Méga Maths
© 2014 Dany-Jack Mercier
dany-jack.mercier@hotmail.fr

Produit scalaire dans le plan

Voici deux questions importantes pour y voir plus clair sur la leçon d'oral sur le produit scalaire si l'on choisit un développement qui privilégie le programme du secondaire. Je place ces deux exercices dans le volume III de la collection *Acquisition des fondamentaux pour les concours* [1].

Question 1 — (Oral du CAPES 2012) On sait que l'on peut définir le produit scalaire en utilisant des normes, des cosinus, ou des projetés orthogonaux. Démontrer l'équivalence entre ces trois définitions.

Réponse — Voici l'extrait d'un courrier reçu en juillet 2012, envoyé par une candidate qui passait ses oraux du CAPES externe :

> « Je pense que je ne serai pas reçue au CAPES cette année. Je suis tombée sur la leçon sur le produit scalaire. Le jury a commencé par me demander de démontrer l'équivalence entre la définition avec les normes, celle avec le cosinus et celle avec le projeté orthogonal. Je n'ai rien su faire. Etait-ce une question difficile ou pas ? »

Savoir montrer l'équivalence entre les trois définitions d'un produit scalaire pour affronter un oral semble donc important. Trouver une réponse en temps limité n'est pas évident si la question n'a pas été préparée.

On peut démontrer ces équivalences en définissant un produit scalaire comme étant une forme bilinéaire symétrique définie positive. Cela permet d'accéder directement à l'expression avec les normes (il s'agit d'une formule polaire) et à celle avec le projeté orthogonal (en utilisant la bilinéarité). L'expression avec le cosinus se retrouve en retournant à la définition du cosinus d'un angle orienté et en parlant de matrice de rotation. Ce n'est pas forcément ce qu'attend un jury de CAPES en 2012, mais ce n'est pas grave et ne peut pas jouer contre le candidat qui a montré qu'il avait des idées précises sur le sujet. Evidemment, le jury pourra alors poser les questions suivantes : ces démonstrations sont-elles utilisables en première ? Connaissez-vous une façon de procéder adaptée à cette classe ? Mais ne pas savoir y répondre à ce moment sera moins dangereux que de ne rien avoir eu à dire dès le début.

Je proposerai donc deux réponses à cette question : la première « secondarisée » dans le cadre des programmes 2012 en classe de première S, et la seconde plus universitaire.

Voici les trois définitions possibles du produit scalaire dont on doit vérifier l'équivalence logique :

> D1 – Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, défini par :
> $$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right).$$
>
> D2 – Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, nul si l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, et défini de la façon suivante si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$: si A, B, C sont trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, et si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :
> $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH}.$$
>
> D3 – Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, nul si l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, et défini de la façon suivante si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas nul :
> $$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}).$$

Dans toute la suite, on supposera qu'on travaille dans un plan, ce qui ne restreint pas la généralité du raisonnement. En effet, la définition D3 fait intervenir le cosinus d'un angle dont on ne dit pas s'il est orienté ou non. Si on le suppose orienté, on suppose implicitement que l'on travaille dans un plan, et l'on sait que le cosinus d'un angle orienté, ou de sa mesure, ne dépend pas du choix de l'orientation du plan (rappelons au passage qu'il n'est pas besoin d'orienter le plan pour définir des angles orientés, mais qu'il faut absolument le faire si l'on utilise des mesures d'angles orientés). Le plan peut donc être orienté comme on le désire, ou pas du tout ! La formule proposée est donc la même que l'on parle d'angle orientés ou non, et c'est ce qui fait son intérêt : la formule reste valide dans un espace vectoriel de dimension quelconque si l'on suppose que $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est défini dans la plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et orienté de n'importe quelle façon, ou non orienté si on préfère imaginer $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ comme un angle géométrique, c'est-à-dire un écart angulaire. Il est temps de donner les preuves :

Première réponse (niveau lycée) — • Choisissons D1 comme définition du produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, et montrons que ce nombre $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est alors égal aux nombres définis dans D2 et D3. On a :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

donc déjà $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ce qui fait qu'on aura seulement à démontrer D2 et D3 lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas nuls. Si (x, y) et (x', y') représentent les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors[1] :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\left(x+x'\right)^2 + \left(y+y'\right)^2\right) - \left(x^2+y^2\right) - \left(x'^2+y'^2\right)\right] \\
&= xx' + yy'.
\end{aligned}$$

Cette expression très simple d'un produit scalaire permet de vérifier facilement que l'application $\varphi : (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est bilinéaire symétrique, c'est-à-dire telle que :

$$\begin{array}{lll}
\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v} & \forall \lambda \in \mathbb{R} & (\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{u}').\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \lambda(\overrightarrow{u}'.\overrightarrow{v}) \\
\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}' & \forall \lambda \in \mathbb{R} & \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{v}') = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}') \\
\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}. &
\end{array}$$

Elle montre aussi que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2 + y^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$, ce que l'on utilisera dans la suite, et constitue une quatrième définition possible du produit scalaire qui mérite d'être retenue :

> D4 – Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, défini par $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$ où (x, y) et (x', y') représentent les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

- Avec les notations de la définition D2, la bilinéarité permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} \\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}
\end{aligned}$$

[1] On suppose que l'on connaît l'expression d'une norme en fonction des coordonnées dans un repère orthonormal, en liaison avec le programme de seconde qui demande de savoir la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ donnant la distance entre deux points. Cette formule se vérifie dans ce cadre en utilisant le Théorème de Pythagore.

Par définition, les mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ des bipoints (A, B) et (A, H) sont les abscisses des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ dans une base $\overrightarrow{w}$ de la droite (AB) telle que $||\overrightarrow{w}|| = 1$. Autrement dit $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{AH} = \overline{AH}\,\overrightarrow{w}$, donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \left(\overline{AB}\,\overrightarrow{w}\right).\left(\overline{AH}\,\overrightarrow{w}\right) = (\overline{AB}.\overline{AH})\,||\overrightarrow{w}||^2 = \overline{AB}.\overline{AH}.$$

Nous venons de démontrer D2.

Si l'on ne dispose pas de la notion de mesure algébrique, comme dans le programme du lycée, on remplacera $\overline{AB}.\overline{AH}$ par le produit $AB \times AH$ précédé d'un signe « plus » si B et H sont du même côté par rapport à A sur la droite (AB), « moins » sinon.

Dans le développement du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, on a utilisé le fait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0$ dès que l'un des vecteurs est nul ou dès que les droites (AB) et (HC) sont orthogonales. Cela nécessite de démontrer la propriété suivante (à partir de D1) en toute généralité :

> **Propriété** — On suppose que le produit scalaire est défini par D1. Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, ou bien, en posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ avec $A \neq B$ et $A \neq C$, les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

Preuve de la propriété — L'équivalence est évidente si l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul. Nous devons ensuite la vérifier sous l'hypothèse où ces deux vecteurs ne sont pas nuls. Dans ce cas, écrivons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ où A, B, C sont des points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{BA}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad BC^2 = BA^2 + AC^2 \\
&\Leftrightarrow \quad ABC \text{ rectangle en } A \\
&\Leftrightarrow \quad (AB) \perp (AC)\,. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

L'équivalence entre D1 et D2 est acquise, et on dispose de la définition D4.

• Montrons D3. Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas nuls, notons A, B et C des points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, puis θ une mesure de l'angle orienté

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et plaçons-nous dans le repère orthonormal direct $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{u}/||\overrightarrow{u}||$. Alors :

$$\overrightarrow{v} = (||\overrightarrow{v}|| \cos\theta)\,\overrightarrow{i} + (||\overrightarrow{v}|| \sin\theta)\,\overrightarrow{j}.$$

Comme $\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||\,\overrightarrow{i}$, la définition D4 donne :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= (||\overrightarrow{u}||\,\overrightarrow{i}).((||\overrightarrow{v}|| \cos\theta)\,\overrightarrow{i} + (||\overrightarrow{v}|| \sin\theta)\,\overrightarrow{j}) \\
&= ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}|| \cos\theta.
\end{aligned}$$

Seconde réponse (niveau université) — Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien dans lequel on travaille, et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sa direction. Par définition, un produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

$$\begin{array}{rccc}
\varphi : & \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \rightarrow & \mathbb{R} \\
& (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \mapsto & \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}),
\end{array}$$

et la norme sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est celle qui provient de ce produit scalaire :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \quad ||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})}.$$

Notons $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ comme il est d'usage. La formule polaire :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$$

est une conséquence du calcul :

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 &= \varphi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \\
&= \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \\
&= ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\,\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2
\end{aligned}$$

où l'on utilise la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire φ. Cela montre la définition D1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, et si H désigne le projeté orthogonal de C sur (AB), on recommence comme dans la première réponse :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} \\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}
\end{aligned}$$

et puisque $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{AH} = \overline{AH}\,\overrightarrow{w}$, où $\overrightarrow{w}$ est un vecteur unitaire qui dirige la droite (AB), on obtient :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \left(\overline{AB}\,\overrightarrow{w}\right).\left(\overline{AH}\,\overrightarrow{w}\right) = (\overline{AB}.\overline{AH})||\overrightarrow{w}||^2 = \overline{AB}.\overline{AH}.$$

D'où D2. Pour obtenir D3, on peut identifier l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ avec sa mesure (en supposant que le plan a été orienté) et rappeler que $(\vec{u},\vec{v}) = \theta \ (2\pi)$ si et seulement si l'unique rotation r qui transforme $\vec{u}/||\vec{u}||$ en $\vec{v}/||\vec{v}||$ admet la matrice :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dans n'importe quelle base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Si (x,y) désigne les coordonnées de $\vec{u}/||\vec{u}||$ dans une telle base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$,

$$\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}.\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= x\,(x\cos\theta - y\sin\theta) + y\,(x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Cela s'écrit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta$, et achève de démontrer D3.

Question 2 — (Oral du CAPES 2012) Démontrer les formules qui donnent les développements de $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$ en utilisant uniquement des outils de lycée.

Réponse — Soit $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct du plan. Soient A et B les points de coordonnées $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos b, \sin b)$ dans ce repère, comme sur la FIG. 1. Par définition :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (\cos a)\overrightarrow{i} + (\sin a)\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{OB} = (\cos b)\overrightarrow{i} + (\sin b)\overrightarrow{j} \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a\cos b + \sin a \sin b$. Mais :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = ||\overrightarrow{OA}||\,||\overrightarrow{OB}||\,\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \cos(b-a)$$

comme on le voit en lisant l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ sur le cercle trigonométrique associé au repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On en déduit que :

$$\cos(b-a) = \cos a\cos b + \sin a\sin b.$$

Le développement de $\cos(a+b)$ s'obtient en remplaçant b par $-b$ dans la formule précédente. Les développements de $\sin(a \pm b)$ sont obtenus en retournant au cosinus. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b \\
&= \sin a \cos b + \sin b \cos a.
\end{aligned}$$

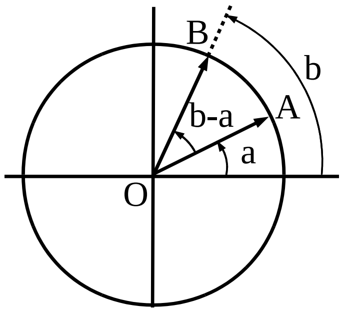

Figure 1: $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

References

[1] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. III : Espaces euclidiens et hermitiens, CSIPP, à paraître.