

THÉORÈME D'APPROXIMATION EN UNE VARIABLE DE MERGELYAN

ÉNONCÉ

On désigne par \mathbf{R} le corps des nombres réels, par \mathbf{R}^+ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On rappelle que le support d'une application de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^q est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel la restriction de cette application est nulle. Le corps des nombres complexes est noté \mathbf{C} ; la distance de deux points z et z' de \mathbf{C} est le module de $z - z'$ noté $|z - z'|$. Dans un espace topologique, on désigne l'adhérence d'une partie X par \bar{X} .

Dans tout le texte on note $z = x + iy$. ($x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$).

I

1° Soit $t \mapsto \gamma_1(t)$ la fonction numérique définie sur \mathbf{R} par :

$$\gamma_1(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0, \quad \gamma_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{si } t > 0.$$

Montrer qu'elle est indéfiniment dérivable.

En déduire que la fonction γ définie dans le plan complexe par :

$$\gamma(z) = \gamma_1\left(\frac{1}{2} + |z|\right) \gamma_1\left(\frac{1}{2} - |z|\right),$$

dont le support est la boule fermée de centre zéro et de rayon $\frac{1}{2}$, est indéfiniment dérivable en tant qu'application de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} .

2° On note $\rho(z) = \frac{\gamma(z)}{a}$ avec $a = \iint_{\mathbf{R}^2} \gamma(z) dx dy$

et, pour $m \in \mathbf{R}^+$, $\rho_m(z) = m^2 \rho(mz)$.

Soit Ω un ouvert borné du plan complexe et Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω . On désigne par α un nombre strictement positif, par d la borne inférieure de $|z - u|$ pour z élément de Ω_1 et u élément du complémentaire de Ω dans \mathbb{C} , par $\Omega_{1,\alpha}$ la réunion des boules ouvertes de rayon αd et de centre dans Ω_1 , enfin par $\chi_{1,\alpha}$ la fonction caractéristique de $\Omega_{1,\alpha}$.

Montrer que la fonction :

$$\zeta \longmapsto \chi(\zeta) = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{1,\alpha}(z) \rho_{(\alpha d)^{-1}}(\zeta - z) dx dy$$

est indéfiniment dérivable en tant qu'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , à support compact dans Ω pour $\alpha < \frac{2}{3}$, et égale à 1 sur Ω_1 .

3° Soit g une fonction holomorphe dans Ω ; démontrer que, pour tout $z \in \Omega_1$, on a :

$$(1) \quad g(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} g(u) \frac{d\bar{u} du}{z - u} \quad \text{avec } u = v + iw \quad v \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$$

[on rappelle la notation $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial v} + i \frac{\partial \chi}{\partial w} \right)$].

On pourra appliquer la formule de Stokes dans l'ouvert défini par $|z - u| > r$, où r est un nombre strictement positif assez petit.

II

Soit Ω un ouvert, borné ou non, du plan complexe. On note $H^2(\Omega)$ l'espace vectoriel normé des fonctions f holomorphes dans Ω et de carré sommable dans Ω , c'est-à-dire telles que :

$$\|f\|_{\Omega} = \left(\iint_{\Omega} |f(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

soit fini.

1° Évaluer $\|f\|_{\Omega}^2$ à l'aide des coefficients du développement de Taylor à l'origine de la fonction f , dans le cas où Ω est une boucle de centre zéro et de rayon R .

2° Démontrer que $H^2(\mathbb{C})$ est réduit à 0.

Soit $z_0 \in \Omega$; on note par $\Omega - \{z_0\}$ l'ensemble des points de Ω distincts de z_0 . Montrer que toute fonction de $H^2(\Omega - \{z_0\})$ est la restriction à $\Omega - \{z_0\}$ d'une fonction de $H^2(\Omega)$.

3° Démontrer que si Ω est le demi-plan $y > 0$, alors $H^2(\Omega)$ est de dimension infinie.

ÉNONCÉ

4° On se propose de prouver que $H^2(\Omega)$ est un espace complet pour la norme $f \longmapsto \|f\|_{\Omega}$, donc qu'on peut lui appliquer les résultats de la théorie des espaces de Hilbert.

a. Soit Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω et δ un nombre réel strictement positif. On note par Ω_1^{δ} l'ensemble des points de Ω_1 dont la distance à la frontière de Ω_1 est supérieure ou égale à δ . Démontrer, en utilisant la représentation intégrale (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout couple (φ, ψ) d'éléments de $H^2(\Omega)$ on a une inégalité de la forme :

$$\sup_{z \in \Omega_1^{\delta}} |\varphi(z) - \psi(z)| \leq C \|\varphi - \psi\|_{\Omega}$$

où le nombre positif C est indépendant de φ et de ψ .

b. En déduire que, si (f_n) est une suite de Cauchy dans $H^2(\Omega)$, (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe f .

c. Démontrer que cette fonction f appartient à $H^2(\Omega)$ et qu'elle est limite de la suite (f_n) pour la norme de $H^2(\Omega)$.

III

Dans cette partie l'ouvert Ω est supposé borné. On se propose d'étudier sous quelles conditions les polynômes sont denses dans $H^2(\Omega)$.

1° Soit K un compact de la sphère de Riemann (c'est-à-dire du plan complexe compactifié par l'adjonction d'un point noté ∞ , une fonction définie dans un voisinage V de ∞ et holomorphe étant une fonction continue sur V , qui est holomorphe au sens habituel dans le complémentaire de ∞ dans V). On considère l'ensemble $\mathcal{H}(K)$ formé des couples (ω, f) où ω est un voisinage ouvert de K , et f une fonction holomorphe dans ω . On introduit dans $\mathcal{H}(K)$ la relation suivante :

$$(\omega, f) \mathcal{R} (\omega', f')$$

s'il existe ω'' voisinage ouvert de K inclus dans $\omega \cap \omega'$ tel que la restriction de f à ω'' soit égale à celle de f' à ω'' .

a. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. On notera par f^{\sim} , ou $(\omega, f)^{\sim}$, la classe d'équivalence de (ω, f) . Le quotient de $\mathcal{H}(K)$ par \mathcal{R} sera noté $H(K)$.

b. Soit (ω_1, f_1) un élément de f_1^{\sim} , (ω_2, f_2) un élément de f_2^{\sim} .

Montrer que, pour tout λ et tout μ appartenant à \mathbb{C} , on peut définir $\lambda f_1^{\sim} + \mu f_2^{\sim}$ en posant :

$$\lambda f_1^{\sim} + \mu f_2^{\sim} = (\omega_1 \cap \omega_2, \lambda f_1 + \mu f_2)^{\sim},$$

$\lambda f_1 + \mu f_2$ étant définie dans $\omega_1 \cap \omega_2$; $H(K)$ est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{C} .

Démontrer aussi que la valeur de f^\sim est définie en tout point h de K par $f^\sim(h) = f(h)$ si (ω, f) est un élément de f^\sim .

2° Dans cette question K est le complémentaire de Ω dans la sphère de Riemann. Soit f^\sim un élément de $H(K)$ et (ω, f) un élément de f^\sim . On considère un ouvert Ω_1 , voisinage du complémentaire de ω , et relativement compact dans Ω .

Soit χ une fonction indéfiniment dérivable (en tant qu'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}), égale à 1 sur Ω_1 , et à support compact dans Ω . Soit g une fonction holomorphe dans Ω . On pose :

$$F(g) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(z) g(z) \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} dx dy.$$

Démontrer que le nombre $F(g)$ ne dépend pas du choix de la fonction χ ; en déduire que $F(g)$ ne dépend pas du choix de l'élément (ω, f) de f^\sim .

Vérifier que l'application $g \mapsto F(g)$, restreinte à $H^2(\Omega)$, est une forme linéaire continue.

3° Calculer $F(g)$ pour (ω, f) défini comme suit :

ω est le complémentaire de z dans la sphère de Riemann et f est la fonction $s \mapsto \frac{1}{z-s}$. ($s \in \omega$).

En conclure que l'ensemble des formes linéaires F, f^\sim parcourant $H(K)$, est dense dans le dual de $H^2(\Omega)$.

4° Soit l une forme linéaire continue sur $H^2(\Omega)$ et soit u un élément du complémentaire Π de $\bar{\Omega}$. On considère la fonction Φ_u définie dans Ω par $z \mapsto \frac{1}{z-u}$, et qui appartient à $H^2(\Omega)$. On pose $\mathcal{F}_l(u) = l(\Phi_u)$. Démontrer que la fonction $u \mapsto \mathcal{F}_l(u)$ est holomorphe dans l'ouvert Π .

5° On désigne par $H_0^2(\Omega)$ le sous-espace fermé de $H^2(\Omega)$ engendré par les restrictions à Ω des fonctions holomorphes dans les voisinages ouverts de $\bar{\Omega}$. Soit l_0 une forme linéaire continue sur $H_0^2(\Omega)$. Démontrer que $\mathcal{F}_{l_0} = 0$ entraîne $l_0 = 0$.

On dit que Ω est étoilé par rapport à l'origine si, pour tout $z \in \Omega$, le segment $[0, z]$ est dans Ω .

Démontrer que si Ω est étoilé par rapport à l'origine, et si de plus il est l'intérieur de son adhérence, on a :

$$H_0^2(\Omega) = H^2(\Omega).$$

[Dans ce but on pourra montrer que, si f est un élément de $H^2(\Omega)$, et si on pose $f_\nu(z) = f(\nu z)$, on a :

$$f_\nu \in H_0^2(\Omega) \quad \text{si } \nu < 1, \quad \text{puis } f = \lim_{\nu \rightarrow 1} f_\nu]$$

6° Déterminer les coefficients du développement de \mathcal{F}_l en série de puissances de $\frac{1}{\nu}$ au voisinage de ∞ .

7° Si Π n'est pas connexe, démontrer qu'il existe une forme linéaire continue, associée à un élément f^\sim de $H(K)$, s'annulant sur les polyèdres et non identiquement nulle.

En déduire que les polyèdres sont denses dans $H_0^2(\Omega)$ si et seulement si Π est connexe, puis, qu'ils sont denses dans $H^2(\Omega)$ lorsque Ω est étoilé par rapport à l'origine et égal à l'intérieur de son adhérence.

IV

A l'aide des résultats des trois premières questions, on se propose d'étudier une propriété d'approximation dans l'espace $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω , borné ou non, de \mathbb{C} .

Soit (Ω_j) une suite d'ouverts relativement compacts de Ω , telle que tout compact de Ω soit inclus dans l'un des Ω_j ($j = 1, 2, \dots$).

$$1^\circ \text{ Soit } P_j(f) = \left(\iint_{\Omega_j} |f(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une suite (f_n) de $H(\Omega)$ sera dite convergente vers un élément f de $H(\Omega)$ si, pour tout j , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_j(f_n - f) = 0.$$

Montrer que, étant donnée une série $\sum \alpha_j$ de termes tous strictement positifs, telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$, la fonction :

$$(g, h) \mapsto d(g, h) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \inf P_j(h - g), 1$$

est une distance sur $H(\Omega)$, et que les suites convergentes au sens précédent sont les suites convergentes pour la distance d .

2° Démontrer que la topologie introduite dans la question IV, 1°, est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω .

3° Soit L un compact de Ω . On désigne par L^* la réunion de L et des composantes connexes relativement compactes de son complémentaire par rapport à Ω .

Démontrer que L^* est un compact de Ω .

4° Appliquant IV, 3°, aux Ω_j^* , déduire des résultats de la partie III que, si le complémentaire de Ω n'a pas de composante connexe compacte, les polynômes sont denses dans $H(\Omega)$.

CORRIGÉ

Ce problème de 1968 est une démonstration du théorème de Mergelyan sur la densité des polynômes dans l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de \mathbb{C} .

I.

► 1° γ_1 est C^∞ sur $\{x < 0\}$ et sur $\{x > 0\}$. Il suffit de l'étudier en 0. La dérivée à droite en 0 est la limite :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} e^{-1/t^2} = 0$$

qui est égal à la dérivée à gauche en 0. γ est donc dérivable et sa dérivée $D\gamma_1 = 0$ si $t \leq 0$, $D\gamma_1 = \frac{2}{3} \gamma_1(t)$ si $t > 0$. Par récurrence, on montre que $D^n \gamma_1$ est dérivable :

$$D^n \gamma_1 = P_n \left(\frac{1}{t}\right) \gamma_1 \quad \text{si } t > 0, \quad \text{où } P_n \text{ est un polynôme,}$$

$$D^n \gamma_1 = 0 \quad \text{si } t \leq 0. \text{ D'où la dérivée à droite en } 0 :$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} P_n \left(\frac{1}{t}\right) \gamma_1 = 0$$

$$\text{et } D^{n+1} \gamma_1 = P_{n+1} \left(\frac{1}{t}\right) \gamma_1 \quad \text{si } t > 0, \quad D^{n+1} \gamma_1 = 0 \quad \text{si } t \leq 0.$$

$$\text{Si } \gamma(z) = \gamma_1 \left(\frac{1}{z} + |z|\right) \gamma_1 \left(\frac{1}{z} - |z|\right) \text{ et si } |z| \geq \frac{1}{2},$$

$$\gamma_1 \left(\frac{1}{z} - |z|\right) = 0 \text{ et } \gamma(z) = 0. \text{ Si } |z| < \frac{1}{2}, \gamma(z) = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\frac{1}{4} - |z|} - \frac{1}{2} \right)^2 \right\}$$

ce qui prouve que $z \mapsto \gamma(z)$ est C^∞ à l'origine comme composée de fonctions C^∞ en 0 (notez que $z \mapsto |z|$ n'est pas C^∞ en 0 !).

En dehors, de 0, $z \mapsto |z|$ est C^∞ et γ est C^∞ pour la même raison.

► 2° X est nulle si $|\zeta - z| \geq \frac{\rho d}{2}$ avec $z \in \Omega_1, \rho d$ i.e. si ζ est dans le complémentaire de la réunion des boules de centre un point de Ω_1 de