MégaMaths
© 2014 Dany-Jack Mercier
dany-jack.mercier@hotmail.fr

Question 1 *On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension $n \geq 1$. Soit $e = (e_1 ..., e_n)$ une base de E. Si $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ appartient à E, on définit les normes usuelles de x par :*

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad et \quad ||x||_\infty = \operatorname*{Sup}_{i \in [\![1,n]\!]} (|x_i|) .$$

Soit f un endomorphisme de E. On note $||f||_1$ et $||f||_\infty$ les normes opérateurs de f pour les choix des normes précédentes. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de f dans la base e. Démontrer que :

a) $||f||_1 = \mathrm{Sup}_{j \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \mathrm{Sup}_{j \in [\![1,n]\!]} \left(\|f(e_j)\|_1\right)$ *;*

b) $||f||_\infty = \mathrm{Sup}_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$.

Réponse 1 a) Par définition $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et :

$$||f||_1 = \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \frac{||f(x)||_1}{||x||_1} = \mathrm{Sup}\, \mathcal{E} \quad \text{où } \mathcal{E} = \left\{ \frac{||f(x)||_1}{||x||_1} \,/\, x \in E \backslash \{0\} \right\}.$$

Comme $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, on a :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i.$$

Si l'on pose $M = \mathrm{Sup}_{j \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$, on obtient :

$$||f(x)||_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j| \leq M \, ||x||_1$$

de sorte que :

$$\forall x \in E \backslash \{0\} \quad \frac{||f(x)||_1}{||x||_1} \leq M.$$

Cela montre que M est un majorant de $\mathcal{E}$. Pour démontrer que M est la borne supérieure de $\mathcal{E}$, on va vérifier que M appartient à $\mathcal{E}$ ce qui prouvera que M est le plus grand élément de $\mathcal{E}$, donc *a fortiori* la borne supérieure de cet ensemble. Il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$M = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}|$$

et il suffit de considérer le vecteur e_{j_0} pour obtenir :

$$\frac{||f(e_{j_0})||_1}{||e_{j_0}||_1} = ||f(e_{j_0})||_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} e_i\right\|_1 = \operatorname*{Sup}_{j\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}|\right) = M,$$

ce qui montre bien que $M \in \mathcal{E}$.

Remarque — Ainsi la norme $||f||_1$ définie avec un « sup » est en fait un « max ». Il n'y a pas de quoi être étonné car la linéarité de f permet de vérifier que :

$$||f||_1 = \operatorname*{Sup}_{x\neq 0}\frac{||f(x)||_1}{||x||_1} = \operatorname*{Sup}_{||x||_1=1} ||f(x)||_1,$$

de sorte que l'on cherche la borne supérieure de l'application continue φ de $E\setminus\{0\}$ qui au vecteur x non nul associe le réel $||f(x)||_1$, lorsque x décrit le compact $\mathcal{S} = \{x \in E \,/\, ||x||_1 = 1\}$ qui n'est autre que la sphère unité de E (qui est compacte puisque fermée bornée dans $E \simeq \mathbb{R}^n$). Comme l'image d'un compact par une application continue est un compact, $\varphi(\mathcal{S})$ sera un compact de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un fermé borné de $\mathbb{R}$, et la borne supérieure $\operatorname{Sup}\varphi(\mathcal{S})$ sera atteinte pour au moins une valeur de x dans $\mathcal{S}$. On aura $\operatorname{Sup}\varphi(\mathcal{S}) = \operatorname{Max}\varphi(\mathcal{S})$. Ce raisonnement reste vrai quelle que soit la norme $\|\ \|$ considérée sur E, de sorte que l'on retiendra que l'on a toujours :

$$||f|| = \operatorname*{Sup}_{x\neq 0}\frac{||f(x)||}{||x||} = \operatorname*{Sup}_{||x||=1} ||f(x)|| = \operatorname{Max}_{x\neq 0}\frac{||f(x)||}{||x||} = \operatorname{Max}_{||x||=1} ||f(x)||.$$

b) Ici :

$$||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\neq 0}\frac{||f(x)||_\infty}{||x||_\infty} = \operatorname{Sup}\mathcal{F} \quad \text{où } \mathcal{F} = \left\{\frac{||f(x)||_\infty}{||x||_\infty} \,/\, x \in E\setminus\{0\}\right\}.$$

Posons $N = \operatorname{Sup}_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$. Avec les notations de la question a) :

$$||f(x)||_\infty = \operatorname*{Sup}_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|\right) \leq \operatorname*{Sup}_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|\right)$$

donc :

$$\frac{||f(x)||_\infty}{||x||_\infty} \leq \operatorname*{Sup}_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,\frac{|x_j|}{||x||_\infty}\right) \leq \operatorname*{Sup}_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) = N$$

en majorant chacun des quotients $|x_j|/||x||_\infty$ par 1. Ainsi :

$$\forall x \in E \backslash \{0\} \qquad \frac{||f(x)||_\infty}{||x||_\infty} \leq N$$

et N est un majorant de $\mathcal{F}$. Pour démontrer que N est le plus petit des majorants de $\mathcal{F}$, on va prouver qu'il appartient à l'ensemble $\mathcal{F}$, ce qui permettra de conclure à $N = \operatorname{Max} \mathcal{F} = \operatorname{Sup} \mathcal{F} = ||f||_\infty$. Il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$N = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| \, .$$

Définissons le vecteur :

$$\widetilde{x} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_j e_j \quad \text{où} \quad \widetilde{x}_j = \operatorname{Sgn}(a_{i_0 j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0 j} \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

de façon à avoir $a_{i_0 j}\widetilde{x}_j = |a_{i_0 j}|$ pour tout j. Avec ce vecteur :

$$||f(\widetilde{x})||_\infty = \operatorname*{Sup}_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{x}_j \right| \right) \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\widetilde{x}_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = N$$

et comme $||\widetilde{x}||_\infty = 1$, on obtient :

$$\frac{||f(\widetilde{x})||_\infty}{||\widetilde{x}||_\infty} \geq N.$$

Comme N est un majorant de $\mathcal{F}$, on a $N \leq \dfrac{||f(\widetilde{x})||_\infty}{||\widetilde{x}||_\infty}$, et donc :

$$N = \frac{||f(\widetilde{x})||_\infty}{||\widetilde{x}||_\infty} \in \mathcal{F}$$

ce qui permet de conclure.