Agrégation interne 1995 de Mathématiques première composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag35] v1.00

Solution de la première composition de l'agrégation interne 1995

$\boxed{\text{I.1.i}}$ $A+A \;\; \leq \;\; A \; + \; A$ est triviale par l'inégalité triangulaire appliquée à chacun des coefficients. Posons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$, et $A \quad B = (d_{ij})$. On a

$$c_{ij} \;\; = \left| \;\; {}_{k=1}^{n} \; a_{ik}b_{kj} \right| \leq \;\; {}_{k=1}^{n} \;\; a_{ik} \;\; b_{kj} \;\; = d_{ij}$$

de sorte que $AB \; \leq \; A \quad B$.

$\boxed{\text{I.1.ii}}$ En appliquant I.1.i avec $B = x$, on trouve $Ax \;\; \leq \;\; A \quad x$. Si $A > 0$, $x \geq 0$ et $x = 0$, les coefficients de Ax sont $y_i = {}_{k=1}^{n} \; a_{ik}x_k$, et il existe $k_0 \quad \mathbb{N}_n$ tel que $x_{k_0} > 0$. Comme $a_{ik} > 0$ et $x_k \geq 0$ pour tous k, on déduit $y_i > 0$, d'où $Ax > 0$.

$\boxed{\text{I.1.iii}}$ Montrons la contraposée : si $A = 0$, il existe $i \;\; j$ tels que $a_{ij} = 0$. Si $Ax = y$,

$$y_i = \;\; {}_{k=1}^{n} \; a_{ik}x_k \geq a_{ij}x_j > 0$$

ce qui entraîne $Ax = 0$.

$\boxed{\text{I.2.i}}$ Il s'agit du cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski. On peut le montrer directement en élevant au carré :

$$\begin{aligned}
\left|z + z\right| \quad &= \quad z \; + \left|z\right| \qquad 2\,\mathrm{Re}\, z\overline{z} \;= 2 \;\; z \;\; \left|z\right| \qquad \mathrm{Re}\, z\overline{z} \;= \left|z\overline{z}\right| \\
& z\overline{z} \quad \mathbb{R}_+ \\
& \overline{z}z \;= r \quad \mathbb{R}_+ \\
& z \;= \frac{r}{z^{\;2}}z \qquad \alpha \quad \mathbb{R}_+ \quad z \;= \alpha z
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{I.2.ii}}$ Pour n complexes z_k, les inégalités triangulaires

$$z_1 + \quad + z_n \;\leq\; z_1 + z_k \;+\; z_1 \;+ \quad +\; z_k \;+ \quad +\; z_n \;\leq\; z_1 \;+ \quad +\; z_n$$

entraînent, si les extrémités de ces inégalités sont identiques

$$z_1 + z_k \;\; = \;\; z_1 \;\; + \;\; z_k$$

et d'après ce que l'on vient de voir, $z_k = \alpha_k z_1$ avec $\alpha_k \quad \mathbb{R}_+$. Cela implique $z_k = \;\; z_k \;\; e^{i\theta}$ où $\theta = \arg z_1$, et pout tout $k \quad \mathbb{N}_n$.

---

[0] [ag35] v1.00

$\boxed{\text{I.2.iii}}$

$$|Ax| = A|x| \Rightarrow \forall i \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}|x_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}x_k|$$

Posons $z_k = a_{ik}x_k$, on trouve $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et la question précédente montre l'existence d'un réel θ_i tel que pout tout k, $z_k = |z_k| e^{i\theta_i}$. En fait θ_i est indépendant de i puisque c'est l'argument de $z_k = a_{ik}x_k$ et $a_{ik} > 0$. Donc $a_{ik}x_k = |a_{ik}x_k| e^{i\theta}$ et a_{ik} étant strictement positif,

$$\forall k \in \mathbb{N}_n \quad x_k = |x_k| e^{i\theta}$$

ce qui traduit $x = |x| e^{i\theta}$.

$\boxed{\text{I.3}}$ Posons $F = (f_{ij})$ et $A = |F| = (|f_{ij}|)$. On a

$$|Ax| = |Fx| \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n \quad \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|\, x_j = \left|\sum_{j=1}^{n} f_{ij}x_j\right| \Rightarrow \forall i \quad \sum_{j=1}^{n} (|f_{ij}| - f_{ij})\, x_j = 0$$

Posons $f_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$ où $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2} - a_{ij}\right) x_j - i\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right) = 0$$

entraîne

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2} - a_{ij}\right) x_j = 0$$

où $\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2} - a_{ij} \geq 0$ et $x_j > 0$ pour tous i, j. On déduit $\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2} = a_{ij}$ soit $b_{ij} = 0$ et $|a_{ij}| = a_{ij}$ pour tout i, j. Finalement $F = (a_{ij})$ est réelle positive et $A = |F| = F$.

$\boxed{\text{I.4.i}}$ $\|A\|$ est bien définie et appartient à $\mathbb{R}$ car $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$ montre que les ensembles $\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\}$ et $\left\{\|A(y)\| \mid y \in S^{n-1}\right\}$ où $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{C}^n \mid \|y\| = 1\}$ est la sphère unité, sont égaux. Comme S^{n-1} est un compact de $\mathbb{C}^n$ (fermé borné) et comme l'application $y \mapsto \|A(y)\|$ est continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, elle atteint son maximum en un point z de S^{n-1}, autrement dit

$$\exists z \in S^{n-1} \quad \|A(z)\| = \max_{y \in S^{n-1}} \|A(y)\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

On constate que si $x \neq 0$,

$$\|Ax\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\| \leq \|A\|\,\|x\|$$

L'inégalité étant triviale pour $x = 0$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$$

On vérifie ensuite que satisfait les trois axiome d'une norme :

a) $A \quad = 0 \quad x \quad \mathbb{C}^n \quad Ax \ = 0 \quad x \quad \mathbb{C}^n \quad Ax = 0 \quad A = 0$

b) Pour tout $\lambda \quad \mathbb{C}$,

$$\lambda A \quad = \max_{x=0} \frac{\lambda Ax}{x} = \lambda \ \ A$$

c) Pour tous $A \ B \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et pour tout $x = 0$

$$\frac{Ax + Bx}{x} \leq \frac{Ax}{x} + \frac{Bx}{x} \leq \ A \quad + \ B$$

et en passant à la borne supérieure dans cette inégalité pour $x \quad \mathbb{C}^n \quad 0$, $A + B \quad \leq \ A \quad + \ B$.

$\boxed{\text{I.4.ii}}$ $A \quad = \max_{x \ =1} \ Ax \ = \max_{x \ =1} \left(\max_i \left| \ {}_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right)$. Pour tout $x \quad S^{n-1}$ et tout i,

$$\left| \ {}_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \ {}_{j=1}^{n} \ a_{ij} \quad \text{donc} \quad A \quad \leq \max_i \ {}_{j=1}^{n} \ a_{ij}$$

D'autre part, si $i_0 \quad \mathbb{N}_n$ désigne l'indice tel que

$$\max_i \ {}_{j=1}^{n} \ a_{ij} \quad = \ {}_{j=1}^{n} \ a_{i_0 j}$$

posons

$$x = {}^t\left(\frac{\overline{a}_{i_0 1}}{a_{i_0 1}} \qquad \frac{\overline{a}_{i_0 n}}{a_{i_0 n}} \right) \quad S^{n-1}$$

en prenant comme convention de remplacer $\frac{\overline{a}_{i_0 j}}{a_{i_0 j}}$ par 0 si $a_{i_0 j} = 0$. Alors

$$A \quad \geq \ Ax \ = \max_i \left| \ {}_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \geq \left| \ {}_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j \right| = \ {}_{j=1}^{n} \ a_{i_0 j} \ = \max_i \ {}_{j=1}^{n} \ a_{ij}$$

et l'on peut conclure à l'égalité demandée.

$\boxed{\text{I.4.iii}}$ On utilise deux fois la propriété

$$x \quad \mathbb{C}^n \quad A \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad Ax \ \leq \ A \quad x$$

qui provient directement, on l'a vu, de la définition de la norme opérateur . On trouve

$$x \quad \mathbb{C}^n \quad ABx \ \leq \ A \quad Bx \ \leq \ A \quad B \quad x$$

$$x \quad \mathbb{C}^n \quad \frac{ABx}{x} \leq \ A \quad B$$

et en passant au sup dans cette inégalité, $AB \quad \leq \; A \quad\; B \quad .$

$\boxed{\text{II.1.i}}$ Notons $Spec\,(A)$ le spectre de l'opérateur A. C'est par définition l'ensemble des valeurs propres de A. Si $\lambda \quad Spec\,(A)$, il existe un vecteur propre non nul $x \quad \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Notons $[c_1 \qquad c_2]$ lamatrice de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont les vecteurs $c_1 \qquad c_2$ de $\mathbb{C}^n$. Si $X = [x \qquad x]$,

$$AX = A\,[x \qquad x] = [Ax \qquad Ax] = [\lambda x \qquad \lambda x] = \lambda X$$

$\boxed{\text{II.1.ii}}$ Si $\lambda \quad Spec\,(A)$, avec les notation du i),

$$AX \;\; = \lambda \;\; X \; \leq \; A \quad\; X \qquad \lambda \; \leq \; A$$

Comme $\rho\,(A) = \max\limits_{\lambda \quad Spec(A)} \; \lambda$, on déduit $\rho\,(A) \leq \; A \;$.

$\boxed{\text{II.2.i}}$ Les polynômes caractéristiques de A et de $S^{-1}AS$ sont les mêmes puisque

$$P_A\,(X) = \det\,(XI - A) = \det\left[S^{-1}\,(XI - A)\,S\right] = \det\left(XI - S^{-1}AS\right) = P_{S^{-1}AS}\,(X)$$

de sorte que $Spec\,(A) = Spec\left(S^{-1}AS\right)$ et $\rho\,(A) = \rho\left(S^{-1}AS\right)$.

$\boxed{\text{II.2.ii}}$ • A est trigonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$), donc il existe une matrice inversible S telle que $T = S^{-1}AS$ soit triangulaire supérieure :

$$T = S^{-1}AS = \begin{array}{cccc} t_1 & \# & \# & \# \\ & \ddots & \# & \# \\ O & & \ddots & \# \\ & & & t_n \end{array}$$

On a

$$T^k = S^{-1}A^kS = \begin{array}{cccc} t_1^k & \# & \# & \# \\ & \ddots & \# & \# \\ O & & \ddots & \# \\ & & & t_n^k \end{array}$$

de sorte que d'après i), $\rho\,(T) = \rho\,(A)$ et $\rho\left(T^k\right) = \rho\left(A^k\right)$. Les valeurs propres des matrices triangulaires T et T^k sont situées sur la diagonale principale, donc

$$Spec\,(T) = \;\; t_1 \qquad t_n \quad \text{et } Spec\left(T^k\right) = \;\; t_1^k \qquad t_n^k$$

et

$$\rho\left(T^k\right) = \max_{i \quad \mathbb{N}_n} \left|t_i^k\right| = \left(\max_{i \quad \mathbb{N}_n} \; t_i \;\right)^k = \rho\,(T)^k$$

On obtient bien $\boxed{\rho\left(A^k\right) = \rho\,(A)^k}$.

• D'après II.1.ii $\rho\left(A\right)^{k}=\rho\left(A^{k}\right)\leq\left\|A^{k}\right\|$, donc $\boxed{\rho\left(A\right)\leq\left\|A^{k}\right\|^{\frac{1}{k}}}$.

$\boxed{\text{II.2.iii}}$ On vérifie sans peine que N est une norme. Elle est sous-multiplicative car l'est. En effet

$$N\left(AB\right)=\left\|S^{-1}ABS\right\|=\left\|S^{-1}ASS^{-1}BS\right\|\leq\left\|S^{-1}AS\right\|\ \ \left\|S^{-1}BS\right\|=N\left(A\right)\ N\left(B\right)$$

$\boxed{\text{II.3.i}}$ Posons $\Delta^{-1}T\Delta=\left(c_{ij}\right)$. On a

$$c_{ij}=\ _{k}\left(\ _{l}\ \frac{1}{d_{il}}t_{lk}\quad d_{kj}\right.$$

où $d_{ii}=d^{i-1}$ et $d_{ij}=\frac{1}{d_{ij}}=0$ si $i=j$. Soit

$$c_{ij}=\frac{1}{d_{ii}}t_{ij}d_{jj}=t_{ij}d^{j-i}$$

$\boxed{\text{II.3.ii}}$ Soit S une matrice inversible S telle que $T=S^{-1}AS$. Supposons que T soit triangulaire supérieure. Alors $t_{ij}=0$ pour tout $i>j$. D'après II.2 et I.4, $N\left(X\right)=\left\|\left(S\Delta\right)^{-1}XS\Delta\right\|$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ et

$$N\left(A\right)=\ \left(c_{ij}\right)\qquad=\max_{i\ \ \mathbb{N}_{n}}\ \ _{j=1}^{n}\ \ c_{ij}\qquad=\max_{i\ \ \mathbb{N}_{n}}\ \ _{j=i}^{n}\ \left|t_{ij}d^{j-i}\right|$$

En prenant d dans $]0\ \ 1[$, et en posant $\tau=\max_{i\ j\ \ \mathbb{N}_{n}}\left(\ t_{ij}\ \right)$, on trouve

$$N\left(A\right)=\max_{i\ \ \mathbb{N}_{n}}\ \ _{j=i}^{n}\ \ t_{ij}\ \ d^{j-i}$$

avec

$$_{j=i}^{n}\ \ t_{ij}\ \ d^{j-i}=\ t_{ii}\ +\ \ _{j=i+1}^{n}\ \ t_{ij}\ \ d^{j-i}\leq\rho\left(A\right)+\tau\ \ _{j=i+1}^{+}\ \ d^{j-i}=\rho\left(A\right)+\tau\frac{d}{1-d}$$

Comme $\lim_{d\ \ 0}\tau\frac{d}{1-d}=0$, si $\ >0$ est donné à l'avance, il existe d tel que $\tau\frac{d}{1-d}\leq$ et l'on obtient bien

$$N\left(A\right)\leq\rho\left(A\right)+$$

$\boxed{\text{II.4.i}}$ La question précédente et la sous-multiplicativité de N permettent d'écrire

$$N\left(A^{k}\right)\leq N\left(A\right)^{k}\leq\left(\rho\left(A\right)+\ \ \right)^{k}$$

Comme $\rho\left(A\right)<1$, il est possible de choisir un strictement positif tel que $\rho\left(A\right)+\ \ <1$, de sorte que $\lim_{k\ \ 0}\left(\rho\left(A\right)+\ \ \right)^{k}=0$ et que l'inégalité ci-dessus implique $\lim_{k\ \ 0}N\left(A^{k}\right)=0$. La suite $\left(A^{k}\right)_{k\ \ \mathbb{N}}$ tend vers 0 pour la norme N, donc aussi pour toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (en effet, toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes).

$\boxed{\text{II.4.ii}}$ Montrons comment trouver une telle matrice à coup sûr. Imposer $\rho(A) = 1$ revient à dire que la valeur propre de A de module maximum est de module 1. Essayons avec 1 comme valeur propre. La matrice A est trigonalisable, donc quitte à prendre une matrice semblable, on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad \beta \ \le 1$$

On vérifie par récurrence que pour tout k

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & \alpha\left(1 + \beta + \quad + \beta^{k-1}\right) \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & \alpha k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sera pas bornée (pour la norme du sup des coefficients de la matrice, donc pour toute norme...).

$\boxed{\text{II.4.iii}}$ On a

$$\rho(A\ ) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \ } < 1$$

de sorte que III.4.i entraîne $\lim\limits_{k \quad 0} A^k = 0$. Il existera $K \quad \mathbb{R}_+^*$ dépendant de tel que si $k \ge K$

$$\left\|A^k\right\| \le 1 \qquad \frac{\left\|A^k\right\|}{(\rho(A) + \ )^k} \le 1 \qquad \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \le \rho(A) +$$

Si l'on se réfère à II.2.i, on conclut :

$$k \ge K \qquad \rho(A) \le \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \le \rho(A) +$$

pour tout > 0. C'est donc que $\lim\limits_{k \quad 0} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

$\boxed{\text{II.5.i}}$ On utilise le

Lemme : Si $A \ B \ C \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $0 \le C$ et $A \le B$, alors $AC \le BC$.

Preuve : Notons $A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad C = (c_{ij})$. Tous les c_{ij} sont des réels positifs, donc le lemme provient de

$$i \ j \quad a_{ij} \le b_{ij} \qquad \sum_k a_{ik}c_{kj} \le \sum_k b_{ik}c_{kj} \ \blacksquare$$

On vérifie ensuite que

$$A \ \le B \qquad \left|A^k\right| \le \ A^{\ k} \le B^k$$

par récurrence sur k. C'est trivial pour $k = 1$. Au rang $k > 1$, grâce à I.1 et au lemme :

$$\begin{aligned} \left|A^k\right| = \left|A^{k-1}A\right| \leq \left|A^{k-1}\right| \ A \ \leq \ A^{\ k-1} \ A \ = \ A^{\ k} \\ A^{\ k} = \ A^{\ k-1} \ A \ \leq B^{k-1} \ A \ \leq B^k \end{aligned}$$

$\boxed{\text{II.5.ii}}$ Comme $\rho(A) = \lim_{k \quad 0} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$, on aura prouvé que $\rho(A) \leq \rho(\ A\ ) \leq \rho(B)$ si l'on montre que

$$\left\|A^k\right\| \quad \leq \left\| \ A^{\ k}\right\| \quad \leq \left\|B^k\right\| \qquad\qquad (*)$$

La formule $\ A \quad = \sup_i \left(\sum_j \ a_{ij} \right.$ montre que $\left\|A^k\right\| \quad = \left\|\left|A^k\right|\right\|$, et l'on a $\left|A^k\right| \leq \ A^{\ k} \leq B^k$. En notant $\left|A^k\right| = (u_{ij})$, $\ A^{\ k} = (v_{ij})$ $\ B^k = (w_{ij})$, on aura $u_{ij} \leq v_{ij} \leq w_{ij}$ soit

$$\left\|A^k\right\| \quad = \sup_i \quad \sum_j \ u_{ij} \quad \leq \left\| \ A^{\ k}\right\| \quad = \sup_i \quad \sum_j \ v_{ij} \quad \leq \left\|B^k\right\| \quad = \sup_i \quad \sum_j \ w_{ij}$$

ie $(*)$.

$\boxed{\text{III.1}}$ On a

$$A \quad = \sup_i \quad \sum_j \ a_{ij} \quad = \sup_i \quad \sum_j \ a_{ij} \quad = s$$

Si x désigne le vecteur $x = {}^t(1 \qquad 1)$, on constate

$$Ax = {}^t \quad \sum_j a_{1j} \qquad \sum_j a_{nj} \quad = {}^t (s \qquad s) = sx$$

de sorte que s soit une valeur propre de A. Enfin, si λ est une autre valeur propre de A, et si x est un vecteur propre (non nul) associé, $Ax = \lambda x$ entraîne

$$i \qquad \sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

Soit $\ x_{i_0} \ = \max_i \ x_i \ > 0$. On a

$$\left| \sum_j a_{i_0 j} x_j \right| = \ \lambda x_{i_0} \ \leq \quad \sum_j \ a_{i_0 j} \ x_{i_0} \ = s \ x_{i_0} \qquad \lambda \ \leq s$$

et $\rho(A) = s$.

$\boxed{\text{III.2.i}}$ Tout revient à trouver des réels $t_{ij} \quad [0 \ 1]$ tels que, en posant $b_{ij} = t_{ij} a_{ij}$, l'on ait

$$i \qquad \sum_j t_{ij} a_{ij} = \quad \sum_j a_{i_0 j}$$

où $\ _j \, a_{i_0 j} = \inf_i \Big(\ _j \, a_{ij}$. Pour tout j, supposons $t_{ij} = t_i$. La condition devient

$$i \qquad t_i = \frac{\ _j \, a_{i_0 j}}{\ _j \, a_{ij}} \qquad (*)$$

(ici, on suppose $\ _j \, a_{ij} = 0$ pour tout i, sinon $\alpha = 0$ et $B = 0$ convient trivialement). t_i défini par $(*)$ entraîne bien $t_i \quad [0 \ 1]$ et la matrice $B = (t_i a_{ij})$ satisfait $O \leq B \leq A$ par construction.

$\boxed{\text{III.2.ii}}$ D'après III.2.i $\rho(B) = \alpha$, et d'après II.5 $\ B \ \leq \ A$ entraîne $\rho(B) \leq \rho(A)$, ie $\alpha \leq \rho(A)$. L'autre inégalité provient de $\rho(A) \leq \ A \quad = \beta$ prouvé en II.1.

$\boxed{\text{III.3}}$ Posons

$$D_x = (d_{ij}) \quad A = (a_{ij}) \quad D_x^{-1} = \left(d_{ij}^{-1}\right)$$

avec la convention $d_{ij}^{-1} = 0$ dès que $d_{ij} = 0$. On a bien sûr $d_{ij} = x_i \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$, 0 sinon). En notant $D_x^{-1} A D_x = (s_{ij})$,

$$s_{ij} = \ _k \, d_{ik}^{-1} \Big(\ _l \, a_{kl} d_{lj} \quad = \frac{x_j}{x_i} a_{ij}$$

De $\rho(A) = \rho\left(D_x^{-1} A D_x\right)$ et de III.2.ii on déduit

$$\inf_i \quad _j \, \frac{x_j}{x_i} a_{ij} \quad \leq \rho(A) \leq \sup_i \quad _j \, \frac{x_j}{x_i} a_{ij}$$

soit

$$\inf_i \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_i \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

$\boxed{\text{III.4.i}}$ La formule du III.3 appliquée en x tel que $Ax = rx$ donne

$$r = \inf_i \frac{r x_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_i \frac{r x_i}{x_i} = r \qquad \rho(A) = r$$

$\boxed{\text{III.4.ii}}$ Les polynômes caractéristiques de ${}^tA$ et A sont les mêmes car

$$P_A(X) = \det(XI - A) = \det {}^t(XI - A) = \det\left(XI - {}^tA\right) = P_{{}^tA}(X)$$

donc les plus grandes valeurs absolues de valeurs propres aussi et $\rho\left({}^tA\right) = \rho(A)$. Si ${}^txA = r\,{}^tx$, alors en transposant ${}^tAx = rx$ et $\rho\left({}^tA\right) = r$ d'après le i.

$\boxed{\text{III.5.i}}$ Les deux implications proviennent directement de III.3. Montrons seulement la première :

$$\alpha x \leq Ax \qquad i \quad \alpha x_i \leq (Ax)_i \qquad \alpha \leq \inf_i \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A)$$

$\boxed{\text{III.5.ii}}$ $\alpha\, {}^t x \leq {}^t x A$ équivaut à $\alpha x \leq {}^t A x$ et entraîne $\alpha \leq \rho\left({}^t A\right) = \rho(A)$ d'après III.5.i et III.4.

$\boxed{\text{IV.1}}$ Compte tenu de III.2,

$$r = \rho(A) \geq \alpha = \inf_i \quad a_{ij} \quad > 0$$
$$j$$

la dernière inégalité étant assurée puisque $A > 0$.

$\boxed{\text{IV.2.i}}$

- $(Ay)_i = \quad a_{ij} y_j$ où $a_{ij} \quad \mathbb{R}_+^*$, $y_j \quad \mathbb{R}_+$ et $y_{j_0} \quad \mathbb{R}_+^*$ pour un certain indice j_0, donc $(Ay)_i > 0$.
j
C'est vrai pour tout i, donc $v = Ay > 0$.
- Si $rv < Av$, III.5 entraîne alors $r \leq \rho(A) = r$, absurde.

$\boxed{\text{IV.2.ii}}$ On sait que $z = Ay - ry \geq 0$. Si $z = 0$, $Az > 0$ d'après I.1.ii donc

$$A(Ay - ry) = A^2 y - rAy = Av - rv > 0$$

et c'est absurde d'après la question précédente. Donc $z = 0$.

$\boxed{\text{IV.3.i}}$ • Montrons d'abord que $r \ x \ \leq A \ x$. De $Ax = \lambda x$, on tire

$$i \quad \lambda x_i = \quad a_{ij} x_j \qquad r \ x_i \ \leq \quad a_{ij} \ x_j \qquad (r \ x \ )_i \leq (A \ x \ )_i \qquad r \ x \ \leq A \ x$$
$$j \qquad\qquad\qquad j$$

En utilisant la question précédente, on trouve $A \ x \ = r \ x$.

- Si l'on n'avait pas $x \ > 0$, il existerait un indice i tel que $x_i = 0$ et

$$a_{ij} \ x_j \ = r \ x_i \ = 0$$
$$j$$

entraînerait $x_j = 0$ pour tout j, ie $x = 0$, ce qui est absurde.

$\boxed{\text{IV.3.ii}}$ On applique I.2.iii sachant que

$$A \ x \ = r \ x \ = \ \lambda x \ = \ Ax$$

$\boxed{\text{IV.4.i}}$ $A \ x \ = r \ x$ avec $x \ > 0$ prouve que r est valeur propre de A. Si λ est une valeur propre de A de module r, et si x est un vecteur propre associé à λ, d'après IV.3 :

$$A \ x \ = r \ x \qquad \text{et} \qquad x = e^{i\theta} \ x$$

d'où

$$A\left(e^{-i\theta} x\right) = r\left(e^{-i\theta} x\right) \qquad Ax = rx \qquad \lambda = r$$

$\boxed{\text{IV.4.ii}}$ Si $\dim Ker\,(rI - A) \geq 2$, soient x et y deux vecteurs appartenant à $Ker\,(rI - A)$ et linéairement indépendants. Si $k \quad \mathbb{C}$, alors $x + ky \quad Ker\,(rI - A)$ et IV.3 entraîne

$$\begin{cases} A\,(y) = ry \qquad y\ > 0 \\ A\,(x + ky) = r\,(x + ky) \qquad x + ky\ > 0 \end{cases}$$

Il suffit de choisir

$$k = -\frac{x_1}{y_1}$$

pour obtenir $(\ x + ky\ )_1 = 0$ en contradiction avec $\ x + ky\ > 0$.

$\boxed{\text{IV.5}}$ Soit E l'ensemble des vecteurs vérifiant

$$w > 0 \qquad {}^t wA = r\,{}^t w \qquad {}^t wv = 1$$

Si $w \quad E$, ${}^t Aw = r\,w$ de sorte que $w \quad Ker\left(rI - {}^t A\right)$. Les deux questions précédentes appliquées à ${}^t A$ montrent que $\dim Ker\left(rI - {}^t A\right) = 1$ et que $Ker\left(rI - {}^t A\right)$ contient un vecteur $w_0 > 0$ (on remarquera que $r = \rho\,(A) = \rho\left({}^t A\right)$). Ainsi, il existe $k \quad \mathbb{C}$ tel que $w = kw_0$, et la condition ${}^t wv = 1$ détermine parfaitement k :

$$k = \frac{1}{{}^t w_0 v}$$

La réciproque est immédiate.

$\boxed{\text{V.A.1.i}}$ On a

$$L = v\,{}^t w = \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \quad \left(\ w_1 \qquad\quad w_n\ \right) = \left[\ w_1 v \qquad\quad w_n v\ \right]$$

où $\left[\ w_1 v \qquad\quad w_n v\ \right]$ désigne la matrice dont les colonnes sont les $w_i v$. Par hypothèse, $v > 0$ et $w > 0$ de sorte que $w_i v > 0$ pour tout i, et donc $L > 0$.

Montrons l'indépendance de L vis à vis de v. Si $v\ $ est un autre vecteur de $Ker\ (rI_n - A)$ et tel que $v\ > 0$, posons $v\ = kv$ où $k \quad \mathbb{R}_+^*$. Si $w\ = \frac{1}{k}w$, on vérifie sans peine que

$$w\ > 0 \qquad {}^t w\ A = r\,{}^t w \qquad {}^t w\ v = 1$$

soit $L = v\,{}^t w = v\ {}^t w\ $.

$\boxed{\text{V.A.1.ii}}$ La droite $\mathbb{C}v$ n'est pas incluse dans l'hyperplan H (puisque ${}^t wv = 1$) donc $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}v \oplus H$. De $Lv = v^t wv = v$ et

$$x \quad H \qquad Lx = v^t wx = v0 = 0$$

on déduit que L est la projection sur $\mathbb{C}v$ parallèlement à H.

$\boxed{\text{V.A.2.i}}$ • Si $x \quad H$,

$${}^t wAx = r^t wx = r0 = 0 \qquad Ax \quad H$$

et H est stable par A.

• Supposons que $x \in H \setminus \{0\}$ vérifie $Ax = \mu x$. μ étant une valeur propre de A, on a $|\mu| \leq \rho(A) = r$. Si l'on avait $|\mu| = r$, alors $\mu = r$ par hypothèse, donc $Ax = rx$ et $x \in Ker\,(rI - A) = \mathbb{C}v$. On déduit

$$x \in \mathbb{C}v \cap H = \{0\}$$

ce qui est absurde. Finalement $|\mu| < r$.

$\boxed{\text{V.A.2.ii}}$ Prenons une base $\mathcal{B} = (v, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $v \in Ker\,(rI - A) \setminus \{0\}$ et $(e_2, \ldots, e_n)$ soit une base de H. A laisse H stable, donc l'endomorphisme $x \mapsto Ax$ admettra une matrice du style

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

dans $\mathcal{B}$. Ici $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le polynôme caratéristique $P_A(X)$ de A est lié à celui de B par

$$P_A(X) = (X - r)\, P_B(X)$$

D'après V.A.2.i, si $x \in H \setminus \{0\}$ vérifie $Ax = \mu x$, alors $|\mu| < r$. Cela prouve que toutes les valeurs propres de B sont en modules $< r$, et donc que $\rho(B) < r$. En particulier, r sera racine simple de $P_A(X)$.

$\boxed{\text{V.A.2.iii}}$

$$\frac{A^k}{r^k} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \left(\frac{B}{r}\right)^k & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Comme $\rho\left(\frac{B}{r}\right) = \frac{\rho(B)}{r} < 1$, II.4.i implique

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{B}{r}\right)^k = 0$$

d'où

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{A}{r}\right)^k = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) = L$$

$x \mapsto L\,x$ est la projection sur $\mathbb{C}v$ parallèlement à H.

$\boxed{\text{V.A.2.iv}}$ En se plaçant à nouveau dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on trouve

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{A}{r}\right)^k = L$$

Comme $L > 0$ et comme cette convergence se traduit, en particulier, en disant que chaque coefficient de la matrice $\left(\frac{A}{r}\right)^k$ tend vers le coefficient correspondant de L quand k tend vers l'infini, on déduit l'existence d'un k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, l'on ait $A^k > 0$.

$\boxed{\text{V.A.3.i}}$ Si $0 \leq \quad \leq \quad$, alors $A(\ ) \leq A(\ )$ et II.5 donne

$$\rho(A(\ )) \leq \rho(A(\ )) \quad \text{ie} \quad f(\ ) \leq f(\ )$$

f est bien croissante sur $[0 + \quad [$. Comme toute fonction monotone définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, f admet une limite à droite et à gauche dans $\overline{\mathbb{R}}$ en chaque point de l'adhérence $\overline{I}$ de I. En particulier :

$$\lim_{0_+} f(\ ) = \inf_{>0} f(\ )$$

existe. Comme $f(\ ) \geq \rho(A) \quad \mathbb{R}$ pour tout $\quad > 0$, $\inf_{>0} f(\ ) \quad \mathbb{R}$ et l'on peut même écrire

$$\lim_{0_+} f(\ ) = \inf_{>0} f(\ ) \geq \rho(A)$$

$\boxed{\text{V.A.3.ii}}$ $A(\ ) > 0$ de sorte que la question IV.4 et IV.5 s'applique à $A(\ )$: $r = \rho(A(\ )) = f(\ )$ est l'unique valeur propre de $A(\ )$ de module r, $Ker(rI - A(\ )) = \mathbb{C}v$ est une droite vectorielle de vecteur directeur $v > 0$, et $x(\ ) = (x_1 \quad x_n)$ sera l'unique vecteur de cette droite vérifiant

$$\sum_j x_j = 1$$

En effet, $x(\ ) = (x_1 \quad x_n) = kv = k(v_1 \quad v_n)$ et $\sum_j x_j = \sum_j kv_j = 1$ impose $k = \frac{1}{\sum_j v_j}$.

$\boxed{\text{V.A.3.iii}}$ K est un compact puisque fermé borné dans $\mathbb{R}^n$, donc la suite $\left(x\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \quad \mathbb{N}^*}$ de K admet une valeur d'adhérence $x \quad K$. Autrement dit, il existe une sous-suite $\left(x\left(\frac{1}{n_s}\right)\right)_{s \quad \mathbb{N}^*}$ convergent vers x. En passant à la limite dans

$$A\left(\frac{1}{n_s}\right) x\left(\frac{1}{n_s}\right) = f\left(\frac{1}{n_s}\right) x\left(\frac{1}{n_s}\right)$$

pour s tendant vers $+\quad$, on trouve

$$Ax = lx$$

donc l est valeur propre de A. Cela implique $\ l\ \leq \rho(A)$. Comme $l \geq 0$ et $\rho(A) \leq l$, on conclut

$$\rho(A) = l$$

$\boxed{\text{V.B.1.i}}$ • Si A est réductible, il existe un sous-espace de coordonnées $\mathbb{R}^I$ stable par A, avec $I =$ et $I = \mathbb{N}_n$. Notons $J = \mathbb{N}_n \quad I$, alors $\quad I \quad J \quad$ est une partition de $\mathbb{N}_n$, et $A\left(\mathbb{R}^I\right) \subset \mathbb{R}^I$ se traduit par

$$(\ j \quad J \quad x_j = 0) \qquad \Big(\ j \quad J \quad (Ax)_j = \sum_k a_{jk}x_k = 0 \qquad (*)$$

Si $i_0 \quad I$ et $x = (x_i)$ avec $x_i = \delta_{ii_0}$ (symbole de Kronecker), $(*)$ entraîne

$$\left(\quad j \quad J \quad \sum_k a_{jk} x_k = 0 \qquad (\quad j \quad J \quad a_{ji_0} = 0) \right.$$

soit

$$(i_0 \;\; j) \quad I \times J \qquad a_{ji_0} = 0 \qquad (**)$$

On constate que $(**)$ entraîne $(*)$, d'où la caractérisation de la réductibilité de A.

• Notons que la condition $(**)$ équivaut, en échangeant les notations pour I et J, à

$$(i \;\; j) \quad I \times J \qquad a_{ij} = 0 \qquad (R)$$

demandé par l'énonçé !

• Si (R) est vraie et si $(i \;\; j) \quad I \times J$, alors l'existence de m telle que $\mathcal{L}(i \;\; j \;\; m)$ soit vraie entraînerait l'existence d'une chaîne $\left(a_{ii_1} \quad a_{i_{m-1}j}\right)$ d'éléments tous non nuls. On vérifie par récurrence en utilisant (R) que

$$a_{ii_1} \quad a_{i_{k-1}i_k} = 0 \qquad i \;\; i_1 \qquad i_k \quad I$$

de sorte que $j \quad I$. Absurde. Concluons :

$$(i \;\; j) \quad I \times J \qquad \mathcal{L}(i \;\; j) \text{ n'est pas vraie.}$$

$\boxed{\text{V.B.1.ii}}$ Soient $j \quad \mathbb{N}_n$ et $\mathcal{I}_j = \quad j \qquad j \quad \mathbb{N}_n \;\; \mathcal{L}(j \;\; j)$ vraie . Montrer que $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_j}$ est stable par A revient à prouver que pour chaque vecteur $x = (x_i)$ où $x_i = \delta_{ii_0}$ $(i_0 \quad \mathcal{I}_j$ fixé) de la base canonique de $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_j}$, on a $Ax \quad \mathbb{R}^{\mathcal{I}_j}$, ie

$$j_0 \quad \mathcal{I}_j \quad (Ax)_{j_0} = \sum_k a_{j_0 k} x_k = a_{j_0 i_0} = 0$$

Si ce n'était pas le cas, il existerait $j_0 \quad \mathcal{I}_j$ tel que $a_{j_0 i_0} = 0$, $\mathcal{L}(j_0 \;\; i_0 \;\; 1)$ serait vraie, et comme $i_0 \quad \mathcal{I}_j$, $\mathcal{L}(i_0 \;\; j)$ est vraie. On déduit

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(j_0 \;\; i_0 \;\; 1) \text{ vraie} \\ \mathcal{L}(i_0 \;\; j) \text{ vraie} \end{array}\right\} \quad \mathcal{L}(j_0 \;\; j) \text{ vraie} \quad j_0 \quad \mathcal{I}_j$$

ce qui est absurde.

Conclusion : $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_j}$ est stable par A.

$\boxed{\text{V.B.1.iii}}$ Il faut prouver que

$$A \text{ réductible} \quad (\quad (i \;\; j) \quad \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \qquad \mathcal{L}(i \;\; j) \text{ n'est pas vraie})$$

( ) a été démontré en i),
( ) si $\mathcal{L}(i \;\; j)$ n'est pas vraie, $i \quad \mathcal{I}_j$ de sorte que $\mathcal{I}_j$ soit non vide et non égale à $\mathbb{N}_n$. Le ii) montre que le sous-espace de coordonnées $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_j}$ non trivial est stable par A, ie que A est réductible.

$\boxed{\text{V.B.2}}$ Supposons que $\mathcal{L}(i\ \ j\ \ m)$ soit vraie, et montrons que si $m \geq n$, alors $\mathcal{L}(i\ \ j\ \ m\ )$ est vraie avec $m\ < m$. Par hypothèse, il existe une chaîne

$$a_{ii_1} \qquad a_{i_{m-1}j}$$

de coefficients non nuls de A liant i à j. Comme $m \geq n$, deux éléments de la famille $i\ \ i_1 \qquad i_{m-1}$ seront forcément identiques. Par exemple $i_l = i_s$ avec $l < s$. Dans ce cas la chaîne

$$a_{ii_1} \qquad a_{i_{l-1}i_l}\ a_{i_s\ i_{s+1}} \qquad a_{i_{m-1}j}$$

relie i à j et n'utilise que $m\ = m - (s - l) < m$ coefficient. Et $\mathcal{L}(i\ \ j\ \ m\ )$ est vraie.

$\boxed{\text{V.B.3.i}}$ $A^m = A^{m-1}A$ se traduit par

$$i\ \ j \qquad a_{ij}^{(m)} = \qquad a_{ik}^{(m-1)}a_{kj} \quad {}_{k}$$

Montrons l'équivalence proposée par récurrence sur m. Si $m = 1$,

$$\mathcal{L}(i\ \ j\ \ 1)\ \text{ vraie} \qquad a_{ij} = 0 \qquad a_{ij} > 0$$

et la propriété est assurée. Si elle est vraie jusqu'au rang $m - 1$, on a

$$\begin{array}{ll}
(\mathcal{L}(i\ \ j\ \ m)\ \text{ vraie}) \qquad & a_{ii_1} \quad a_{i_{m-1}j} = 0 \\
& a_{ii_1} \quad a_{i_{m-2}i_{m-1}} = 0 \quad \text{et} \quad a_{i_{m-1}j} = 0 \\
& \mathcal{L}(i\ \ i_{m-1}\ \ m-1)\ \text{ vraie} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(i_{m-1}\ \ j\ \ 1)\ \text{ vraie} \qquad (\diamond) \\
& a_{ii_{m-1}}^{(m-1)} > 0 \quad \text{et} \quad a_{i_{m-1}j} > 0 \qquad \text{(d'après l'hypothèse récurrente)} \\
& a_{ij}^{(m)} = \qquad a_{ik}^{(m-1)}a_{kj} \geq a_{ii_{m-1}}^{(m-1)}a_{i_{m-1}j} > 0 \qquad (*) \\
& \qquad\quad {}_{k} \\
& a_{ij}^{(m)} > 0
\end{array}$$

Réciproquement, si $a_{ij}^{(m)} > 0$, l'un des termes de la somme figurant en $(*)$ est > 0 et il existera k tel que

$$a_{ik}^{(m-1)} > 0 \quad \text{et} \quad a_{kj} > 0$$

Il suffit de choisir $i_{m-1} = k$ pour en déduire $(\diamond)$ grâce à l'hypothèse récurrente, puis pour remonter les équivalences jusqu'à et obtenir la propriété $\mathcal{L}(i\ \ j\ \ m)$.

$\boxed{\text{V.B.3.ii}}$ • $(a) \qquad (b)$ d'après V.B.3.i et V.B.1.iii, le fait que $m \qquad \mathbb{N}_{n-1}$ provenant de V.B.2 (On utilise aussi le fait que si $\mathcal{L}(i\ \ j)$ est vraie pour tout $i = j$, alors $\mathcal{L}(i\ \ i)$ est vraie pour tout i. Pour le voir, il suffit de relier i à j puis j à i par des chaînes de coefficients a_{ij} non nuls).

• Par la formule du binôme de Newton

$$(I + A)^{n-1} = \ {}^{n-1}_{m=0} \ C_{n-1}^m A^m$$

de sorte que, si l'on note $(I+A)^{n-1} = (b_{ij})$, l'on ait

$$b_{ij} = \overset{n-1}{\underset{m=0}{\quad}} C_{n-1}^{m} a_{ij}^{(m)} \qquad (*)$$

(où l'on pose commodément $a_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$). On déduit :

$$\begin{array}{ll} (b) \qquad & i \;\; j \quad i = j \qquad m \quad \mathbb{N}_{n-1} \quad a_{ij}^{(m)} > 0 \\ & i \;\; j \quad i = j \quad b_{ij} > 0 \qquad (I+A)^{n-1} > 0 \end{array}$$

Réciproquement si $b_{ij} > 0$ pour tout $i = j$, l'un au moins des termes de la somme de réels positifs $(*)$ sera > 0, ie il existera $m \quad \mathbb{N}_{n-1}$ avec $a_{ij}^{(m)} > 0$, d'où (b).

$\boxed{\text{V.B.4.i}}$ • Notons $Sp\,(M)$ le spectre de la matrice M (c'est l'ensemble des valeurs propres de M).

$$(\mu \quad Sp\,(I+M)) \qquad x = 0 \quad M\,(x) = (\mu - 1)\, x \qquad \mu - 1 \quad Sp\,(M)$$

montre que $Sp\,(I+M) = 1 + Sp\,(M)$, et permet d'avoir :

Lemme : Si $M > 0$, alors

$$\rho\,(I+M) = 1 + \rho\,(M)$$

Preuve du Lemme : Comme $M > 0$, $\rho\,(M)$ est l'unique valeur propre de M de module $\rho\,(M)$ d'après IV.4, donc

$$\rho\,(M) \quad Sp\,(M) \qquad 1 + \rho\,(M) \quad Sp\,(I+M)$$

De plus, si $\mu \quad Sp\,(I+M)$, $\mu = 1 + \lambda$ avec $\lambda \quad Sp\,(M)$ et $\lambda \ \leq \rho\,(M)$. Par suite $\mu \ \leq 1 + \ \lambda \ \leq 1 + \rho\,(M)$ ■

• D'après V.A.3.iii :

$$\begin{array}{rcll} \rho\,(I+A) & = & \lim\limits_{\ \ 0_+} \rho\,(I + A\,(\ )) & \quad \text{avec } A\,(\ ) > 0, \\ & = & \lim\limits_{\ \ 0_+} (1 + \rho\,(A\,(\ ))) & \quad \text{d'après le précédent lemme,} \\ & = & 1 + \rho\,(A) = 1 + r & \end{array}$$

d'où le premier point.

• Appliquons II.2.ii pour obtenir le second point :

$$\rho\left((I+A)^{n-1}\right) = [\rho\,(I+A)]^{n-1} = (1+r)^{n-1}$$

$\boxed{\text{V.B.4.ii}}$ • Si A est irréductible, $(I+A)^{n-1} > 0$ et l'on peut appliquer V.A.2.ii et la partie IV : $\rho\left((I+A)^{n-1}\right) = (1+r)^{n-1}$ sera racine simple de $P_{(I+A)^{n-1}}\,(X)$.

• r est une valeur propre de A d'après V.A.3.iii, donc c'est une racine de $P_A(X)$. Montrons que r est racine simple de $P_A(X)$ en raisonnant par l'absurde. On a

$$P_{(I+A)^{n-1}}(X) = \det \left(XI - (I+A)^{n-1} \right)$$

Posons $X = (1+Y)^{n-1}$,

$$\begin{aligned}
P_{(I+A)^{n-1}}\left((1+Y)^{n-1}\right) &= \det \left((1+Y)^{n-1} I - (I+A)^{n-1} \right) \\
&= \det [YI - A] \det \left(\sum_{k=0}^{n-2} (1+Y)^k (I+A)^{n-2-k} \right) \\
&= P_A(Y) \det \left(\sum_{k=0}^{n-2} (1+Y)^k (I+A)^{n-2-k} \right)
\end{aligned}$$

Si r était racine multiple de $P_A(Y)$, il existerait un entier $\alpha \geq 2$ et un polynôme $Q(Y)$ tels que

$$P_{(I+A)^{n-1}}\left((1+Y)^{n-1}\right) = (Y-r)^{\alpha} Q(Y)$$

En dérivant par rapport à Y,

$$P_{(I+A)^{n-1}}(X) \frac{dX}{dY} = \alpha (Y-r)^{\alpha-1} Q(Y) + (Y-r)^{\alpha} Q\ \ (Y)$$

Pour $Y = r$, compte tenu de $\frac{dX}{dY} = (n-1)(1+Y)^{n-1}$, on trouve

$$P_{(I+A)^{n-1}}(r)(n-1)(1+r)^{n-1} = 0$$

d'où $P_{(I+A)^{n-1}}(r) = 0$, ce qui prouve que r est une racine multiple de $P_{(I+A)^{n-1}}$, c'est absurde.

• **Autre solution** : Toujours en raisonnant par l'absurde. Si r était racine multiple de P_A, $(1+r)^{n-1}$ serait racine multiple de $P_{(I+A)^{n-1}}$ d'après le lemme ci-dessous, ce qui est absurde.

Lemme : Soit A une matrice carrée de taille n à coefficients complexes. Si le polynôme caractéristique de A est $P_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ et si $Q \in \mathbb{C}[X]$, alors le polynôme carcatéristique $Q(A)$ est $P_{Q(A)} = \prod_{i=1}^{n} (X - Q(\lambda_i))$.

Preuve du Lemme : On peut supposer que A est triangulaire (puisque toute matrice à coefficients dans un corps algébriquement clos est trogonalisable), soit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_i & \# & \# \\ & \ddots & \# \\ O & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \# & \# \\ & \ddots & \# \\ O & & \lambda_i^k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q(A) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_i) & \# & \# \\ & \ddots & \# \\ O & & Q(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant d'une matrice triangulaire, on déduit

$$P_{Q(A)} = \det(XI - Q(A)) = \prod_{i=1}^{n} (X - Q(\lambda_i)) \quad \blacksquare$$

• Montrons que $r > 0$: D'après II.5 et le lemme du V.B.4.i,

$$I \ \le I + A(\ ) \qquad \rho(I) \le \rho(I + A(\ )) = 1 + \rho(A(\ )) \qquad 0 \le \rho(A(\ ))$$

pour tout $\ > 0$. En passant à la limite pour $\ $ tendant vers 0, on obtient $0 \le r$. Enfin $r = 0$ sinon toutes les valeurs propres de A sont nulles et $r = 0$ sera la seule racine de $P_A(X)$, ce qui est absurde car r est de multiplicité 1 et $\deg P_A(X) = n \ge 2$.

$\boxed{\text{V.B.4.iii}}$ Comme I et A commutent,

$$(1 + r)^{n-1} I - (I + A)^{n-1} = [(1 + r) I - (I + A)] Q(A) = (rI - A) Q(A) = Q(A)(rI - A)$$

où $Q(A) = \ {}_{k=0}^{n-2} (1 + r)^k (I + A)^{n-2-k}$, de sorte que

$$\mathrm{Ker}(rI - A) \subset \mathrm{Ker}\ \ (1 + r)^{n-1} I - (I + A)^{n-1} \ \ = \mathbb{C}v$$

avec $v > 0$ (cf. IV.4.ii et $(I + A)^{n-1} > 0$). Comme r est racine de $P_A(X)$, $\mathrm{Ker}(rI - A) = \ 0 \ $ et nécessairement

$$\mathrm{Ker}(rI - A) = \mathbb{C}v$$

$\boxed{\text{V.B.5.i}}$ • Si A est primitive, il existe un entier naturel non nul k tel que $A^k > 0$, donc $a_{ij}^{(k)} > 0$ pour tous $i\ j$. D'après V.B.1.iii, cela prouve que A est irréductible.

• Montrons que r est l'unique valeur propre de A de module r : A est irréductible donc $r = \rho(A)$ est racine de P_A (cf. V.B.4), ie une valeur propre de A. D'autre part,

$$\rho\left(A^k\right) = \rho(A)^k = r^k$$

Comme $A^k > 0$, r^k sera l'unique valeur propre de A^k de module r^k et
$Ker\left(r^k I - A^k\right) = \mathbb{C}v$ avec $v > 0$ (cf. IV).
Si $\mu \ \ Sp(A)$ et $\ \mu\ = r$, alors $\mu^k \ \ Sp\left(A^k\right)$ et $\left|\mu^k\right| = r^k$ donc $\mu^k = r^k$. Notons $E_M(\lambda)$ l'espace propre de la matrice M associé à la valeur propre λ. On a

$$x \quad E_A(\mu) \qquad x \quad E_{A^k}\left(\mu^k\right) = E_{A^k}\left(r^k\right) = \mathbb{C}v$$

donc $E_A(\mu) \subset \mathbb{C}v$. Comme $E_A(\mu) = \ 0\ $,

$$E_A(\mu) = \mathbb{C}v$$

Ce que l'on a fait avec μ, on peut le refaire avec r pour obtenir $E_A(r) = \mathbb{C}v$, d'où $E_A(r) = E_A(\mu)$ et $r = \mu$.

$\boxed{\text{V.B.5.ii}}$ Si A est irréductible,

$Ker(rI - A)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $v > 0$ d'après V.B.4.iii,

Par hypothèse, r est l'unique valeur propre de A de module r,

${}^tA$ est irréductible, donc $Ker\left(rI - {}^tA\right)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $w > 0$ d'après V.B.4.iii, et ${}^tAw = rw$, ie ${}^twA = r\,{}^tw$.

Les conditions du début de V.A sont satisfaites, et V.A.iv s'applique : il existe k_0 tel que $k \geq k_0$ entraîne $A^k > 0$. Cela signifie bien que A est primitive.

$\boxed{\text{V.B.5.iii}}$ • Cherchons $P_{A_0}(X)$:

$$P_{A_0}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & & & 0 \\ 0 & X & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & 0 & & X \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & -1 & & & 0 \\ 0 & X & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & & X \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & & & 0 \\ X & -1 & & & \\ \vdots & X & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & X & -1 \end{vmatrix}$$

$$= X \quad X \begin{vmatrix} X & -1 & & & 0 \\ 0 & X & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & X \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & & & 0 \\ X & -1 & & & \\ \vdots & X & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & X & -1 \end{vmatrix} \quad - 1$$

d'où $P_{A_0}(X) = X^n - X - 1$.

• Pour montrer que A_0 est primitive, on montre que

(1) A_0 est irréductible,
(2) r est l'unique valeur propre de A_0 de module r

• Preuve de (1) : On montre que $\mathcal{L}(i\ \ j)$ est vraie pour tout couple $(i\ \ j)$. En notant toujours a_{ij} les coefficients de A_0,

Si $1 \leq i < j \leq n$, $a_{i\,i+1} \quad a_{j-1\,j} = 0$ et donc $\mathcal{L}(i\ \ j)$ est vraie.

Si $1 \leq j < i \leq n$, $\mathcal{L}(i\ \ n)$ et $\mathcal{L}(1\ \ j)$ sont vraies d'après le cas précédent, et $a_{n\,1} = 0$ prouve que $\mathcal{L}(n\ \ 1)$ est vraie. Cela entraîne $\mathcal{L}(i\ \ j)$.

Si $i = j$, on choisit $k = i$ pour avoir les propriétés $\mathcal{L}(i\ \ k)$ et $\mathcal{L}(k\ \ i)$, d'où l'on déduit la propriété $\mathcal{L}(i\ \ i)$.

• Preuve de (2) : A_0 est irréductible, donc admet r comme valeur propre (cf.V.B.4.ii), et l'on peut écrire $P_{A_0}(r) = r^n - r - 1 = 0 \qquad r^n = r + 1$. Si $\lambda \quad Sp(A)$ est de module $\lambda = r$,

$$P_{A_0}(\lambda) = \lambda^n - \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda^{\ n} = \ \lambda + 1 \qquad \lambda + 1\ = r^n$$

De ces deux résultats, on déduit $\lambda + 1\ =\ \lambda\ + 1$, soit $\lambda \geq 0$ (cf. I.2), et finalement $\lambda = r$.

★★★ THAT'S ALL FOLKS ! ★★★