Agrégation interne de Mathématiques session 2007

seconde composition

Enoncé

[0] [agregationinterne2007comp2e] v1.00

Objectif et conventions

Le but de ce problème est de construire une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable et dont la dérivée s'annule en tout point d'un ensemble dense dans $\mathbb{R}$. En fait, c'est la fonction F réciproque de celle qui est construite.
On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Lorsque dans certaines conditions, une suite ou une fonction tend vers $+\infty$, on dit qu'elle a $+\infty$ pour limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. On fait la convention analogue pour $-\infty$.
Si A et B sont deux ensembles, on note $A \setminus B$ l'ensemble des points de A qui n'appartiennent pas à l'ensemble B.
Dans tous le problème, on désigne par f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

– I – La fonction racine cubique

– A – Dérivées au sens généralisé

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a un point de I. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point a. On dit que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point a lorsque le rapport $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a, avec $x \neq a$.
Même dans le cas d'une limite infinie, on écrit $g'(x) = \ell$.

1. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et soit g une bijection croissante de I sur J. On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé en tout point de I. Démontrer que la fonction g^{-1}, réciproque de g, est dérivable au sens généralisé en tout point de J, et que, pour tout $a \in J$, on a :
$$\left(g^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(a)\right)},$$
avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.
2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Soit c un point de I. On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point c et qu'elle admet un maximum local en c. Démontrer que l'on a $g'(c) = 0$.
   (b) On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé en tout point de l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Démontrer qu'il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que :
$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

[on pourra examiner dans un premier temps le cas où $g(a) = g(b)$].

3. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit a un point de I. On suppose que la fonction g est dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$, et que la fonction $x \mapsto g'(x)$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a, avec $x \neq a$.

   (a) Soit x un point de I distinct de a ; posons $J_x =]a, x[$ si $x > a$ et $J_x =]x, a[$ si $x < a$. Démontrer que l'on a :

   $$\inf \left\{ g'(y) \mid y \in J_x \right\} \leq \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \sup \left\{ g'(y) \mid y \in J_x \right\}$$

   (b) Démontrer que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point a et que l'on a $g'(a) = \ell$.

– B – La fonction racine cubique

Rappelons que l'on désigne par f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.

   (a) Démontrer que la fonction f est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$ et que l'on a $f'(0) = +\infty$.

   (b) Soient s et t des nombres réels $\neq 0$. Démontrer l'équivalence :

   $$f'(s) \leq f'(t) \Leftrightarrow |s| \geq |t|.$$

   (c) Soit a un nombre réel > 0. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x + a) - f(x - a)$ atteint son maximum en 0.

   (d) Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

   $$|f(x) - f(y)| \leq 2 \left| f\left(\frac{x - y}{2}\right) \right|.$$

   (e) Démontrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2.

   (a) Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

   $$x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4} x^2.$$

(b) En déduire que, pour x et $x_0 \in \mathbb{R}$, tels que $x \neq x_0$ et $x_0 \neq 0$, on a :

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 4f'(x_0).$$

– C – Construction d'une suite dense

Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = t\cos(t)$. Rappelons que l'on désigne par f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.

(a) Démontrer que la fonction $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$. Étudier en particulier $(g \circ f)'(0)$.

(b) Démontrer que $(g \circ f)'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Dans les questions suivantes de cette partie, pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$a_n = g(f(n)) = n^{\frac{1}{3}} \cos\left(n^{\frac{1}{3}}\right).$$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k\pi \geq |x|$.

(a) Démontrer qu'il existe un nombre réel $y(k, x)$ appartenant à l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(y(k, x)) = x$.

(b) On note n_k la partie entière de $y(k, x)^3$. Démontrer que la suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ a pour limite x.

3. Démontrer que l'ensemble $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\lambda_n = \dfrac{1}{n^2+1}$. Démontrer que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

– II – Construction de la fonction F

Dans cette partie, on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

1.

(a) Démontrer que la série de fonctions, dont le terme général est la fonction $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$, est uniformément convergente sur toute partie compacte de $\mathbb{R}$.

Dans la suite de cette partie, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n).$$

(b) Démontrer que la fonction F est continue et strictement croissante,.

(c) Démontrer que :
pour tout $x > a_0$, on a $F(x) - F(a_0) \geq \lambda_0 f(x - a_0)$,
pour tout $x < a_0$, on a $F(x) - F(a_0) \leq \lambda_0 f(x - a_0)$.

(d) En déduire les limites de la fonction F en $+\infty$ et $-\infty$.

(e) Démontrer que la fonction F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Nous allons démontrer, dans la suite de cette partie, que la fonction F possède une dérivée au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que, pour x et $x_0 \in \mathbb{R}$, tels que $x \neq x_0$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Démontrer que la fonction F est donc dérivable au sens généralisé en a_n et que l'on a $F'(a_n) = +\infty$.

4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que x_0 n'est égal à aucun des a_n, $n \in \mathbb{N}$, mais que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est divergente.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si l'on a $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, alors on a :

$$1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

(b) En déduire que la fonction F est dérivable au sens généralisé en x_0 et que l'on a $F'(x_0) = +\infty$.

5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que x_0 n'est égal à aucun des a_n, $n \in \mathbb{N}$, et que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente.

(a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

(b) *En* déduire que la fonction F est dérivable au point x_0 et que l'on a :

$$F'(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

6. Démontrer que la fonction F^{-1}, réciproque de F, est donc dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

– III – Parties denses de $\mathbb{R}$

– A – Intersections d'ensembles ouverts denses

Donnons nous, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, un sous-ensemble ouvert V_n de $\mathbb{R}$, dense dans $\mathbb{R}$.
On pose $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

1. Soit I un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels satisfaisant aux conditions suivantes :

   i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < v_n$;

   ii. $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$;

   iii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset]u_n, v_n[\cap V_{n+1}$.

   (b) Démontrer que l'ensemble $I \cap B$ n'est pas vide.

2. Démontrer que l'ensemble B est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de B. En considérant les ensembles ouverts $V_n \setminus \{x_n\}$, démontrer que l'ensemble $B' = B \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

– B – Parties de $\mathbb{R}$ contenant de « gros » ensembles compacts

1. Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de l'intervalle $[a,b]$. On suppose que l'ensemble $C = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est compact. Soit ε un nombre réel > 0 et soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \leq \varepsilon$.

   (a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, posons $I_k =]c_k - \alpha_k, c_k + \alpha_k[$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble C soit contenu dans la réunion $\bigcup\limits_{k=0}^{n} I_k$.

   (b) Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : [a,b] \to [0,1]$ telle que l'on ait :
   $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$;
   $g(x) = 0$ pour tout $x \notin \bigcup\limits_{k=0}^{n} I_k$.

   (c) Démontrer l'inégalité :

   $$\int_a^b g(t)\,dt \leq \varepsilon.$$

2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, il existe une partie compacte C de $\mathbb{R}$, contenu dans $A \cap [a,b]$, et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que pour toute fonction continue $g : [a,b] \to [0,1]$ satisfaisant à $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$, on ait $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \geq \varepsilon$.

   (a) Démontrer que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, l'ensemble $A \cap [a,b]$ n'est pas dénombrable.

   (b) Démontrer que l'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$ et que pour toute partie dénombrable D de A, l'ensemble $A \setminus D$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

– IV – Les points de pente infinie de F

On reprend les notations de la partie **II**. On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes et l'on pose :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n).$$

On suppose de plus, que l'ensemble $D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

– A – Densité de l'ensemble des points de pente infinie

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $T \in]0, +\infty[$, posons $g_T(x) = \inf\{T, f'(x)\}$.
   (a) Soit $T \in]0, +\infty[$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_T(x - a_n)$ est convergente.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_T(x - a_n)$. Démontrer que la fonction G_T est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$F'(x) = \sup\{G_T(x) \mid T \in]0, +\infty[\},$$
   où la borne supérieure est prise dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Soit M un nombre réel > 0. On pose $U_M = \{x \in \mathbb{R} \mid F'(x) > M\}$.
   (a) Démontrer que l'ensemble U_M est la réunion des ensembles $\{x \in \mathbb{R} \mid G_T(x) > M\}$ pour $T \in]0, +\infty[$.
   (b) Démontrer que l'ensemble U_M est ouvert et dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soit A l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid F'(x) = +\infty\}$. Démontrer que l'ensemble $A \setminus D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

– B – Densité de l'ensemble des points de pente finie

1. Soient a et $b \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ tels que $a + \varepsilon < b$. Soit M un nombre réel > 0 ; notons C l'ensemble $\{x \in [a, b] \mid x \notin U_M\}$. Soit $g : [a, b] \to [0, 1]$ une fonction continue telle que $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$. Démontrer l'inégalité :
   $$\int_a^b M g(t)\, dt + F(b) - F(a) \geq M(b - a).$$
2. Soit B l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid F'(x) \neq +\infty\}$. Démontrer que, pour toute partie dénombrable N de $\mathbb{R}$, l'ensemble $B \setminus N$ est dense dans $\mathbb{R}$.