

Année 1973

PROBLÈME DES MOMENTS

ÉNONCÉ

Il est rappelé aux candidats :

— qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation, de la clarté et de la précision des démonstrations ;

— qu'ils doivent respecter les notations fixées par l'énoncé.

On note \mathbb{C} le plan complexe, $z = x + iy$ un point quelconque de \mathbb{C} ($x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$ sont réels), r le module de z et \bar{z} le conjugué $x - iy$ de z .

Soit D le demi-plan $y > 0$ de \mathbb{C} . Pour tout élément z de D , on pose $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Si F est une application de D dans \mathbb{C} , on note, lorsqu'elles existent, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$... les dérivées partielles de

l'application $(x, y) \mapsto F(x + iy)$ et $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$...

les dérivées partielles de l'application $(r, \theta) \mapsto F(re^{i\theta})$.

Toutes les fonctions considérées dans ce texte sont supposées continues, sauf peut-être en un nombre fini de points. Si f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , on appellera \mathcal{C} la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt < +\infty \dots$$

Conformément à l'usage, $\mathbb{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans \mathbb{C} . Un élément quelconque P de $\mathbb{C}[X]$ est noté $\sum p_j X^j$. Toutes les suites considérées dans le problème sont indexées dans \mathbb{N} (ensemble des entiers naturels zéro compris).

I

Soit k l'application de $D \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} définie par

$$k(z, t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right)$$

Si f est une application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , on note K_f l'application de D dans \mathbf{C} définie par $K_f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z, t) f(t) dt$, lorsque cette intégrale est convergente pour tout z appartenant à D .

a. Si f satisfait à \mathcal{A} , démontrer que K_f existe, que K_f est indéfiniment continûment dérivable par rapport aux variables x et y et qu'on a :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) K_f = 0 .$$

b. L'application f vérifiant toujours \mathcal{A} , on la suppose continue au point t_0 de \mathbf{R} ; démontrer qu'on a :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ y > 0}} K_f(z) = f(t_0) .$$

II

a. Soit F une fonction définie dans le demi-plan $y \geq 0$ de \mathbf{C} et à valeurs dans \mathbf{C} . On suppose que F est continue, que sa restriction à D est holomorphe et que F vérifie $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ y \geq 0}} \frac{F(z)}{z} = 0$.

Démontrer que, pour tout z de D , on a

$$F(z) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} k(z, t) F(t) dt .$$

b. Expliquer K_f pour $f(t) = \text{Log} |t - \alpha|$, où α est un complexe arbitraire (on pourra d'abord supposer $\text{Im } \alpha < 0$ et utiliser II a, en choisissant F de sorte qu'on ait $\text{Re } F(t) = \text{Log} |t - \alpha|$ pour $t \in \mathbf{R}$).

Démontrer que, pour tout polynôme P à coefficients complexes et pour tout z non réel, on a :

$$(1) \quad \text{Log} |P(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y| |\text{Log} |P(t)|}{(x-t)^2 + y^2} dt .$$

c. Pour quelles valeurs du réel σ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\sigma}{1+t^2} dt$ est-elle convergente? Pour ces valeurs de σ expliciter K_f lorsque f est la fonction $t \mapsto |t|^\sigma$.

Vérifier en particulier qu'on a, pour tout r strictement positif :

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r |t|^\sigma}{r^2 + t^2} dt = c(\sigma) r^\sigma$$

et donner la valeur de $c(\sigma)$. (On pourra dans le cas $0 < \sigma < 1$

appliquer II a. à la fonction $z \mapsto \left(\frac{z}{i} \right)^\sigma = r^\sigma e^{i\sigma \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}$.

III

a. On considère l'opérateur différentiel $\delta = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = r \frac{\partial}{\partial r}$; $\delta \circ \delta$ est noté δ^2 . Soit f une application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} vérifiant \mathcal{A} . Pour tout réel λ strictement positif, on note f_λ l'application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} définie par $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$.

Démontrer qu'au sens de la convergence simple on a :

$$\delta^2 K_f = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \left[\frac{1}{(\lambda-1)^2} K \left(f_\lambda + f_{\frac{1}{\lambda}} - 2f \right) \right]$$

b. Exprimer l'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en fonction de δ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$.

Soit f une application de \mathbf{R} dans \mathbf{R} vérifiant \mathcal{A} . On suppose que les deux fonctions $t \mapsto f(e^t)$ et $t \mapsto f(-e^t)$ sont convexes; démontrer qu'on a : $\frac{\partial^2 K_f}{\partial \theta^2} \leq 0$.

c. On suppose que f est une fonction paire vérifiant les hypothèses de III b. Démontrer que, pour tout r fixé strictement positif, la fonction $\theta \mapsto K_f(re^{i\theta})$ admet un maximum atteint pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

IV

Dans cette question,

- W désigne une application paire de \mathbf{R} dans $[1, +\infty[$, vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log } W(t)}{1+t^2} dt < +\infty$$

et telle que la fonction $t \mapsto \text{Log } W(e^t)$ soit convexe; on pose

pour tout r strictement positif $\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \text{Log } W(t)}{r^2+t^2} dt$ et,

pour tout élément j de \mathbf{N} , $M_j = \sup_{r>0} \frac{r^{j+\frac{1}{2}}}{e^{\mu(r)}}$.

- P = $\sum p_j X^j$ est un élément de $\mathbf{C}[X]$ satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)|^2 (W(t))^{-1} dt \leq 1.$$

- a. Prouver que, pour tout réel u et tout réel strictement positif v , on a :

$$uv \leq e^{u-1} + v \text{Log } v$$

- b. Démontrer l'existence d'un réel C indépendant de P et W tel que pour tout z non réel on ait

$$|P(z)| \leq C |y|^{-\frac{1}{2}} e^{-\mu(r)}$$

On utilisera l'égalité

$$\begin{aligned} \text{KLog} |P|(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(z, t) \text{Log} |(P(t))^2 (W(t))^{-1}| dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{KLog } W(z) \end{aligned}$$

et on appliquera les résultats des questions II et III ainsi que l'inégalité IV_a, où il est suggéré de remplacer u par $\text{Log} |(P(t))^2 (W(t))^{-1}|$.

- c. Dédurre de IV_b l'existence d'un réel H, indépendant de P et W, tel que, pour tout j , on ait : $|p_j| \leq \frac{H}{M_j}$.

ÉNONCÉ

V

On désigne toujours par W une application satisfaisant aux hypothèses de IV. On suppose en outre que, pour tout élément j de \mathbf{N} , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{W(t)} = 0.$$

Les notations de IV sont conservées.

- a. Démontrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes P_n = $\sum p_{nj} X^j$ satisfaisant aux conditions :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad P_n &\text{ est de degré } n \\ \text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t) P_n(t) (W(t))^{-1} dt &= \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \end{aligned}$$

- b. Dédurre de IV que, pour tout élément j de \mathbf{N} , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |p_{nj}|^2 \leq \left(\frac{H}{M_j} \right)^2$$

- c. Soit (b_n) une suite complexe satisfaisant à : $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$.

Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n P_n(z)$ est convergente dans \mathbf{C} et que sa somme est une fonction entière de z (c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe \mathbf{C} tout entier).

- d. Soit (a_j) une suite complexe satisfaisant à : $\sum_{j=0}^{+\infty} \left| \frac{a_j}{M_j} \right| < +\infty$.

Démontrer l'existence d'une suite unique (b_n) de complexes telle qu'on ait $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$ et que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n P_n$ vérifie pour tout j $\int_{-\infty}^{+\infty} t^j f(t) (W(t))^{-1} dt = a_j$.

VI

Dans cette question on note

- ρ un réel strictement positif et $\sigma = \frac{1}{\rho}$ son inverse;

• s^{ρ} l'ensemble des suites complexes (a_n) telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de la suite) pour lequel on a :

$$\sup_{n \geq 0} [c^{-n} n^{-\rho} |a_n|] < +\infty$$

• S^{ρ} l'ensemble des applications f indéfiniment dérivables de \mathbf{R} dans \mathbf{C} telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de f) pour lequel on a :

$$\sup_{\substack{n \geq 0 \\ x \in \mathbf{R}}} [c^{-n} n^{-\rho} |f^{(n)}(x)|] < +\infty$$

• W_A l'application de \mathbf{R} dans $\mathbf{R} : t \mapsto W_A(t) = \exp\left(\frac{|t|}{A}\right)^{\sigma}$,

associée à un réel A strictement positif quelconque $\left(\sigma = \frac{1}{\rho}\right)$.

a. Soit g une application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} satisfaisant à

$$\int_{-x}^{+x} |g(t)|^2 (W_A(t))^{-1} dt < +\infty$$

Le nombre x étant réel, on pose :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) (W_A(t))^{-1} dt.$$

Démontrer qu'on définit ainsi une application f de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , qui est élément de S^{ρ} et qui, pour tout entier positif ou nul, satisfait à :

$$f^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t) (W_A(t))^{-1} dt$$

(on rappelle que $\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{u-1} dt$ et $\left(\frac{u}{e}\right)^n \sqrt{\frac{2\pi}{u}}$ sont équivalents lorsque u tend vers $+\infty$).

b. On suppose désormais $\rho > 1$. L'application W_A vérifie alors les hypothèses de IV et V.

Calculer

$$\mu_A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \frac{r \operatorname{Log} W_A(t)}{r^2 + t^2} dt \quad (\text{utiliser II c.})$$

Démontrer

$$M_j(A) = \sup_{r>0} \left[r^{j+\frac{1}{2}} \exp(-\mu_A(r)) \right] = \left[\gamma_A \left(j + \frac{1}{2} \right)^{\rho} \right]^{j+\frac{1}{2}}$$

où γ est un nombre qu'on calculera.

c. Dédurre de VI. que, pour tout élément (a_n) de s^{ρ} , il existe un élément f de S^{ρ} tel que, pour tout n , on ait : $f^{(n)}(0) = a_n$.

(On cherchera f de la forme : $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) (W_A(t))^{-1} dt$, en choisissant A et g convenablement).