t) = V_0 e^{tA_0} = V_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A_0^k.$$

Cette série entière a un rayon de convergence infini, donc γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\gamma(t))^*\,\gamma(t) &= \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A_0^{*k}\Big) V_0^* V_0 e^{tA_0} \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (-A_0)^k\Big) e^{tA_0} \\ &= e^{-tA_0} e^{tA_0} = e^{0_n} = I_n.\end{aligned}$$

Ainis γ va bien de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.
$\gamma(0) = V_0$.
$\gamma'(t) = V_0 A_0 e^{tA_0}$ donc $\gamma'(0) = V_0 A_0$.
$\gamma''(t) = V_0 A_0^2 e^{tA_0}$ donc $\gamma''(0) = V_0 A_0^2$.

30. (a) L'application η est infiniment différentiable car linéaire.
L'application $\varphi = \eta \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(t) = \eta(\gamma(t))$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions. Pour tout réel t dans un voisinage de 0, $\varphi(t) = \eta(\gamma(t)) \leq \eta(V_0)$, ce qui se réécrit : $\varphi(t) \leq \varphi(0)$.
Ainsi la fonction numérique φ a un maximum local atteint en $t = 0$, donc $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) \leq 0$.
Puisque η est linéaire, $\varphi'(0) = \eta(\gamma'(0))$ et $\varphi''(0) = \eta(\gamma''(0))$, ce qui donne bien :

$$Re\big(Tr(M^*V_0A_0)\big) = 0 \quad ; \quad Re\big(Tr(M^*V_0A_0^2)\big) \leq 0.$$

(b) On note $M^*V_0 = T = (t_{i,j})$.
On fixe $i_0 \neq j_0$ et on applique le résultat de (a) avec la matrice antihermitienne A_0 dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé en position (i_0, j_0) qui vaut 1 et celui en position (j_0, i_0) qui vaut -1.
Alors $Tr(TA_0) = t_{j_0,i_0} - t_{i_0,j_0}$.

Puisque $Re\big(Tr(TA_0)\big) = 0$, on a : $Re(t_{j_0,i_0}) = Re(t_{i_0,j_0})$.
On fait un raisonnement analogue avec la matrice B_0 dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de ceux situés en position (i_0, j_0) et en position (j_0, i_0) qui valent i. Cette matrice B_0 est aussi antihermitienne.
On a : $Tr(TB_0) = it_{j_0,i_0} + it_{i_0,j_0}$.
On sait que $Re\big(Tr(TB_0)\big) = 0$, donc $Re(i(t_{j_0,i_0}+t_{i_0,j_0})) = 0$, d'où : $Im(t_{j_0,i_0}) = -Im(t_{i_0,j_0})$.
Finalement t_{i_0,j_0} et t_{j_0,i_0} ont même partie réelle et leurs parties imaginaires sont opposées, donc $t_{j_0,i_0} = \overline{t_{i_0,j_0}}$.
Ainsi $T = {}^t\overline{T}$, donc T est une matrice hermitienne.

Il reste à montrer que T est définie positive. Soit λ une valeur propre de T. On sait déjà que λ est un réel puisque T est hermitienne.
Soit X un vecteur de norme 1 tel que $TX = \lambda X$. On pose $B = iX\ {}^t\overline{X}$. Alors B est antihermitienne, donc d'après $(30 - a - ii)$: $Re(Tr(TB^2)) \leq 0$.
On calcule TB^2, en utilisant que $TX = \lambda X$ et ${}^t\overline{X}X = \|X\|^2 = 1$:

$$TB^2 = i^2(TX)(\ {}^t\overline{X}X)\ {}^t\overline{X} = -\lambda X\ {}^t\overline{X} = i\lambda B.$$

Remarquons que $Tr(B) = i$, car le produit $X\ {}^t\overline{X}$ est une matrice dont les coefficients diagonaux sont $|x_1|^2, \ldots, |x_n|^2$, donc $Tr(B) = i\|X\|^2 = i$.
La relation $Re(Tr(TB^2)) \leq 0$ se réécrit : $Re(Tr(i\lambda B)) \leq 0$, d'où : $i\lambda Tr(B) \leq 0$, et enfin $-\lambda \leq 0$.
Donc $\lambda \geq 0$, ce qui prouve que T est positive.
Enfin M^* et V_0 sont des matrices inversibles donc T aussi. En conclusion,

$$T = M^*V_0 \text{ est une matrice hermitienne définie positive.}$$

31. Soit M inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prenons V_0 dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ construite comme dans la question 30. Alors M^*V_0 est une matrice hermitienne donc : $M^*V_0 = (M^*V_0)^* = V_0^*M$.
Puis : $M^* = V_0^*MV_0^*$, d'où : $M^*M = (V_0^*M)^2$ puis : $V_0^*M = \sqrt{M^*M}$ et enfin :

$$M = V_0\sqrt{M^*M}.$$

Fin.