

I. — 1° a)

$$x_1 \in \mathcal{R}(\Sigma) \iff \exists z_1 \in \Sigma \quad \text{et} \quad y_1 \in \mathbb{E} : z_1 = x_1 + iy_1$$

et

$$\begin{aligned} x_2 \in \mathcal{R}(\Sigma) &\iff \exists z_2 \in \Sigma \quad \text{et} \quad y_2 \in \mathbb{E} : z_2 = x_2 + iy_2; \\ \forall \lambda \quad \text{et} \quad \forall \mu \in \mathbb{E}, \quad \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda x_1 + \mu x_2 + i(\lambda y_1 + \mu y_2) \in \Sigma, \\ \lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathbb{E} \quad \text{et} \quad \lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathbb{E}. \end{aligned}$$

$\mathcal{R}(\Sigma)$ est un sous-espace vectoriel; la même démonstration s'applique à $\mathcal{J}(\Sigma)$, qui est aussi un sous-espace. $\mathcal{R}(\Sigma)$ et $\mathcal{J}(\Sigma)$ sont un même sous-espace $\mathcal{I}(\Sigma)$. — Puisque l'on a

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{J}(\Sigma) \implies \exists z \in \Sigma \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{E} \quad \text{tels que} \quad z = x + iy \in \Sigma \quad \text{et} \quad -ix = y - ix \in \Sigma. \\ y \in \mathcal{J}(\Sigma) \implies y \in \mathcal{R}(\Sigma), \quad \mathcal{J}(\Sigma) \subset \mathcal{R}(\Sigma), \quad \text{de même} \quad \mathcal{R}(\Sigma) \subset \mathcal{J}(\Sigma), \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \mathcal{J}(\Sigma) = \mathcal{I}(\Sigma).$$

b) Soit H un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} ; examinons $\mathcal{I}[c(H)]$. Par définition,

$$x \in H \quad \text{et} \quad y \in H \implies z = x + iy \in c(H) \implies x \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{I}[c(H)],$$

on a donc $H \subset \mathcal{I}[c(H)]$; mais $\mathcal{I}[c(H)] = \mathcal{R}[c(H)]$, on peut alors écrire

$$x \in \mathcal{R}[c(H)] \implies z = x + iy \in c(H),$$

donc

$$x \in H \quad \text{et} \quad \mathcal{I}[c(H)] \subset H;$$

on en déduit donc

$$H = \mathcal{I}[c(H)].$$

2° a) Étude de $\Sigma \cap \mathbb{E}$. — L'intersection de Σ et de \mathbb{E} est donc une partie de \mathbb{E} .

$$\forall x, y \in \Sigma \cap \mathbb{E} \quad \text{et} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda x + \mu y \in \Sigma \quad \text{et} \quad \lambda x + \mu y \in \mathbb{E},$$

d'où l'on déduit que

$$\lambda x + \mu y \in \Sigma \cap \mathbb{E} \implies \Sigma \cap \mathbb{E} \quad \text{est un espace vectoriel.}$$

Comparaison de $c(\Sigma \cap \mathbb{E})$ et de $\Sigma \cap \bar{\Sigma}$.

$$\begin{aligned} \forall z \in c(\Sigma \cap \mathbb{E}), \quad \mathcal{R}(z) = x \in \Sigma \cap \mathbb{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(z) = y \in \Sigma \cap \mathbb{E}; \\ z = x + iy \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - iy, \end{aligned}$$

$\Sigma \cap \mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de Σ entraîne que $iy \in \Sigma$ et $-iy \in \Sigma$, d'où

$$z = x + iy \in \Sigma \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - iy \in \Sigma \iff \bar{z} = z \in \bar{\Sigma};$$

donc

$$z \in \bar{\Sigma} \implies z \in \Sigma \cap \bar{\Sigma} \implies c(\Sigma \cap \mathbb{E}) \subset \Sigma \cap \bar{\Sigma}.$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} \forall z \in \Sigma \cap \bar{\Sigma} \implies z \in \Sigma \quad \text{et} \quad z \in \bar{\Sigma} \implies z \in \Sigma \quad \text{et} \quad \bar{z} \in \Sigma \\ \implies \frac{z + \bar{z}}{2} = \mathcal{R}(z) \in \Sigma \quad \text{et} \quad -i \frac{z - \bar{z}}{2} = \mathcal{J}(z) \in \Sigma. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z) \in \mathbb{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(z) \in \mathbb{E}, \quad \text{donc} \quad \mathcal{R}(z) \in \Sigma \cap \mathbb{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(z) \in \Sigma \cap \mathbb{E}. \\ \Sigma \cap \bar{\Sigma} \subset c(\Sigma \cap \mathbb{E}), \quad \text{d'où} \quad \Sigma \cap \bar{\Sigma} = c(\Sigma \cap \mathbb{E}). \end{aligned}$$

b) Établissons la formule $\Sigma + \bar{\Sigma} = c[\mathcal{I}(\Sigma)]$.

$$z = x + iy \in \Sigma \implies x \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{I}(\Sigma) \implies \bar{z} = x - iy \in c[\mathcal{I}(\Sigma)].$$

$c[\mathcal{I}(\Sigma)]$ est donc un espace vectoriel et, $\Sigma \subset c[\mathcal{I}(\Sigma)]$ et $\bar{\Sigma} \subset c[\mathcal{I}(\Sigma)]$ entraîne $\bar{\Sigma} + \Sigma \subset c[\mathcal{I}(\Sigma)]$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} \forall z \in c[\mathcal{I}(\Sigma)] \implies x \in \mathcal{I}(\Sigma), \quad y \in \mathcal{I}(\Sigma) \quad \text{et} \quad z = x + iy. \\ x \in \mathcal{I}(\Sigma) = \mathcal{R}(\Sigma) \iff \exists z_1 \in \Sigma \quad \text{et} \quad x = \mathcal{R}(z_1) = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \end{aligned}$$

et

$$y \in \mathcal{I}(\Sigma) = \mathcal{J}(\Sigma) \iff \exists z_2 \in \Sigma \quad \text{et} \quad y = \mathcal{J}(z_2) = -i \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2};$$

on a donc

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2}.$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 \text{ et } z_2 \in \Sigma &\implies \frac{z_1 + z_2}{2} \in \Sigma \\ \bar{z}_1 \text{ et } \bar{z}_2 \in \bar{\Sigma} &\implies \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2} \in \bar{\Sigma} \end{aligned} \right\} \implies z \in \Sigma + \bar{\Sigma} \implies c[\mathcal{I}(\Sigma)] \subset \Sigma + \bar{\Sigma},$$

donc

$$\Sigma + \bar{\Sigma} = c[\mathcal{I}(\Sigma)].$$

c) Un sous-espace Σ de $c(E)$ est un complexifié. — Par définition, il existe

$$\begin{aligned} & H \subset E \quad \text{et} \quad \Sigma = c(H). \\ & \forall z \in \Sigma, \quad \exists x, y \in H \quad \text{tels que} \quad z = x + iy; \\ & y \in H \iff -y \in H \quad \text{et} \quad z \in \Sigma \iff \bar{z} = x - iy \in \Sigma, \quad \text{d'où} \quad \Sigma = \bar{\Sigma}. \end{aligned}$$

Si Σ est un complexifié de $c(E)$ on a $\Sigma = \bar{\Sigma}$.

Réciproquement, soit Σ un sous-espace de $c(E)$ vérifiant l'égalité

$$\Sigma = \bar{\Sigma},$$

qui entraîne $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \Sigma$ et, d'après la question 2°, a, $\Sigma = c(\Sigma \cap E)$; Σ est donc un complexifié.

Conclusion. — Pour qu'un sous-espace Σ de $c(E)$ soit un complexifié, il faut et il suffit que Σ soit égal à son conjugué $\bar{\Sigma}$.

3° Sous-espace de $c(E)$ irréels.

a) Dimension de $l(\Sigma)$. — Si Σ est irréel on a l'équivalence suivante :

$$\Sigma \text{ irréel} \iff \Sigma \cap E = \{0\} = c[\{0\}];$$

On a aussi, d'après la question 2°, a, $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \{0\}$.

L'égalité $\Sigma + \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)]$, établie à la question 2°, b, donne une somme directe pour $c[l(\Sigma)]$,

$$\Sigma \oplus \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)],$$

puisque $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \{0\}$.

Or, on sait que, en général,

$$\Sigma + \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)] \iff \dim \Sigma + \dim \bar{\Sigma} = \dim c[l(\Sigma)] + \dim (\Sigma \cap \bar{\Sigma})$$

et

$$\Sigma \oplus \bar{\Sigma} = c[l(\Sigma)] \iff \dim \Sigma + \dim \bar{\Sigma} = \dim c[l(\Sigma)];$$

Pour que Σ soit irréel il faut et il suffit que

$$\dim \Sigma + \dim \bar{\Sigma} = \dim c[l(\Sigma)],$$

mais

$$\Sigma \cap \bar{\Sigma} = 0 \implies \dim \Sigma = \dim \bar{\Sigma},$$

la condition s'écrit alors $2 \dim_{\mathbb{C}} \Sigma = \dim_{\mathbb{R}} [l(\Sigma)]$.

b) Établissons la formule $\dim l(\Sigma) = 2 \dim \Sigma - \dim (\Sigma \cap \bar{\Sigma})$. — On a déjà vu que, pour tout Σ on a

$$\dim \Sigma + \dim \bar{\Sigma} = \dim c[l(\Sigma)] + \dim (\Sigma \cap \bar{\Sigma}).$$

4° Étude des sous-espaces Σ irréels.

a) Étude des applications $z \mapsto \mathcal{R}(z)$ et $z \mapsto \mathcal{J}(z)$ de z dans $l(\Sigma)$. — L'application $z \mapsto \mathcal{R}(z)$ se définit ainsi : x et y étant des réels appartenant à $l(\Sigma)$, on considère le complexe $z = x + iy$, $\mathcal{R}(z) = x$ et $\mathcal{J}(z) = y$.

Tout $z = x + iy$ de Σ est l'image d'un élément x dans l'application $z \mapsto \mathcal{J}(z)$, donc l'image d'un élément de $l(\Sigma)$ dans l'application $z \mapsto \mathcal{R}(z)$; cette application est surjective ainsi que $z \mapsto \mathcal{J}(z)$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ donné, cherchons tous les z , tels que $z = x + iy$, vérifiant $\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}(z_0)$; on a $x = x_0$ et $y = y_0 + \lambda$ (λ , réel quelconque), $z = z_0 + i\lambda$; si λ est différent de zéro, on a un vecteur $z - z_0 \neq 0$ irréel appartenant à $l(\Sigma) \in E$, ce qui est impossible :

λ est sûrement nul, la seule solution de $\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}(z_0)$ est $z = z_0$, l'application $z \mapsto \mathcal{R}(z)$ et l'application $z \mapsto \mathcal{J}(z)$ sont injectives, donc bijectives.

Le raisonnement montre que, si l'application $z \mapsto \mathcal{R}(z)$ est injective, $\Sigma \cap E = \{0\}$, donc Σ est irréel.

Puisque $\mathcal{R}(\Sigma) = l(\Sigma) = \mathcal{J}(\Sigma)$, la propriété de $z \mapsto \mathcal{R}(z)$ est aussi la propriété de $z \mapsto \mathcal{J}(z)$.

b) Base de Σ irréel. — Soit (z_1, z_2, \dots, z_q) une base d'un sous-espace irréel Σ ,

$$[\mathcal{R}(z_1), \mathcal{R}(z_2), \dots, \mathcal{R}(z_q), \mathcal{J}(z_1), \mathcal{J}(z_2), \dots, \mathcal{J}(z_q)] \in l(\Sigma),$$

Σ étant irréel, on a $\dim l(\Sigma) = 2 \dim \Sigma = 2q$.

On a vu, à la question 4°, a, que (z_1, z_2, \dots, z_q) étant un système libre de $c(E)$ entraîne que $\mathcal{R}(z_1), \mathcal{R}(z_2), \dots, \mathcal{R}(z_q)$ et $\mathcal{J}(z_1), \mathcal{J}(z_2), \dots, \mathcal{J}(z_q)$ sont des systèmes libres de E .

Supposons que pour $p \in 1, 2, \dots, q$, on puisse déterminer $\lambda_{p,k} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{J}(z_p) = \sum_{k=1}^q \lambda_{p,k} \mathcal{R}(z_k)$$

et

$$z_p = \mathcal{R}(z_p) + \sum_{k=1}^q \lambda_{p,k} \mathcal{R}(z_k) = (1 + \lambda_{p,p}) \mathcal{R}(z_p) + \sum_{k=1, k \neq p}^q \lambda_{p,k} \mathcal{R}(z_k), \quad \text{avec} \quad k \neq p,$$

$$\mathcal{R}(z_k) \in \Sigma \implies z_p \in E \implies z_p \in \Sigma \cap E = \{0\}, \quad z_p = 0,$$

le système $\mathcal{R}(z_1), \dots, \mathcal{R}(z_q), \mathcal{J}(z_1), \dots, \mathcal{J}(z_q)$ est donc un système libre de E et constitue une base d'un sous-espace Σ de E de dimension $2q < n = \dim E$.

La réciproque est immédiate.

c) Construction des sous-espaces Σ irréels de $c(E)$ par le procédé donné. — Prenons un sous-espace H de E , de dimension paire $2q$, engendré par les vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_{2q}, 0, 0, \dots, 0)$ de E dans une base donnée. Considérons l'automorphisme $\sigma(H)$ tel que

$$[\sigma(H)]^2 = -I$$

et le sous-espace Σ défini par $x \in \Sigma \iff x \in H$ et $z = x + i\sigma(x)$, σ étant un automorphisme de H de carré -1 .

Σ est un sous-espace vectoriel $c(E)$ et Σ est irréel, car

$$z = x + i\sigma(x) \in \Sigma \cap E \implies \sigma(x) = 0 \implies x = 0 \implies z = 0.$$

Réciproquement, soit Σ un sous-espace, irréel, de $c(E)$, $z \mapsto \mathcal{R}(z)$ est une application injective de Σ dans $l(\Sigma)$, \mathcal{R} et \mathcal{J} sont deux isomorphismes de Σ dans $l(\Sigma)$, $\mathcal{J} \circ \mathcal{R}^{-1}$ est un automorphisme de $l(\Sigma)$ dans $l(\Sigma)$, qui à tout x de $l(\Sigma)$ associe l'élément unique y de $l(\Sigma)$ tel que

$$\mathcal{R}(x + iy) = x [x \in l(\Sigma) \xrightarrow{\mathcal{R}^{-1}} x + iy \in \Sigma \xrightarrow{\mathcal{J}} y \in l(\Sigma)].$$

Si l'on note σ cet automorphisme, tout élément de Σ s'écrit $z = x + i\sigma(x)$, d'où

$$z = x + iy \implies -iz = y - ix \quad \text{et} \quad y = \sigma(x) \implies \sigma(y) = -x;$$

$$\sigma[\sigma(x)] = -x \quad \text{et} \quad \sigma^2 = -I \quad (\text{le carré de } \sigma \text{ est égal à } -1).$$

5° a) Pas d'automorphisme σ , $\sigma^2 = -1$, si $\dim H = 2q + 1$. — Soit un espace réel H de dimension impaire et l'automorphisme σ défini par la matrice carrée M à $2q + 1$ lignes et colonnes. Soit D le déterminant de M . L'égalité $\sigma^2 = -1$ se traduit par $D^2 = \det[-I] = (-1)^{2q+1} = -1$, or D est à éléments réels et $D^2 \geq 0$; il n'existe donc pas d'automorphisme σ de carré $\sigma^2 = -1$.

b) Matrice Ω représentant σ . — La base de l'espace H de dimension $2p$ étant l'ensemble des vecteurs

colonnes $v_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ e_{jk} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, où $e_{jk} = 1$ si $j - k = p$, $e_{jk} = -1$ si $k - j = p$ et $e_{jk} = 0$ si $|j - k| \neq p$.

La matrice Ω représentant σ est

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & -1 & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

On a bien

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix} = -I \quad \text{et} \quad \sigma^2 = -1.$$

II. — 1° Endomorphisme de $c(E)$, $\varphi = f' + ig'$. — Cherchons f et g vérifiant $f' + g' = \varphi$ donné. Soit

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \varphi(z) = \varphi(x + iy) = f(x) + if(y) + i[g(x) + ig(y)]$$

$$\iff \varphi(z) = f(x) - g(y) + i[f(y) + g(x)] \iff \varphi(x) + i\varphi(y) = \mathcal{R}\varphi(z) + i\mathcal{J}\varphi(z)$$

$$\iff f(x) - g(x) = \mathcal{R}\varphi(z) \quad \text{et} \quad f(y) + g(x) = \mathcal{J}\varphi(z);$$

si $y = x$ on a

$$z = x + ix \quad \text{et} \quad f(x) - g(x) = \mathcal{R}\varphi(z_0), \quad f(x) + g(x) = \mathcal{J}\varphi(z_0),$$

d'où

$$2f(x) = \mathcal{R}\varphi(z_0) + \mathcal{J}\varphi(z_0) \quad \text{et} \quad 2g(x) = \mathcal{J}\varphi(z_0) - \mathcal{R}\varphi(z_0),$$

$f(x)$ et $g(x)$ sont définis de façon unique à partir de φ .

2° Ensemble \mathcal{L} des endomorphismes φ de $c(E)$. — a) Propriétés équivalentes.

$$\varphi \in \mathcal{L}; \quad \varphi(E) = (i\varphi)(E); \quad \varphi(E) = \varphi[c(E)]; \quad l(\text{Ker } \varphi) = E,$$

avec $\text{Ker } \varphi = \text{noyau de } \varphi$.

On a

$$(P_1): \varphi \in \mathcal{L} \implies \varphi(E) = \Sigma, \quad \text{sous-espace de } c(E), \quad \forall z \in \Sigma \quad \text{et} \quad iz \in \Sigma$$

$$\implies \varphi(E) = (i\varphi)(E),$$

donc $(P_1) \implies (P_2)$.

On a

$$(P_2): \varphi(E) = (i\varphi)(E) \implies \varphi(E) \text{ sous-espace réel.}$$

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \varphi(x + iy) = \varphi(x) + i\varphi(y),$$

puisque φ est un endomorphisme de $c(E)$;

$$\text{et} \quad \left. \begin{array}{l} x \in E \implies \varphi(x) \in E \\ y \in E \implies i\varphi(y) \in i\varphi(E) = \varphi(E) \end{array} \right\} \implies \varphi(z) \in \varphi(E) \implies \varphi[c(E)] \subset \varphi(E);$$

Or,

$$E \subset c(E) \implies \varphi(E) \subset \varphi[c(E)]$$

donc

$$\varphi(E) = \varphi[c(E)]$$

et l'on a

$$(P_2) \implies (P_3).$$

On a

$$(P_3): \varphi(E) = \varphi[c(E)] \implies \forall x \in E, \quad \forall y \in E \quad \text{et} \quad \forall z = x + iy \quad \text{on a} \quad \varphi(z) = f(x) + ig(y). \\ f(x) = \varphi(x) \in E \quad \text{et} \quad g(y) = -\varphi(iy) \in E \quad \text{donc} \quad \varphi(z) \in c(E);$$

puisque

$$\varphi[c(E)] = \varphi(E), \quad \text{on a} \quad \varphi(x) \in \varphi(E) \subset c(E).$$

L'image de E est donc un sous-espace de $c(E)$: $\varphi \in L$.

On a donc

$$(P_3) \implies (P_1), \quad \text{donc enfin} \quad (P_1) \iff (P_2) \iff (P_3).$$

Noyau de φ [$\text{Ker}(\varphi)$]; $\varphi \in \mathcal{L}$. — Si $x \in E, y \in E$ et $z = x + iy \in c(E)$, $\varphi(z) = f(x) + ig(y)$.

$$z \in \text{Ker } \varphi \iff f(x) = 0, \quad g(y) = 0 \\ \iff \exists x \in \text{Ker } f \subset \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi) \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi). \\ (P_2): \varphi(E) = i\varphi(E) \iff \forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad \varphi(x) = i\varphi(y) \\ \implies \varphi(x - iy) = 0 \implies \forall x \in E, \quad \exists z = x - iy \in \text{Ker } \varphi(x).$$

Si

$$x \in \mathcal{R}(\text{Ker } \varphi) = \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi) \implies E \subset \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi),$$

mais on a toujours

$$\mathcal{L}(\text{Ker } \varphi) \subset E, \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi) = E.$$

Donc on a $(P_2) \implies (P_4)$.

On a

$$(P_4): \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi) = E \iff \forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad \varphi(x + iy) = 0 \implies \varphi(x) = i\varphi(-y) \implies \varphi(iy) = i\varphi(y),$$

donc

$$(P_4) \implies (P_2).$$

Finalement

$$(P_1) \iff (P_2) \iff (P_3) \iff (P_4).$$

b) Rang de φ appartenant $\mathcal{L}(\varphi)$. — Pour tout endomorphisme φ de $c(E)$ on a

$$\text{rang } \varphi = \dim c(E) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \varphi \iff 2 \text{rang } \varphi = 2 \dim_{\mathbb{R}} E - 2 \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \varphi,$$

Or, d'après la question I, 3°, b, on a, d'une part,

$$2 \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \varphi = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi) + \dim_{\mathbb{C}} (\text{Ker } \varphi \cap \overline{\text{Ker } \varphi})$$

et, d'autre part,

$$\varphi(z) = f'(z) + ig'(z) = f'(x + iy) + ig'(x + iy) = f(x) + if(y) - g(y) + ig(x), \\ \varphi(x) = f(x) - g(y) + i[f(y) + g(x)] \implies z = x + iy \in \text{Ker } \varphi, \quad \text{si} \quad f(x) - g(y) = 0, \quad \text{on a} \quad f(y) + g(x) = 0, \\ \varphi(\bar{x}) = f(x) + g(y) - i[g(x) - f(y)] \implies z = x + iy \in \text{Ker } \varphi, \quad \text{si} \quad f(x) + g(y) = 0, \quad \text{on a} \quad g(x) - f(y) = 0. \\ z \in \text{Ker } \varphi \cap \overline{\text{Ker } \varphi} \iff f(x) - g(y) = 0, \quad f(x) + g(y) = 0, \quad f(y) + g(x) = 0, \quad g(x) - f(y) = 0 \\ \iff f(x) = 0, \quad g(x) = 0, \quad f(y) = 0, \quad g(y) = 0 \\ \iff x \in (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) \quad \text{et} \quad y \in (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g);$$

donc

$$\dim_{\mathbb{C}} (\text{Ker } \varphi \cap \overline{\text{Ker } \varphi}) = \dim_{\mathbb{R}} (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g).$$

On a donc

$$2 \text{rang } \varphi = 2 \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) \\ = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g).$$

3° Étude de $\mathcal{L}_0(\varphi)$, partie de $\mathcal{L}(\varphi)$: $\varphi \in \mathcal{L}_0 \iff \text{Ker } \varphi$ irréel.

a) Cas où $\dim E = n = 2n' + 1$. — La formule $\dim_{\mathbb{R}} (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim E - 2 \text{rang } \varphi$, si $\text{Ker } \varphi$ est irréel, ce qui entraîne $\text{Ker } \varphi \cap \overline{\text{Ker } \varphi} = \{0\}$ et $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0\}$, devient

$$\dim E = 2 \text{rang } \varphi, \quad \dim E = 2q$$

ce qui est incompatible avec $\dim E = 2n' + 1$.

$\mathcal{L}_0(\varphi)$ est vide si la dimension de E est impaire.

b) Si $\varphi = f' + ig'$ appartient à \mathcal{L}_0 , alors $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0\}$.

$$\text{Ker } \varphi \text{ irréel} \implies 2 \dim \text{Ker } \varphi \leq \dim E \quad (\text{d'après la question I, 4° b}) \\ \implies 2 \text{rang } \varphi = \dim E - \dim (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) \geq \dim E \\ \implies \dim (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) \leq 0 \implies \dim (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = 0 \\ \implies \text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0\}.$$

Si $\varphi = f' + ig'$ appartient à \mathcal{L}_0 , alors il existe un automorphisme σ de E . — On a vu (question I, 4°, c) en faisant $H = E$, que si $\text{Ker } \varphi$ est irréel, il existe un automorphisme de E , σ , de carré $\sigma^2 = -1$, tel que

$$z = x + i\sigma(x) \in \text{Ker } \varphi \iff f'[x + i\sigma(x)] + ig'[x + i\sigma(x)] = 0 \\ \iff (f - g \circ \sigma)(x) = 0, \quad (g + f \circ \sigma)(x) = 0 \\ \iff g \circ \sigma = f \quad \text{et} \quad -f \circ \sigma = g.$$

c) Endomorphismes f et g de E , tels que $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0\}$. — S'il existe un endomorphisme τ de E , tel que $f = g \circ \tau$ et $g = -f \circ \tau$, l'endomorphisme de $c(E)$, $\varphi = f' + ig'$ a son noyau $\text{Ker } \varphi$ défini par

$$z = x + i\tau(x) \in \text{Ker } \varphi \implies (f - g \circ \tau)(x) = 0 \quad \text{et} \quad (g + f \circ \tau)(x) = 0 \\ \implies \forall x \in E; \quad x \in \text{Ker } \varphi \\ \implies \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi) = E \implies \varphi \in \mathcal{L}(\varphi). \\ \varphi(x) = f(x) + ig(x) = 0 \iff f(x) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) = 0 \implies x \in \text{Ker } f, \quad x \in \text{Ker } g \\ \implies x \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0\} \implies x = \{0\}. \\ \text{Ker } \varphi \cap E = \{0\} \implies \text{Ker } \varphi \text{ irréel, } \varphi \in \mathcal{L}_0.$$

Unicité de τ . — On a

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} f = g \circ \tau = g \circ \tau' \implies \tau - \tau' \in \text{Ker } g \\ g = -f \circ \tau = -f \circ \tau' \implies \tau - \tau' \in \text{Ker } f \end{array} \right\} \implies (\tau - \tau')(x) \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{\emptyset\},$$

donc

$$\tau = \tau' \implies \tau = \sigma \quad \text{et} \quad \tau^2 = -1. \\ z = x + i\tau(x) \in \text{Ker } \varphi.$$

4° Étude de (T): $g \circ \tau = f$ et $f \circ \tau = -g$.

a) (T) admet une solution si $\varphi \in \mathcal{L}$. — On a montré, à la question II, 3°, c, que si (T) a une solution τ , $\varphi \in \mathcal{L}$.

Réciproquement, si $\varphi \in \mathcal{L}$, on sait que $\varphi(E) = i\varphi(E)$, donc

$$\forall x \in E, \exists y \in E: \varphi(x) = i\varphi(y) \quad \text{et} \quad f(x) + ig(x) = if(y) - g(y). \\ \forall x \in E, \exists y \in E: f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad g(y) = -f(x).$$

L'application $x \xrightarrow{\tau} y$ vérifiant $f(y) = g(x)$ et $g(y) = f(x)$ est surjective, soit

$$y = \tau(x) \quad \text{et} \quad y_1 = \tau(x_1) \iff f(y_1) = g(x_1) \quad \text{et} \quad g(y_1) = -f(x_1), \\ y_2 = \tau(x_2) \iff f(y_2) = g(x_2) \quad \text{et} \quad g(y_2) = -f(x_2), \\ y_1 + y_2 = \tau(x_1) + \tau(x_2) \implies f(y_1) + f(y_2) = g(x_1) + g(x_2) \quad \text{et} \quad g(y_1) + g(y_2) = -f(x_1) - f(x_2) \\ \implies f(y_1 + y_2) = g(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad g(y_1 + y_2) = -f(x_1 + x_2) \\ \implies y_1 + y_2 = \tau(x_1 + x_2) \\ \implies \tau(x_1 + x_2) = \tau(x_1) + \tau(x_2);$$

τ est un endomorphisme de E « pour que $\varphi = f' + ig'$ de $c(E)$ étant donné, le système (T) en τ ait au moins une solution il faut, et il suffit que φ appartienne à \mathcal{L} : $\varphi \in \mathcal{L}$ ».

b) $\varphi \in \mathcal{L}_0$. Si (T) a une solution unique en τ , elle en a, au moins une. — Comme on vient de le voir à la question 4°, a, $\varphi \in \mathcal{L}_0$; si $\varphi \in \mathcal{L}$ et $\text{Ker } \varphi$ irréel, $\varphi \in \mathcal{L}_0$ et d'après la question 3°, c la solution τ de (T) est unique et de carré -1 .

Si $\varphi \in \mathcal{L}$ et $\varphi \in \mathcal{L}_0$, (T) n'a pas une solution unique, puisque, dans la question 3°, c on a montré que si la solution était unique $\text{Ker } \varphi$ serait irréel et φ appartiendrait à \mathcal{L}_0 .

En définitive, « Pour que (T) ait une solution unique en τ , il faut et il suffit que φ appartienne à \mathcal{L}_0 (ou $\varphi \in \mathcal{L}$ et φ irréel) ».

Cas où $\dim E = 2p$: une solution de (T) est un automorphisme de carré -1 . — Par hypothèse $\varphi \in \mathcal{L}$, ou bien $\varphi \in \mathcal{L}_0$ ou bien $\varphi \in \mathcal{L}$ avec $\varphi \in \mathcal{L}_0$.

α) Si $\varphi \in \mathcal{L}_0$, il a été établi à la question 4°, b que le système (T) a une solution unique τ de carré -1 .

β) Si $\varphi \in \mathcal{L}$ et $\varphi \notin \mathcal{L}_0$ et si $\dim E = 2p$ (p entier positif), on a, d'après la question II, 1°, b,

$$2 \text{ rang } \varphi = 2p - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g),$$

d'où

$$\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = 2q.$$

On peut alors déterminer un automorphisme τ_1 , de carré -1 , de $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g$ vérifiant (pour $\varphi = f' + ig'$)

$$\forall x \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g, \quad g \circ \tau_1(x) = 0 = f(x) \quad \text{et} \quad f \circ \tau_1(x) = 0 = -g(x).$$

Soit, d'autre part, un sous-espace irréel Σ de $c(E)$ tel que $\text{Ker } f = (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) + \Sigma$, Σ étant le supplémentaire de $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g$ dans $\text{Ker } \varphi$.

Dans $l(\Sigma)$, on a τ_2 , unique solution de (T), avec $\tau_2^2 = -1$. Si l'on considère l'endomorphisme τ défini par

$$x \in E, \quad x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad x_1 \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g,$$

x , unique et x_2 unique appartenant à $l(\Sigma)$, τ est une solution de (T) vérifiant les relations suivantes:

$$\tau^2 = -I \quad \text{et} \quad \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1 = 0.$$

III. — Espace vectoriel euclidien de dimension n , prolongé à $c(E)$; produit scalaire $zz' = (x + iy)(x' + iy')$; vecteur isotrope $x^2 = 0$; sous-espace isotrope de $c(E)$: $z \in \text{SETI} \iff z^2 = 0$.

1° a) Un système orthonormé des $2q$ vecteurs de E , $u_1, u_2, \dots, u_q, v_1, \dots, v_q$ étant donné,

$$u_1 + iv_1, \dots, u_q + iv_q$$

engendre un SETI de dimension q . — Par définition, $u_h u_k, v_h v_k, u_h v_k$ et $u_k v_h$ sont orthogonaux si $h \neq k$. Les produits scalaires $u_h \cdot u_k, \dots$, sont nuls et les carrés scalaires sont égaux

$$u_h^2 = \dots = v_k^2.$$

Soit

$$w_k = u_k + iv_k, \quad w_h = u_h + iv_h;$$

on a alors

$$w_h \cdot w_k = u_h \cdot u_k - v_h \cdot v_k + i(u_h v_k + u_k v_h) = 0$$

et

$$w_h^2 = u_h^2 - v_h^2 + 2iu_h v_h = 0.$$

w_h est isotrope. Le système w_1, w_2, \dots, w_q est normé, puisque le système $u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_q$ est orthonormé; le système est libre et constitue une base de G . Les q vecteurs w_1, \dots, w_q forment une base du sous-espace irréel SETI de $c(E)$ qu'ils engendrent.

b) Existence d'une structure euclidienne pour laquelle Σ_0 soit un SETI. — Soit E_0 un espace réel et Σ_0 un sous-espace irréel de son complexifié. Soit $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$, avec $p \leq q$, les $2p$ vecteurs libres de E_0 tels que $u_1 + iv_1, \dots, u_p + iv_p$ soit une base de Σ_0 . On définit alors sur E une structure euclidienne telle que $u_1, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p$ soit un système orthogonal (question 1°, a); Σ_0 est un SETI.

2° Endomorphisme τ d'un espace euclidien.

a) Étude des propriétés de τ : (α) τ est orthogonal; (β) $\tau^2 = -1$; (γ) $\forall x, x \cdot \tau(x) = 0$.

(α) τ orthogonal $\iff \tau(x) \cdot \tau(y) = x \cdot y, \forall x$ et $\forall y$.

(β) $(\tau \circ \tau)(x) = -x$.

Des relations α) et β) on déduit

$$\tau^{-1} \circ \tau \circ \tau = -\tau^{-1} \iff \tau = -\tau^{-1}, \quad \tau^{-1} = -\tau = {}^t\tau,$$

d'où

$$x \cdot \tau(x) = \tau^{-1}(x) \cdot \tau^{-1}[\tau(x)] = -\tau(x) \cdot x \implies x \cdot \tau(x) = 0.$$

(α) et (β) \implies (γ).

On suppose (α), τ est orthogonal, et (γ), $\forall x, x \cdot \tau(x) = 0$, vraies puisque τ est orthogonal $\tau^{-1}(x) \cdot x = 0$, d'où l'on tire

$$x[\tau(x) + \tau^{-1}(x)] = 0, \quad \forall x \implies \tau^{-1}(x) = -\tau(x) \implies \tau^2 = -1.$$

(α) et (γ) \implies (β).

Des deux relations (β), $\tau^2 = -1$, et (γ), $\forall x, x \cdot \tau(x) = 0$, on déduit

$$[\tau(x) + y] \cdot [\tau(\tau(x) + y)] = 0 \iff [\tau(x) + y] \cdot [-x + \tau(y)] = 0$$

$$\implies \tau(x) \cdot \tau(y) = x \cdot y, \quad \forall x, y.$$

(β) et (γ) entraînent (α), τ orthogonal:

Deux des propriétés (α), (β) ou (γ) de τ impliquent la troisième.

b) Sous-espace irréel Σ de $c(E)$. — Si l'automorphisme σ associé à Σ est orthogonal, on a

$$\forall x \in c(E), \quad [x + i\sigma(x)]^2 = x^2 - \sigma^2(x) + 2ix \cdot \sigma(x) = 2ix\sigma(x) = 0;$$

Σ est un SETI.

Réciproquement, si Σ est un SETI, on a

$$\forall x \in l(\Sigma), \quad [x + i\sigma(x)]^2 = 0 = 2ix \cdot \sigma(x),$$

donc la restriction de σ à $l(\Sigma)$ est orthogonale; comme Σ est irréel on a $l(\Sigma) = E$, σ est orthogonal.

Conclusion. — Σ , sous-espace irréel de $c(E)$, est un SETI si, et seulement si, σ est orthogonal.

c) Automorphisme orthogonal σ de carré -1 d'un espace euclidien. — Soit H un espace vectoriel euclidien de dimension $2p$ sur \mathbb{R} , σ un endomorphisme orthogonal de carré -1 de H , Σ le sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$ associé à H et Σ par le procédé (P) (question de I, 4°, c).

(α) Σ est un SETI.

(β) Le système des p vecteurs de H ; y_1, y_2, \dots, y_p , étant orthonormé, on obtient une base orthogonale de Σ en prenant z_1, z_2, \dots, z_p définis par $z_k = y_k + \sigma(y_k)$. Le système $[y_1, y_2, \dots, y_p, \sigma(y_1), \dots, \sigma(y_p)]$ est une base de H que nous notons B .

σ vérifie les propriétés (α) et (β) (question III, 2°, a), donc

$$\forall k, \quad y_k \cdot \sigma(y_k) = 0,$$

σ vérifie aussi

$$\forall h, k, \quad k \neq h, \quad z_h \cdot z_k = y_h \cdot y_k - \sigma(y_h) \cdot \sigma(y_k) + i[y_h \sigma(y_k) + y_k \sigma(y_h)] = 0$$

et

$$y_h \cdot \sigma(y_k) = -y_k \cdot \sigma(y_h) = 0.$$

B est orthonormé et, dans cette base σ , est représentée par la matrice Ω définie à la question I, 5°, b.

3° Base normale d'un SETI.

a) Tout SETI admet au moins une base normale. — (z_1, z_2, \dots, z_q) de $c(E)$ est dit normale lorsque

$$\Re(z_1), \dots, \Re(z_q), \quad \Im(z_1), \dots, \Im(z_q)$$

est un système orthonormé de (E) . Comme on l'a vu (question III, 1°, a) c'est une base normale d'un SETI.

Réciproquement, tout SETI admet une base normale construite en considérant l'espace vectoriel euclidien H et l'endomorphisme orthogonal de carré -1 associé à Σ et H et en utilisant le procédé (P) employé à la question 2°, c.

b) Complément en une base d'un système normal de SETI. — Soit un système normal (z_1, z_2, \dots, z_q) d'un SETI, Σ ; $\dim \Sigma = p > q$ défini par

$$z_k = x_k + i\sigma(x_k), \quad x_k \in H,$$

H étant l'espace vectoriel associé à Σ et σ l'endomorphisme orthogonal de carré -1 associés à Σ et à H .

A partir du système normal (x_1, x_2, \dots, x_q) , on forme le système orthonormé de $H(y_1, \dots, y_p)$ tel que $[y_1, y_2, \dots, y_p, \sigma(y_1), \dots, \sigma(y_p)]$ soit une base orthonormée de H , avec $y_k = x_k (k = 1, 2, \dots, q)$, donc une base normale de Σ .

4° Étude des SETI lorsque $\dim E = 2p$ ou $\dim E = 2p + 1$.

a) Tout SETI est inclus dans un SETI de dimension p . — Soit un SETI, Σ_q , de dimension $\dim \Sigma_q = q$, avec $\dim E = 2p$ ou $\dim E = 2p + 1$, H_q est associé à Σ_q , σ_q est associé à H_q et Σ_q .

$x_1, x_2, \dots, x_q, \sigma_q(x_1), \dots, \sigma_q(x_q)$ est une base orthonormée de H_q . On peut considérer un sous-espace vectoriel H_q de E de dimension $2p$ et tel que $H_q \subset H_p$ (théorème de la base incomplète). De même on peut envisager une extension de σ_q à H_q , qui soit un endomorphisme orthogonal de carré -1_q (endomorphisme identique de H_p).

b) Sous-espace totalement isotrope SETIM. — La dimension de E étant $2p$ ou $2p + 1$, un SETI est maximal si sa dimension est p

$$2p < \dim E < 2p + 1 \implies \dim \text{SETIM} = p$$

Supposons $\dim E = 2p$ et $\dim \text{SETIM} = p - 1$, pour un SETI donné, Σ_{p-1} , associé à Π_{p-1} et σ_{p-1} . Soit G_{p-1} le sous-espace vectoriel de E orthogonal à Π_{p-1} muni de la base orthonormée (g, g') . On construit deux SETIM distincts contenant Σ_{p-1} en prenant E et σ_p , extension de σ_{p-1} à E définie par :

$$\begin{aligned} \alpha) & \quad \sigma_p(g) = g', \quad \sigma_p(g') = -g, \\ \beta) & \quad \sigma_p(g) = -g', \quad \sigma_p(g') = g. \end{aligned}$$

Si Σ_p et Σ_{p_1} étaient égaux, il en résulterait que $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, $\exists c \in \mathbb{R}$ et $\exists d \in \mathbb{R}$:

$$(a + bi)(ig + ig') = (c + di)(ig - ig'), \quad \text{d'où} \quad a = c = -c = 0 \text{ et } b = d = -d = 0,$$

le seul vecteur commun à $\Sigma_p - \Sigma_{p-1}$ et $\Sigma_{p_1} - \Sigma_{p-1}$ serait donc $\{0\}$ contrairement à l'hypothèse. Soit, d'autre part, une base orthonormée (g_0, g'_0) de G_{p-1} ; le SETIM construit en posant $g'_0 = \sigma_p(g_0)$ sera un vecteur unitaire perpendiculaire à g_0 , donc g_0 ou $-g'_0$ et σ'_p sera sur σ_p , ou σ_{p_1} . Le SETIM construit est Σ_{p_1} ou Σ_{p_2} .

5° E est de dimension $2p$ et orienté.

a) Automorphisme direct de E . — Soit un automorphisme orthogonal σ de carré -1 sur E . Comme on l'a vu à la question 2°, c , dans une base convenable, σ est représenté par une matrice Ω . Toute base sur laquelle σ est représentée par une matrice Ω est de la forme

$$[x_1, x_2, \dots, x_p, \sigma(x_1), \dots, \sigma(x_p)];$$

si l'on permute les vecteurs x_k et x_k ainsi que $\sigma(x_k)$ et $\sigma(x_k)$ les bases initiale et finale ont la même orientation, puisque le nombre de permutations est pair : tout automorphisme orthogonal σ_p de carré -1 est direct.

b) Bases d'un automorphisme orthogonal σ de carré -1 de E représenté par la matrice Ω . — Soit B et B' deux telles bases

$$B: [x_1, \dots, x_p, \sigma(x_1), \dots, \sigma(x_p)] \quad \text{et} \quad B': [y_1, \dots, y_p, \sigma(y_1), \dots, \sigma(y_p)].$$

Soit τ l'automorphisme de passage défini par

$$\tau(x_k) = y_k, \quad \tau[\sigma(x_k)] = \sigma(y_k), \quad 1 \leq k \leq p.$$

τ est orthogonal, on a donc

$$\tau \circ \sigma(x_k) = \sigma(y_k) = \sigma \circ \tau(x_k), \quad \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau,$$

τ est direct, d'après la question 5°, a, par suite, les bases sont de même sens.

c) Base normale (z_1, \dots, z_p) du SETIM Σ et base orthonormée $\mathcal{R}(z_1), \dots, \mathcal{R}(z_p), \mathcal{J}(z_1), \dots, \mathcal{J}(z_p)$. — Soit deux bases normales (z_1, \dots, z_p) et (z'_1, \dots, z'_p) de Σ , considérons les bases de E définies par

$$[\mathcal{R}(z_1), \dots, \mathcal{R}(z_p), \mathcal{J}(z_1), \dots, \mathcal{J}(z_p)] \quad \text{et} \quad [\mathcal{R}(z'_1), \dots, \mathcal{R}(z'_p), \mathcal{J}(z'_1), \dots, \mathcal{J}(z'_p)].$$

Dans ces deux bases, l'automorphisme σ associé à Σ et à E a pour matrice Ω . Elles sont donc de même sens, qui est, par définition, le sens de Σ .

d) Automorphisme orthogonal h de E , dont le prolongement h' à $c(E)$ transforme Σ en Σ' deux SETIM donnés. — Étant donné les SETIM Σ et Σ' , considérons les bases normales $B(z_1, \dots, z_p)$ et $B'(z'_1, \dots, z'_p)$ de Σ et Σ' associées aux bases orthonormées U et U' de E définies par

$$U: [\mathcal{R}(z_1), \dots, \mathcal{R}(z_p), \mathcal{J}(z_1), \dots, \mathcal{J}(z_p)] \quad \text{et} \quad U': [\mathcal{R}(z'_1), \dots, \mathcal{R}(z'_p), \mathcal{J}(z'_1), \dots, \mathcal{J}(z'_p)].$$

Il existe un automorphisme h de E qui transforme $\mathcal{R}(z_k)$ en $\mathcal{R}(z'_k)$ et $\mathcal{J}(z_k)$ en $\mathcal{J}(z'_k)$ puisque U et U' sont des bases de E ; cet automorphisme est orthogonal (U et U' sont orthonormées); le prolongement h' de h à $c(E)$ par $h'(x + iy) = h(x) + ih(y)$ est un automorphisme de $c(E)$ qui transforme B en B' donc Σ en Σ' .

e) Sens de Σ et Σ' . — Par construction h est direct si, et seulement si, Σ et Σ' sont de même sens. Un automorphisme h direct transforme un SETIM en un SETIM de même sens et réciproquement. La réciproque montre qu'un automorphisme indirect transforme un SETIM en un autre de sens contraire.

6° E est de dimension $2p$ (non orienté).

a) Sous-espace propre du prolongement d'un automorphisme de carré -1 de E . — Le prolongement d'un automorphisme τ de carré -1 de E est un automorphisme τ' de carré -1 [représenté dans $c(E)$ par la même matrice que τ dans E]. Les valeurs propres λ vérifient $\tau(z) = \lambda z$, $\lambda^2 z = -z$, $\lambda^2 = -1$, $\lambda = \pm i$. Soit Σ un SETIM quelconque muni de l'automorphisme σ , soit σ un automorphisme orthogonal de carré -1 , τ admet Σ comme espace propre si

$$\begin{aligned} \tau[x + i\sigma(x)] &= i[x + i\sigma(x)] = -ix + \sigma(x), \\ \tau(x) + i\tau \circ \sigma(x) &= -\sigma(x) + ix = \sigma(x) - ix \implies \forall x, \quad \tau = \pm \sigma. \end{aligned}$$

Il y a deux automorphismes τ : $\tau_1 = \sigma$ et $\tau_2 = -\sigma$.

b) Endomorphisme $\varphi = f' + ig'$ de $c(E)$ associé à f et g .

a) $\text{Ker } \varphi$ est un SETIM. — Supposons les automorphismes f et g de E tels que $g^{-1} \circ f$ soit un automorphisme orthogonal de E de carré -1 . Posons $g^{-1} \circ f = \tau$, on a alors

$$f = g \circ \tau \quad \text{et} \quad f \circ \tau = g \circ (-1) = -g,$$

d'où il résulte (question II, 3°, c) que

$$\varphi \in \mathcal{L} \implies \mathcal{U}(\text{Ker } \varphi) = \mathbb{E}(\dim 2p) \implies \text{Ker } \varphi = \text{SETIM}.$$

Réciproquement, si $\text{Ker } \varphi$ est un SETIM, il existe τ unique de carré -1 , tel que

$$f = g \circ \tau, \quad -g = f \circ \tau \implies \tau = g^{-1} \circ f \implies g^{-1} \circ f \quad \text{est orthogonal de carré } -1.$$

β) $\varphi(E)$ est un SETIM.

$$\begin{aligned} \varphi(E) = \text{SETIM} &\iff \forall x \in E, \exists \tau \text{ orthogonal, avec } \tau^2 = -1, \quad f(x) + ig(x) = f(x) + i\tau \circ f(x) \\ &\iff g = \tau \circ f \iff g \circ f^{-1} = \tau, \quad \text{automorphisme orthogonal de carré } -1. \end{aligned}$$