

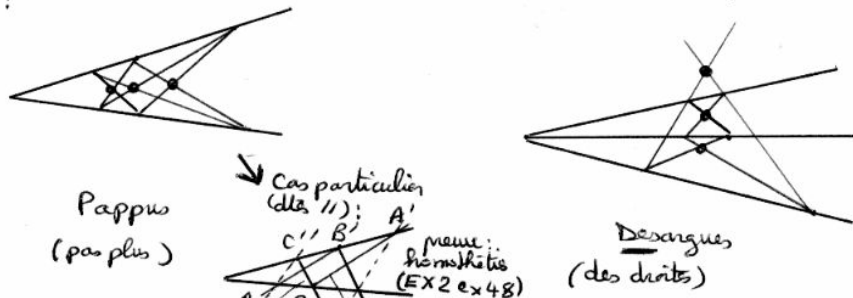
Introduction aux espaces projectifs,
 preuves des théorèmes de Pappus et de Desargues, dualité.

Informations sur la série de diapositives

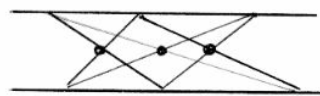
1. Introduction : Faisons quelques dessins à main levée au tableau.

► Sur la FIG. 1, on commence par dessiner les configurations de Pappus (= pas plus, donc on choisit 3 points sur pas plus de deux droites), puis celle de Desargues (= Des Sargues... pour retenir qu'il nous faut maintenant beaucoup de droites, en fait 3, et choisir deux points sur chacune d'elles...).

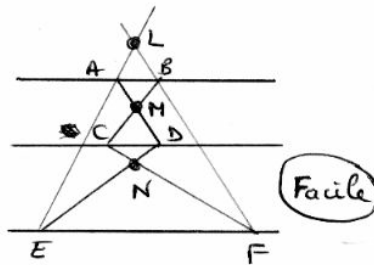
① Dessiner à main levée au tableau les configurations de Pappus et de Desargues :



On a des figures du même genre en prenant des droites parallèles :



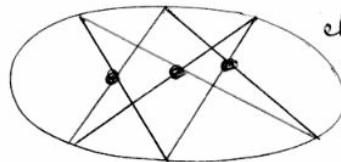
Pappus : Cas de 2 dtes //



Desargues : Cas de 3 dtes //
 (preuve facile ; Config. de base des trapèzes.
 UTILISER DES HOMOTHÉTIES)

Ces cas sont les mêmes si l'on imagine que des droites // se coupent à l'infini.

- Généralisation de Pappus : On obtient le Théorème de Pascal
 "Théorème de l'hexagramme mystique"
 elliptique avec un hexagone inscrit.



- Pappus \Rightarrow Desargues (admis)

Figure 1: Dessins à main levée

► On trace les cas particuliers où les droites sont parallèles. L'alignement est encore vrai ! On note qu'il est facile de démontrer le Théorème de Desargues dans le cas des trois droites parallèles en utilisant des homothéties de centres L , M et N , en les composant... Pour déduire l'alignement de ces centres. On reconnaît la configuration de base des trapèzes !

► Il existe une généralisation du Théorème de Pappus : c'est le Théorème de Pascal, appelé aussi "Théorème de l'hexagramme mystique". C'est le dernier point dessiné sur la FIG. 1.

On a utilisé une ellipse, mais le résultat est vrai sur n'importe quelle conique, qu'elle soit propre ou non (on retrouve alors le cas des deux droites concourantes ou parallèles).

Plus précisément, on peut énoncer :

Théorème de Pascal (direct et réciproque) : On considère un hexagone du plan projectif. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) L'hexagone est inscrit dans une conique.
- (ii) Les intersections des paires de côtés opposés sont alignées.

(Voir "Compléments" à la fin de ce développement).

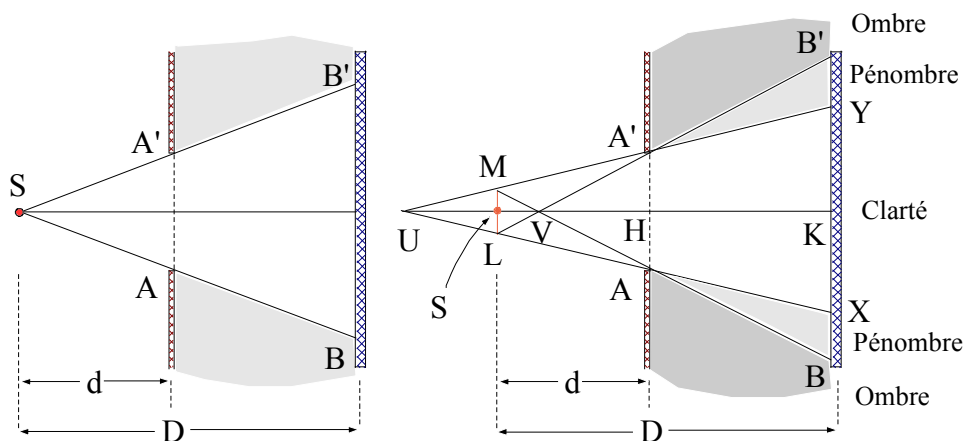


Figure 2: Rayons lumineux

2. Par l'expérimentation, on peut mettre en évidence le parcours rectiligne de la lumière. Il existe une expérience très simple qui peut donner lieu à une activité en 3ème ou en seconde :

► A l'aide d'un filament, d'un cache et d'un écran il est facile de déduire la zone de lumière, d'ombre et de pénombre projetée sur l'écran à partir des seules données de la longueur du filament, du diamètre du trou dans le cache, et des positions relatives de tous ces objets (FIG. 2). On utilise le Théorème de Thalès.

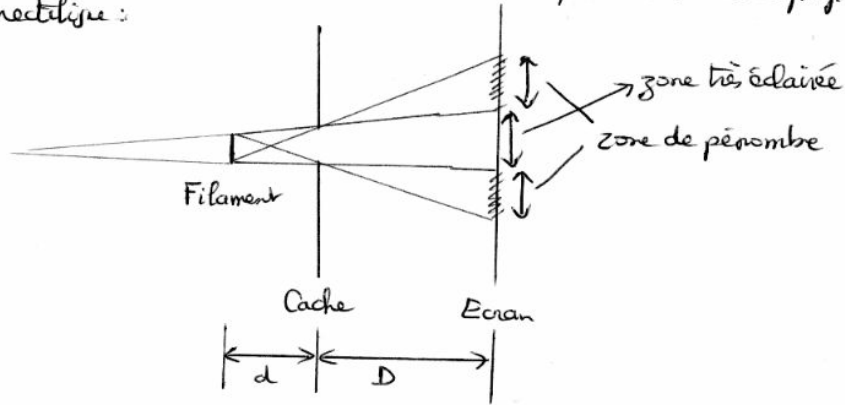
► Une droite correspond donc à une trajectoire de lumière. Et avec des droites et des points, on fait de la géométrie. L'étude maîtrisée de la géométrie est d'un certain point de vue justifiée par l'expérimentation : une droite d'un espace affine est la représentation parfaite d'un rayon lumineux. Mais cela ne va pas si facilement : que deviennent les trajets de lumière dans l'infiniment grand ? Ceux-ci ont de quoi nous surprendre puisque les astronomes connaissent depuis longtemps l'existence de phénomènes de lentilles gravitationnelles qui courbent la lumière pour révéler la présence de corps stellaires massifs, mais invisibles...

Au télescope, il n'est donc pas rare de découvrir des galaxies fantômes... L'observation de ces galaxies fantômes, maintenant très nombreuses, constituent d'ailleurs l'une des preuves expérimentales de la théorie de la relativité (voir FIG. 3).

► Si le parcours d'un photon définit bien une droite, les droites de l'infiniment grand sont bien courbes et se déforment à volonté à proximité d'une masse importante. Bref, notre photographie de l'univers visible est brouillée ! Et deux droites distinctes peuvent se couper plusieurs fois... Voilà des droites "parallèles" qui se coupent de façon bien originale !

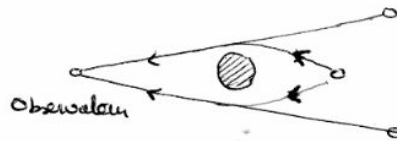
(2) Parcours de lumière

⊗ Le théorème de Thalès et une petite expérience utilisant une lampe, un cache et un écran, permettent de démontrer que la lumière se propage de façon rectiligne :



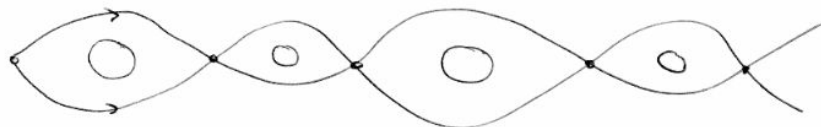
On peut calculer les diamètres des zones de pénombre et éclairées en fonction de la longueur du filament et des distances d et D .

⊗ Problème des lentilles gravitationnelles : existence de mirages quand on observe l'Univers à l'aide d'un télescope.



La lumière ne se déplace donc PAS de façon rectiligne dans l'infiniment grand. Elle subit des forces d'attraction gravitationnelles !

Imaginons une "droite" rayon lumineux dans l'espace :



C'est 2 droites qui seraient être "parallèles" et se croisent plusieurs fois.

Figure 3: La lumière se propage-t-elle en ligne droite ?

3. C'est en essayant de représenter le réel que les architectes et les peintres de la renaissance ont été obligés de s'intéresser à la perspective. On trouve bien sûr des représentations "en perspective" dès certaines peintures préhistoriques ou dans les fresques de Pompéï, mais c'est bien au XV^e siècle que l'architecte Filippo Brunelleschi¹ "invente" les lois de la perspective. Pour lui, ces lois lui offrent un procédé rationnel lui permettant de dessiner des édifices en mettant grandement en évidence les lignes de force de l'architecture de ses bâtiments : Brunelleschi avait une prédilection pour les colonnades et les scansions² de l'espace.

C'est l'architecte Leone Battista Alberti (1404-1472) qui codifiera le premier les lois de la perspective dans son traité "De la peinture" paru vers 1435.

Il ne s'agit pas encore de "mathématiques", mais d'une façon empirique de représenter le réel compte tenu de nos sens, ici la vue. Il faudra attendre Girard Desargues³, au XVII^e, pour passer de cette représentation du réel à l'élaboration de nouveaux concepts mathématiques, et donc de nouveaux espaces.

En effet, il ne suffit pas d'imaginer que deux droites se coupent à l'infini pour faire des mathématiques. Il faut proposer des définitions précises des espaces dans lesquels on désire travailler, obtenir des résultats conséquents, puis expliquer comment l'emploi de ces espaces est pertinent pour enrichir nos conceptions, par exemple en :

- montrant que certains résultats se démontrent plus facilement dans ce nouvel environnement,
- déduisant des théorèmes à partir de résultats connus en suivant des méthodes "simples".

C'est ce que nous ferons dans cet exposé où nous nous intéresserons spécialement aux Théorèmes de Pappus et de Desargues.

La géométrie de Desargues tomba assez rapidement dans l'oubli à cause de l'invention de la géométrie analytique par René Descartes (1596-1650). En inventant le concept de repère, Descartes construisit un pont entre l'algèbre et la géométrie, et permit de simplifier de nombreuses démonstrations en géométrie.

4. Avec Geogebra, projeter la configuration de Pappus (fichier 081119a.ggb) puis :

- Envoyer B' sur la gauche pour que les droites en pointillés ne se coupent plus. Observer : (LM) est parallèle aux droites en pointillés, L est le point à l'infini de (LM) . Il y a encore alignement.

- Envoyer C' sur la gauche pour que les droites en tirets ne se coupent plus. Observer : les trois couples de droites sont formés de droites parallèles qui se coupent en des points L, M, N situés sur la droite à l'infini, donc alignés.

Conclusion : Si l'on suppose que les droites (ABC) et $(A'B'C')$ sont sécantes, on obtient 3 cas de figures suivant que les intersections des couples de droites existent dans le plan affine ou non. On obtient encore 3 autres cas de figures si l'on suppose que les droites (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles.

Il y a donc 6 cas de figures différents du Théorème de Pappus.

5. Commenter les diapositives du fichier uesp0001sl.

¹Filippo Brunelleschi, né en 1377 à Florence et mort en 1446, fut l'architecte qui construisit le célèbre dôme de la cathédrale Santa Maria del Fiore dans la Florence des Médicis, mais ce fut aussi un horloger, un orfèvre, et un peintre de talent de l'école florentine. On lui attribue le projet du Palais Pitti de Florence, l'un des premiers palais de la Renaissance.

²Le style de la façade d'un bâtiment offre une rythmique propre qui n'est autre que le résultat de l'alternance entre les vides et les pleins tels qu'on les perçoit (scansion : n. f., action de scander des vers).

³Relevé sur Wikipedia : Le Sieur Girard Desargues Lyonnais comme il signe lui-même ses écrits, est un géomètre et architecte français né à Lyon le 21 février 1591 et décédé à Lyon en octobre 1661, considéré comme fondateur de la géométrie projective : il a donné son nom à la configuration de Desargues et au théorème de Desargues.

Complément :

Démontrons le Théorème de Pascal (direct et réciproque) dans le cadre projectif :

Théorème 1 (Théorème de Pascal, sens direct et réciproque) *On considère un hexagone du plan projectif. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'hexagone est inscrit dans une conique.*
- (ii) *Les intersections des paires de côtés opposés sont alignées⁴.*

Preuve⁵ : (i) \Rightarrow (ii) — La FIG. 4 représente un hexagone $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ inscrit dans une conique (ici une ellipse). Les intersections des côtés opposés (M_1M_2) et (M_4M_5) , (M_2M_3) et (M_5M_6) , (M_3M_4) et (M_1M_6) sont notées respectivement A , B et C .

En utilisant des propriétés des homographies sur une conique, on constate que le birapport du faisceau de droites $((SM_2), (SM_4), (SM_5), (SM_6))$ est indépendant du choix du point S sur la conique. On en déduit l'égalité des birapports de droites concourantes :

$$[(M_1M_2), (M_1M_4), (M_1M_5), (M_1M_6)] = [(M_3M_2), (M_3M_4), (M_3M_5), (M_3M_6)].$$

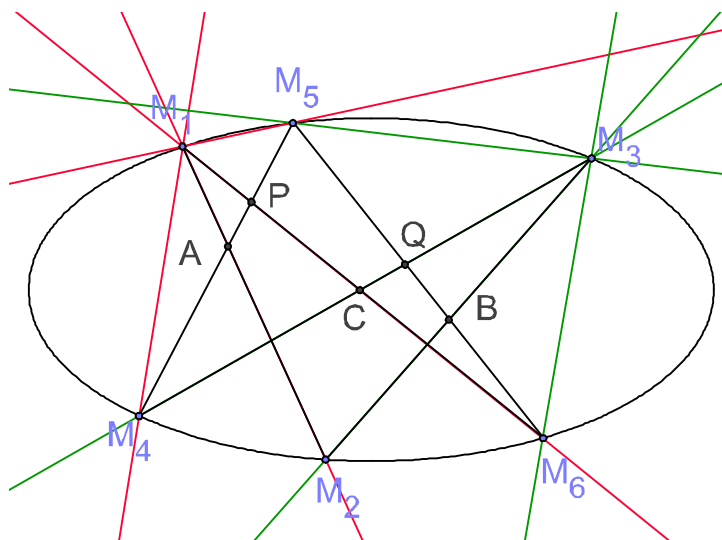


Figure 4: Théorème de Pascal

En interceptant ces faisceaux de droites avec les droites (M_4M_5) et (M_5M_6) , on obtient donc l'égalité de birapports :

$$[A, M_4, M_5, P] = [B, Q, M_5, M_6] \quad (1)$$

où P est l'intersection de (M_1M_6) et (M_4M_5) , et où Q est l'intersection de (M_3M_4) et (M_5M_6) .

Les droites (M_4Q) et (PM_6) se coupent en C . La projection centrale π de sommet C de la droite (M_4M_5) sur la droite (M_5M_6) transforme A en un point B' , M_4 en Q , M_5 en lui-même, et P en M_6 . Comme un birapport est invariant par projection centrale :

$$[A, M_4, M_5, P] = [B', Q, M_5, M_6] \quad (2).$$

(1) et (2) donnent $[B, Q, M_5, M_6] = [B', Q, M_5, M_6]$, d'où $B = B'$. Ainsi B est l'image de A par π , et les points A , B et C seront alignés.

⁴Evidemment, si deux côtés opposés sont confondus, leur intersection n'est pas unique. Dans ce cas, il faut interpréter la condition (ii) de cette façon plus large : "il existe trois points appartenant à ces intersections qui sont alignés". Si la conique est propre, un hexagone inscrit dans cette conique ne pourra pas avoir des côtés (au sens de "droites") confondus car une droite coupe une conique propre en au plus deux points.

⁵Preuve trouvée sur Wikipedia le 14 décembre 2009 en http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Pascal.

(ii) \Rightarrow (i) — La projection centrale π de sommet C de la droite (M_4M_5) sur la droite (M_5M_6) transforme A en B de (M_5M_6) , M_4 en Q , M_5 en lui-même, et P en M_6 . Comme un birapport est invariant par projection centrale, on obtient :

$$[A, M_4, M_5, P] = [B, Q, M_5, M_6].$$

On en déduit l'égalité des birapports de faisceaux de droites :

$$[(M_1M_2), (M_1M_4), (M_1M_5), (M_1M_6)] = [(M_3M_2), (M_3M_4), (M_3M_5), (M_3M_6)]. \quad (*)$$

Cinq points définissent une conique : il existe une conique \mathcal{C} passant par M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 . Pour conclure, il reste à vérifier que l'égalité des birapports de faisceaux de droites (*) implique que $M_6 \in \mathcal{C}$. ■

Cas particulier : le cercle d'Euler.

La FIG. 5 montre le cercle d'Euler d'un triangle ABC . Ce cercle passe par neuf points : les milieux A', B', C' des côtés du triangle ABC , les pieds H_A, H_B, H_C des hauteurs, et les milieux I, J, K , des segments $[AH], [BH]$ et $[CH]$.

Le Théorème de Pascal montre que les côtés opposés de l'hexagrame $H_C A' H_B C' H_A B'$ se coupent en trois points L, M, N alignés, et le dessin fait avec Geogebra semble montrer que la droite (LMN) passe par le centre O du cercle circonscrit à ABC et l'orthocentre H du triangle ABC . La droite (LMN) serait donc la droite d'Euler du triangle ABC .

On peut obtenir d'autres alignements sur la FIG. 5 en utilisant des hexagones inscrits dans le cercle d'Euler dont les sommets sont choisis parmi les 9 points "spéciaux" qui appartiennent à ce cercle.

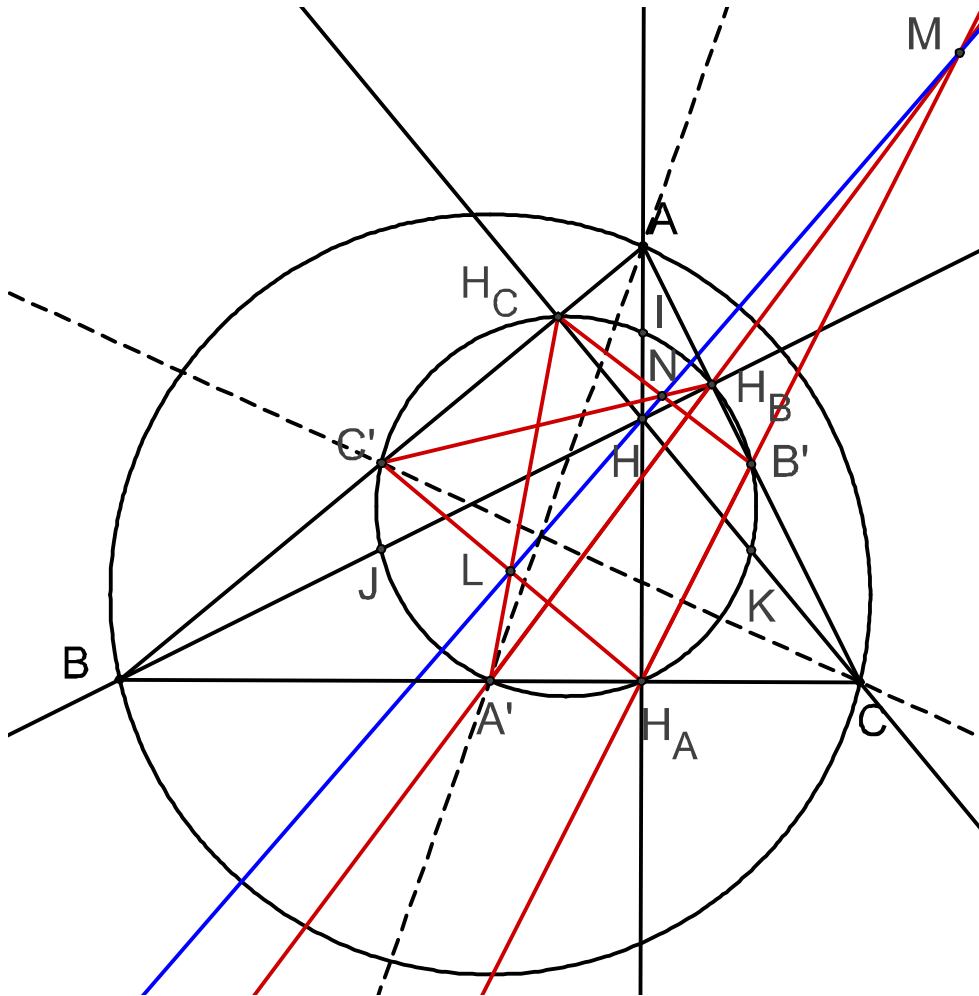


Figure 5: Hexagrame de Pascal dans le cercle d'Euler