ÉPREUVES ÉCRITES - PREMIÈRE ÉPREUVE

Dans ce problème on considère deux automorphismes d'un espace vectoriel et on établit, sous certaines restrictions, une condition nécessaire pour que le groupe qu'ils engendrent soit fini.

Le texte est divisé en quatre parties. Très peu de candidats ont abordé la quatrième partie autrement que pour y "glaner quelques points". Le barème avait d'ailleurs été établi de telle sorte qu'un candidat qui traitait complètement les trois premières parties obtenait la note maximale. Signalons à ce sujet que, à difficulté égale, les coefficients attribués aux différentes questions diminuent au cours du problème. Il n'est donc pas "rentable" de négliger les premières questions, par exemple en les rédigeant de manière imprécise.

Voyons maintenant les principales difficultés rencontrées par les candidats.

Algèbre linéaire élémentaire. Beaucoup de candidats ont montré qu'ils avaient une connaissance superficielle de ce sujet : même s'ils ne les formulent pas toujours explicitement, les idées erronées suivantes sont sous-jacentes dans leurs raisonnements.

L'erreur la plus grave, heureusement assez peu répandue, est de croire que l'image et le noyau d'un endomorphisme sont toujours en somme directe.

Une erreur plus courante est de parler *du* sous-espace supplémentaire comme si celui-ci était unique.

En liaison avec l'erreur précédente, certains en viennent à penser que, étant donné un sous-espace vectoriel E de V, toute base de V contient une base de E. Cette erreur révèle une méconnaissance du théorème de la base incomplète. On attend des candidats, non seulement qu'ils connaissent ce théorème, mais aussi qu'ils aient réfléchi à son utilité à ce stade de la théorie.

Géométrie. Le problème comportait une seule question de géométrie vectorielle plane (I.1.d). Il est regrettable et étonnant que celle-ci ait été si mal traitée : la traduction en termes géométriques de la réduction des matrices est un problème naturel que les candidats devraient avoir déjà rencontré.

Endomorphismes. En général les candidats connaissent bien le théorème de Cayley-Hamilton. Une bonne partie d'entre eux connaissent le polynôme minimal et la condition nécessaire et suffisante sur celui-ci pour que l'endomorphisme soit diagonalisable.

Polynômes. Curieusement la question (II.3.a) a dérouté. Il était bien signalé dans les notations que, par *racine*, on entendait racine complexe. Peu de candidats ont pensé à utiliser l'unicité de la décomposition en produit de facteurs du premier degré, ce qui ramenait la question à un calcul facile.

Rédaction et présentation. En général, et malgré des exceptions notables, les copies sont présentées correctement. La plupart des candidats semblent être conscients de l'influence que peut avoir la présentation sur l'attitude du correcteur. Le fait qu'ils corrigent eux-mêmes des copies explique sans doute cela.

Corrigé

PARTIE I

1)a) D'après le théorème du rang, la somme des dimensions de l'image et du noyau d'un endomorphisme est égale à la dimension de l'espace. On a donc dim $W = n - 1$.
[Il n'y a aucune raison pour que le noyau et l'image soient en somme directe]

b) Le système $\mathcal{E} \cup \{u\}$ n'est pas lié car $u \notin K$. Comme il comporte n vecteurs c'est une base de V.
Si $r(u) = \lambda u + \sum a_i e_i$, la matrice de r dans la base $\mathcal{E} \cup \{u\}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et on trouve que $\det(r) = \lambda$. Maintenant, la matrice de $r - \det(r)\, I_V$ a sa dernière ligne nulle, ce qui signifie que $\mathrm{Im}(r - \det(r)\, I_V) \subseteq K$. En particulier on trouve que $r.u - \det(r)\, u \in K$.

c) On vient de voir que $\mathrm{Im}(r - \det(r)\, I_V) \subseteq \mathrm{Ker}(r - I_V)$ donc $(r - I_V)(r - \det(r)\, I_V) = P(r) = 0$. Le polynôme minimal de r est donc un diviseur de P. Une homothétie ne peut être une pseudo-réflexion si $n \geq 2$. On a donc $r - I_V \neq 0$ et $r - \det(r)\, I_V \neq 0$. Par suite le polynôme minimal de r est P. L'endomorphisme r est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et n'a que des racines simples donc si et seulement si son déterminant est différent de 1.

d) Si $\det(r) \neq 1$, l'endomorphisme r a deux valeurs propres réelles distinctes (1 et $\det(r)$). C'est donc une affinité. En particulier, si $\det(r) = 0$, r est une projection vectorielle et, si $\det(r) = -1$, c'est une symétrie oblique.
Si $\det(r) = 1$, r a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base construite en b) : c'est une transvection [ce terme, qui ne figure pas explicitement dans le programme, n'était pas demandé].

2)a) On écrit facilement la matrice de M_P dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & & & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & \\ 0 & & & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne on trouve :

$$\det(t.I_n - M_P) = t \det(t.I_{n-1} - M_Q) + a_n \ , \quad \text{avec } Q = t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

On en déduit par récurrence que $\det(t.I_n - M_P) = P(t)$ [on peut remarquer que ce développement donne le calcul de $P(t)$ par l'algorithme de Horner].

[Une autre technique est de développer par rapport à la dernière colonne. Il faut alors être soigneux et remarquer que les mineurs ne s'expriment pas directement comme des déterminants de matrices triangulaires. Pour se ramener à cette situation, un nouveau développement est nécessaire.
La matrice M_P est la matrice compagnon du polynôme P, c'est à dire la matrice de la multiplication par X dans l'algèbre $\mathbf{R}[X]/(P)$ rapportée à la base canonique $1, X, \cdots X^{n-1}$.
L'ensemble $\mathcal{I}$ des polynômes R tels que $R(M_P).e_1 = 0$ est un idéal. On constate facilement que $P(M_P).e_1 = 0$ et que $Q(M_P).e_1 \neq 0$ pour tout polynôme Q de degré $< n$. Par suite $\mathcal{I}$ est l'idéal engendré par P. Maintenant, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, l'idéal $\mathcal{I}$ contient aussi le polynôme caractéristique R de M_P, donc P divise R. Comme R et P sont des polynômes unitaires de même degré, on a en fait $R = P$].

b) La matrice M_Q est inversible car $\det(M_Q) = (-1)^n Q(0) \neq 0$. Comme $Q \neq P$, on constate que la matrice $M_P - M_Q$ est de rang 1. Il en est alors de même de la matrice $M_Q^{-1}(M_P - M_Q) = M_Q^{-1}M_P - I_n$.
[On peut aussi calculer la matrice $M_Q^{-1}M_P$. On trouve :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{a_n b_{n-1}}{b_n} - a_{n-1} \\ 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \frac{a_n b_{n-i}}{b_n} - a_{n-i} \\ & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 & \frac{a_n b_1}{b_n} - a_1 \\ 0 & & & & 0 & \frac{a_n}{b_n} \end{pmatrix}$$

ce qui met le résultat en évidence.]

PARTIE II

1)a) Par définition on a $X_v.e_i = A^{i-1}.v$. Pour $1 \leq i \leq n-1$ on trouve donc :

$$X_v M_P.e_i = X_v.e_{i+1} = A^i.v$$

Pour $i = n$, on remarque que $P(A) = 0$, c'est à dire $A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} A^i$, et on obtient :

$$\begin{aligned} X_v M_P.e_n &= X_v(-\sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}.e_i) = -\sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} A^{i-1}.v \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} A^i.v = A^n.v \end{aligned}$$

b) Les applications $X_v\, M_P$ et $A\,X_v$, coïncidant sur la base canonique, sont égales. Autrement dit X_v appartient à $\mathcal{C}_A$.
L'application $v \longrightarrow X_v$ est linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathcal{C}_A \subset \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Elle est injective car $X_v.e_1 = v$. Donc $\dim \mathcal{C}(A) \geq \dim \mathbf{R}^n = n$.

2)a) L'ensemble $\mathcal{T}$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Les matrices de $\mathcal{T}$ sont entièrement définies par leur première ligne et leur première colonne. Donc

$\dim \mathcal{T} = 2n-1$. [On peut aussi remarquer que $\mathcal{T}$ est l'intersection de $(n-1)^2$ hyperplans, linéairement indépendants, d'équations $X_{i,j} - X_{i+1,j+1} = 0$, donc de dimension $n^2 - (n-1)^2$].

b) Pour $1 \leq i, j \leq n-1$, on trouve :

$$X_{i,j} = {}^t e_i.X.e_j = {}^t(M_P.e_i).X.M_P.e_j = {}^t e_{i+1}.X.e_{j+1} = X_{i+1,j+1}$$

3)a) Posons : $P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$. On trouve $P(0) = a_n$ et :

$$\begin{aligned} t^n\, P(\frac{1}{t}) &= a_n\, t^n + a_{n-1}\, t^{n-1} + \cdots + a_1\, t + 1 \\ P(0)\, P(t) &= a_n\, t^n + a_n\, a_1\, t^{n-1} + \cdots + a_n\, a_{n-1}\, t + a_n^2 \end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$a_n^2 = 1 \text{ et } (\forall i \leq n-1),\ a_n\, a_i = a_{n-i}.$$

Supposons P unitaire et réciproque et posons, dans $\mathbf{C}[t]$:

$$P(t) = (t+1)^\alpha\, (t-1)^\beta \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{\gamma_i}$$

avec $\lambda_i \neq 0, 1, -1$. La relation $t^n P(\frac{1}{t}) = P(0)P(t)$ équivaut à :

$$\prod_{i=1}^{s} (t - \frac{1}{\lambda_i})^{\gamma_i} = \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{\gamma_i}$$

D'après l'unicité de la décomposition en facteurs du premier degré dans $\mathbf{C}[t]$, on voit que la transformation $\lambda \mapsto \dfrac{1}{\lambda}$ préserve l'ensemble des racines avec leurs multiplicités. Pour la réciproque, on observe que les polynômes $t+1$, $t-1$ et $(t-\lambda)(t-\frac{1}{\lambda})$ sont réciproques, et qu'un produit de polynômes réciproques est réciproque.

b) Comme P est réciproque, on a $P(0)^2 = 1$. Donc $\det(A) = (-1)^n\, P(0) = \pm 1$ et la matrice A est inversible. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \det(t.I_n - {}^tA^{-1}) &= \det(-{}^tA^{-1})\, t^n \det(\frac{1}{t}\, I_n - {}^tA) \\ &= (-1)^n \det(A)^{-1}\, t^n\, P(\frac{1}{t}) = P(0)^{-1}\, t^n\, P(\frac{1}{t}) = P(t) \end{aligned}$$

En particulier P est le polynôme caractéristique de la matrice ${}^tM_P^{-1}$ [beaucoup de candidats n'ont pas vu que cela était le point essentiel de la question et se sont contentés d'un calcul banal]. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{{}^tM_P^{-1}} &= \{X \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R});\ X\, M_P = {}^tM_P^{-1}\, X\} \\ &= \{X \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R});\ {}^tM_P\, X\, M_P = X\} \end{aligned}$$

4)a) D'après la question précédente, il s'agit de montrer que les deux espaces vectoriels $\mathcal{C}_{{}^tM_P^{-1}}$ et $\mathcal{C}_{{}^tM_Q^{-1}}$ ont une intersection non réduite à la matrice nulle. Or chacun de ceux-ci est de dimension au moins n (II.1.b) et ils sont contenus dans un même espace vectoriel $\mathcal{T}$ de dimension $2n-1$. Leur intersection est donc de dimension au moins égale $n + n - (2n-1) = 1$ et contient une matrice X non nulle.

b) Si la matrice X satisfait la condition (*), il en est de même des matrices ${}^tX$, ${}^tX + X$ et ${}^tX - X$. Si la matrice X est non nulle, l'une des deux matrices ${}^tX + X$ (symétrique) ou ${}^tX - X$ (antisymétrique) est non nulle.

c) D'après (II.2.b), la matrice X doit appartenir à $\mathcal{T}$. Comme X doit être symétrique, elle est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple montre que la relation :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

est équivalente à la condition $5a - 4b - c = 0$ et que la relation :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

est équivalente à la condition $4a + 5b + c = 0$. Les matrices cherchées sont donc, à une constante multiplicative non nulle près :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 41 \\ -9 & 1 & -9 \\ 41 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

PARTIE III

1) On remarque que $b - a = b\circ(I_V - b^{-1}\circ a)$. Puisque b est inversible, les noyaux de $b - a$ et de $(I_V - b^{-1}\circ a)$ sont égaux. Le noyau W de $(I_V - b^{-1}\circ a)$ est donc de dimension $n - 1$.

2)a) Le polynôme caractéristique de a' divise celui de a. [ce résultat classique s'obtient en complétant une base de E en une base de V et en calculant $\det(t\,I_V - a)$ par blocs dans cette base].

b) Par définition de W, on a $a|_W = b|_W$ et, par conséquent, $a' = a|_E = b|_E$. Le polynôme caractéristique de a' est donc un diviseur commun non constant de P et Q.

c) Comme $E \not\subset W$, il existe un élément e de la base $\mathcal{E}$ qui n'est pas contenu dans W. Comme $\dim W = n - 1$, si $\mathcal{G}$ est une base de W, la famille $\mathcal{G} \cup e$ est une base de V. On peut donc compléter le système libre $\mathcal{E}$ par une famille $\mathcal{F}$ extraite du système générateur $\mathcal{G} \cup e$ de façon à obtenir une base de V. Comme $e \subseteq \mathcal{E}$, la famille $\mathcal{F}$, qui ne contient pas e, est contenue dans $\mathcal{G}$ et répond à la question [très peu de candidats ont traité correctement cette question. La plupart des "démonstrations" proposées dénotent chez leurs auteurs une mauvaise compréhension du théorème de la base incomplète].
Comme a et b coïncident sur W et conservent E, les matrices $\mathrm{Mat}(a, \mathcal{E} \cup \mathcal{F})$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{E}\cup\mathcal{F})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Le calcul des déterminants par blocs montre que les polynômes P et Q sont tous les deux divisibles par $\det(t.I_h - C)$ c'est à dire par un polynôme de degré $h = \dim V - \dim E \neq 0$.

d) Les autres possibilités étant exclues par b) et c) on doit avoir $E = V$. Autrement dit les automorphismes a et b n'ont pas de sous-espace invariant commun non trivial.

3)a) Comme a est un automorphisme, on a $\dim a^{-1}(W) = \dim W = n-1$. L'intersection de $n-1$ hyperplans dans un espace de dimension n est de dimension au moins égale à un. En particulier on aura $\dim(\bigcap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(W)) \geq 1$.[Si on veut une démonstration explicite, on utilise la formule $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W)$, et on vérifie par récurrence sur k que $\dim(\bigcap_{j=0}^{k} a^{-j}(W)) \geq n-k-1$].

b) Si les vecteurs $a^i.v$ $(0 \leq i \leq n-1)$ ne forment pas une base, il existe un entier k, $1 \leq k \leq n-1$, tel que le vecteur $a^k.v$ appartienne à l'espace vectoriel E engendré par les vecteurs $a^i.v$ $(0 \leq i \leq k-1)$. On constate alors que $a(E) \subset E$. [De manière générale, d'après Cayley-Hamilton, le sous-espace vectoriel engendré par les $a^i.v$ $(0 \leq i)$ est aussi engendré par les $a^i.v$ $(0 \leq i \leq n-1)$, c'est le plus petit sous espace vectoriel invariant par a qui contient v].
Par construction les vecteurs $a^i.v$ $(0 \leq i \leq k-1 \leq n-2)$ appartiennent à W, donc $E \subset W$ et la restriction de b à E est égale à celle de a. E est donc aussi stable par b. Ceci est exclus par (II.2.b) car P et Q sont premiers entre eux et E, qui contient v, n'est pas réduit à $\{0\}$.

c) Pour $i < n-1$, $a^i.v \in W$. Donc $b(a^i.v) = a(a^i.v) = a^{i+1}.v$ et on constate que l'on a $\mathrm{Mat}(a, \mathcal{E}) = M_R$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{E}) = M_T$ avec R et T polynômes unitaires de degré n. En identifiant les polynômes caractéristiques on trouve $R = P$ et $T = Q$. [En utilisant la relation $P(a) = 0$, on constate directement que $a(a^{n-1}.v) = a^n.v = \sum_{i=0}^{n-1} -a_{n-i}\, a^i.v$. Pour la matrice b, avant un calcul analogue, il faut vérifier, par une récurrence immédiate, que $b^i.v = a^i.v$ pour $i < n-1$].

d) Posons $e_i = a^{i-1}.v$ $(1 \leq i \leq n)$. On constate que l'on a $a(e_n) = e_1$, $b(e_n) = -e_1$ et $a(e_i) = b(e_i) = e_{i+1}$ pour $1 \leq i < n$. Autrement dit a et b agissent par permutation sur l'ensemble des vecteurs $\{\pm e_i\}$. Tout élément du groupe G qu'ils engendrent fait de même. Cette action définit un homomorphisme de G dans le groupe S_{2n} des permutations de $2n$ objets. Les éléments de G étant entièrement déterminés par leur restriction à la base $\{e_i\}$, cet homomorphisme est injectif. Le groupe est donc fini, d'ordre un diviseur de $(2n)!$. [On peut montrer que G est isomorphe à une extension semi-directe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$. Son ordre est donc $2^n\, n$].

PARTIE IV

1)a) D'après la partie III, il existe une base $\mathcal{E}$ de V dans laquelle les endomorphismes a et b ont respectivement pour matrices M_P et M_Q. Soit X la matrice, symétrique ou antisymétrique, solution de (*)(II.4.a). La forme bilinéaire f dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est X répond à la question.

b) D'après la définition de f, l'espace vectoriel E est stable par a et par b. D'après (II.2.d) et l'hypothèse sur les polynômes P et Q, on a $E = \{0\}$ ou $E = V$. Mais comme f est non nulle on a $E \neq V$ donc $E = \{0\}$, ce qui signifie que la forme est non dégénérée.

c) L'application qui à $v \in V$ associe la forme linéaire $x \longrightarrow f(v, x)$ est une application linéaire de V dans son dual V^*. Cette application est injective car f est non dégénérée. Comme V et V^* ont même dimension, elle est surjective. Autrement dit, pour toute forme linéaire ℓ définie sur V, il existe un unique vecteur v de V tel que $\ell(x) = f(v, x)$.

2)a) Comme p est de rang 1, il existe un vecteur non nul w tel que $\mathrm{Im} p = \mathbf{R} w$. Un tel w étant choisi, l'application ℓ de V dans $\mathbf{R}$ définie par $p.x = \ell(x)\, w$ est clairement

6)a) Comme le groupe G est fini, il existe un entier k non nul tel que $b^k = I_V$. Donc, pour tout λ dans S, on aura $\lambda^k = 1$.

b) Il est clair que f est linéaire à droite, antilinéaire à gauche et a la symétrie hermitienne. Il est aussi immédiat de vérifier que f est invariant par a et b, donc par tout endomorphisme h de G. Pour vérifier que f est définie positive, on remarque d'une part que $< g.x, g.x > \geq 0$, d'autre part que I_V appartient à G. Il vient alors, pour tout vecteur non nul x de $V_{\mathbb{C}}$:

$$f(x,x) \;\geq < x, x > > 0$$

La restriction de f à V est donc une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, donc d'après (3-b) on a :

$$-1 = \frac{P(0)}{Q(0)} = P(0)\,Q(0).$$

c) En utilisant la définition des polynômes réciproques, on trouve pour t réel :

$$\overline{h(t)} = e^{int/2}\,P(e^{-it}) = e^{-int/2}\,P(0)\,P(e^{it}) = h(t)$$

$$\overline{k(t)} = -i\,e^{int/2}\,Q(e^{-it}) = -i\,e^{-int/2}\,Q(0)\,Q(e^{it}) = k(t)$$

La fonction k est clairement de période 4π. Elle s'annule chaque fois que e^{it} est une racine de Q c'est à dire $2n$ fois sur chaque période car à chacune des n racines de Q correspondent deux valeurs de t sur un intervalle d'amplitude 4π.
La fonction k ne peut s'annuler sans changer de signe qu'en un point qui annule à la fois k et k'. Un tel point correspond à une racine múltiple de Q, ce qui est exclu par hypothèse.

d) Avec les notations de (2.b) et (2.c), on trouve $c = -1$ d'où $v = -\dfrac{2}{f(w,w)}.w$ et $p.x = -f(u,x)u$.
En suivant la même démarche qu'en 5, on trouve $f(u_\lambda, u_\mu) = 0$ pour $\overline{\lambda}\mu \neq 1$, c'est à dire pour $\lambda \neq \mu$. Il vient alors :

$$0 \leq f(u_\lambda, u_\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda\, Q'(\lambda)} = -\frac{h(\alpha)}{k'(\alpha)}$$

e) En chaque zéro α de k, h a le signe opposé à k'. Ce signe est donc alternativement positif et négatif. Entre deux zéros de k il y a donc au moins un zéro de h. Comme sur une période (de 4π) il y a autant de zéros de h que de zéros de k ceux ci sont entrelacés. Il en est de même des racines de P et Q sur le cercle unité.
[On peut démontrer la réciproque de cette propriété : si les racines de P et de Q sont entrelacées alors le groupe G est fini. Cette démonstration, ainsi que de nombreux développements et commentaires, se trouve dans l'article *Monodromy for the hypergeometric function* de F. Beukers and G. Heckman paru aux *Inventiones math.* 95 (1989)]