

# Introduction aux espaces projectifs, preuves des théorèmes de Pappus et de Desargues, dualité.

Dany-Jack Mercier

CRREF / IREM de Guadeloupe  
(Année 2009-10)

# 1. INTRODUCTION

► Dans un plan affine, deux droites peuvent ne pas se couper. Cela nous oblige à envisager de nombreux cas particuliers qui alourdissent les démonstrations.

► Dans un espace affine de dimension finie sur  $K$ , quelle est la dimension de  $\text{Aff}(F \cup G)$  ? Si  $A \in F$  et  $B \in G$ , on envisage 2 cas :

- Si  $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ , alors  $F \cap G \neq \emptyset$ ,  $F \cap G$  est un s.e.a. de direction  $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$ , et  $\text{Aff}(F \cup G)$  est de direction  $\text{Vect}(\overrightarrow{F} \cup \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Aff}(F \cup G)) &= \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \\ &= \dim \overrightarrow{F} + \dim \overrightarrow{G} - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \end{aligned}$$

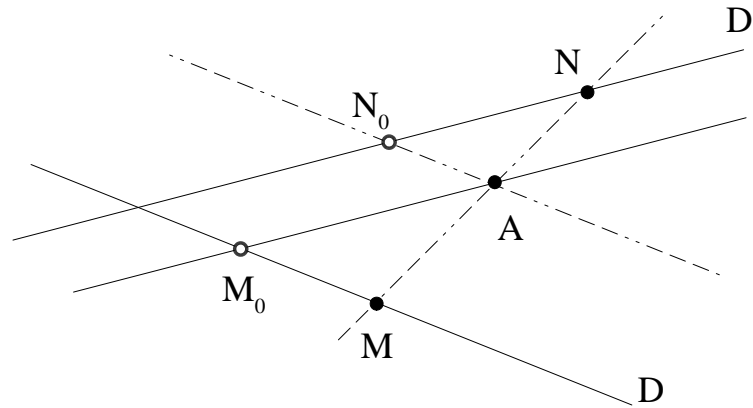
- Si  $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ , alors  $F \cap G = \emptyset$  et  $\text{Aff}(F \cup G)$  est de direction  $\text{Vect}(\overrightarrow{F} \cup \overrightarrow{G} \cup \{\overrightarrow{AB}\})$ , donc

$$\begin{aligned}
 \dim(\text{Aff}(F \cup G)) &= \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} + K\overrightarrow{AB}) \\
 &= \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) + 1 \\
 &= \dim \overrightarrow{F} + \dim \overrightarrow{G} - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) + 1 \\
 &= \dim F + \dim G - \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) + 1.
 \end{aligned}$$

La formule  $\dim(\text{Aff}(F \cup G)) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$  n'est donc pas toujours vraie.

Peut-on imaginer un espace ressemblant fondamentalement à un espace affine, mais où deux sous-espaces s'intersectent toujours ?

► La figure ci-dessous représente deux droites sécantes  $D$  et  $D'$ , et un point  $A$  n'appartenant ni à  $D$ , ni à  $D'$ . La fonction  $f$  qui à  $M \in D$  associe  $N \in D'$  tel que  $M, A, N$  soient alignés, n'est pas définie sur tout  $D$ .



$M_0$  n'a pas d'image, et  $N_0$  n'a pas d'antécédent. Pour traiter cette pathologie, on peut adjoindre des "points à l'infini"  $\infty_D$  et  $\infty_{D'}$  aux droites  $D$  et  $D'$ , puis poser  $f(\infty_D) = N_0$  et  $f(M_0) = \infty_{D'}$ .

La correspondance  $f : D \cup \{\infty_D\} \rightarrow D' \cup \{\infty_{D'}\}$  devient une bijection !

Une "droite" ne peut-elle pas être considérée comme une droite affine standard  $D$  augmentée d'un point à l'infini qui caractérise sa direction (le fameux point  $\infty_D$ ) ?

C'est l'ingénieur militaire français Girard Desargues (1591-1661) qui le premier définit le plan projectif comme un plan "usuel" auquel on rajoute des points à l'infini correspondant, chaque fois, à des directions de droites, deux droites parallèles se coupant toujours en un point à l'infini.

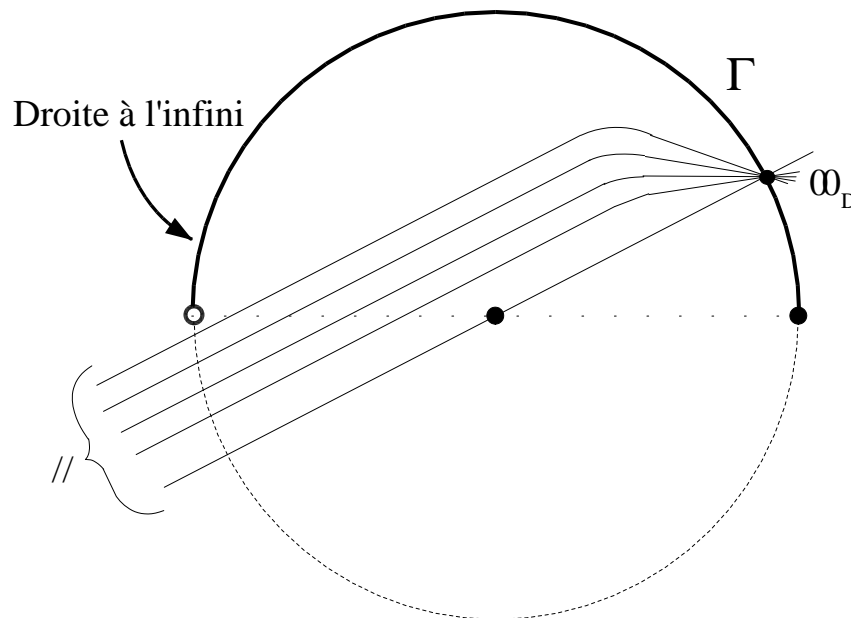
Desargues continua les travaux des grecs Apollonius de Perge (III<sup>e</sup> s.av.J.-C.), Ménélaüs d'Alexandrie (I<sup>er</sup> s.ap.J.-C.) et Pappus d'Alexandrie (IV<sup>e</sup> s.ap.J.-C.) sur les sections coniques. Il s'intéressa à la perspective. Les théorèmes affines qui portent son nom s'énoncent d'une seule manière si l'on se place dans le plan projectif.

Si  $D$  est une droite du plan usuel  $E$ , notons  $\infty_D$  sa direction.

Le plan projectif  $\mathbb{P}(E)$  est l'ensemble :

$$\mathbb{P}(E) = E \cup D_\infty$$

où  $D_\infty = \{\infty_D / D \text{ droite de } E\}$  représente la "droite à l'infini".



## 2. DEFINITION RIGoureuse D'UN ESPACE PROJECTIF



Dans toute la suite,  $K$  désigne un corps commutatif.

**Définition 1** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension fini sur  $K$ . **L'espace projectif** associé à  $E$  est l'ensemble quotient de  $E \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* \quad x = \lambda y.$$

On le note  $\mathbb{P}(E)$ , de sorte que  $\mathbb{P}(E) = (E \setminus \{0\}) / \mathcal{R}$ .

La classe d'équivalence  $\dot{x}$  de  $x \in E \setminus \{0\}$  suivant  $\mathcal{R}$  est la droite  $\text{Vect}(x)$  engendrée par  $x$  privée du vecteur nul.  $\mathbb{P}(E)$  est donc en bijection naturelle avec l'ensemble des droites vectorielles de  $E$ .

La surjection canonique  $p : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$  est définie par  $p(x) = \dot{x}$ .

On confondra cette surjection avec la fonction  $p : E \rightarrow \mathbb{P}(E)$  qui reste surjective, mais n'est plus définie sur  $E$  tout entier.

**Définition 2** La dimension de  $\mathbb{P}(E)$  est  $\dim \mathbb{P}(E) = \dim E - 1$ . On dit que  $\mathbb{P}(E)$  est une droite (resp. un plan) projectif si  $\dim \mathbb{P}(E) = 1$  (resp. 2).

**Définition 3** Si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(K^{n+1})$  est l'espace projectif standard de dimension  $n$  sur  $K$ . On note indifféremment  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$ .

**Définition 4** Si  $\overrightarrow{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , l'ensemble  $F = p(\overrightarrow{F})$  est appelé **sous-espace projectif** de  $\mathbb{P}(E)$  associé à  $\overrightarrow{F}$ , et sa dimension est, par définition :  $\dim F = \dim \overrightarrow{F} - 1$ .

► Poser  $\dim F = \dim \overrightarrow{F} - 1$  respecte notre intuition : si  $\overrightarrow{F}$  est une droite,  $F = p(\overrightarrow{F})$  est un singleton auquel on attribue la dimension  $\dim \overrightarrow{F} - 1 = 0$ , ce qui est naturel !

**Théorème 1** Une intersection  $\bigcap_{i \in I} F_i$  de sous-espaces projectifs  $F_i$  associés à des sous-espaces vectoriels  $\vec{F}_i$  est un sous-espace projectif associé à  $\bigcap_{i \in I} \vec{F}_i$ .

Le Théorème 1 permet de définir le **sous-espace projectif engendré par une partie  $A$**  de  $\mathbb{P}(E)$ . On le note  $\text{Proj}(A)$ .

**Théorème 2** Si  $A \subset \mathbb{P}(E)$ , alors  $\text{Proj}(A) = p\left(\text{Vect}\left(p^{-1}(A)\right)\right)$ .

**Théorème 3 (Théorème des dimensions)**

1) Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(E)$ ,

$$\dim(\text{Proj}(F \cup G)) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

2) En particulier, si  $\dim F + \dim G \geq \dim \mathbb{P}(E)$ , l'intersection  $F \cap G$  n'est pas vide : deux droites du plan projectif seront toujours sécantes.

### 3. COORDONNEES HOMOGENES

**Définition 5** Soit  $e = (e_0, \dots, e_n)$  une base de l'espace vectoriel  $E$ . Soit  $M = p(x) \in \mathbb{P}(E)$ . Les **coordonnées homogènes** de  $M$  dans la base  $e$  sont les coordonnées de  $x$  dans cette base. Ces coordonnées sont définies à un coefficient multiplicatif non nul près. On note  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  un tel système de coordonnées homogènes de  $M$ . Ainsi

$$M = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \quad \Leftrightarrow \quad M = p\left(\sum_{i=0}^n x_i e_i\right).$$

**Définition 6** Les points  $P_0, P_1, \dots, P_k$  de  $\mathbb{P}(E)$  sont **projectivement indépendants** s'ils proviennent de vecteurs linéairement indépendants. On dit alors aussi que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_k)$  est **projectivement libre**.

**Définition 7** On suppose  $\dim \mathbb{P}(E) = n$ . Un **repère projectif** de  $\mathbb{P}(E)$  est la donnée d'une  $(n + 2)$ -liste  $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$  de points de  $\mathbb{P}(E)$  tels qu'il existe une base  $e = (e_0, \dots, e_n)$  de  $E$  avec

1)  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad P_i = p(e_i) = (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0)$  (le 1 est à la  $i$ -ième place),

2)  $P_{n+1} = (1 : 1 : \dots : 1)$ .

Les  $P_0, P_1, \dots, P_n$  sont les **points base**, et  $P_{n+1}$  est le **point unité**.

La donnée d'un repère projectif  $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$  de  $\mathbb{P}(E)$  permet de reconstituer très précisément une base  $e$  de  $E$  et d'introduire les coordonnées homogènes d'un point quelconque dans cette base (que l'on appellera coordonnées homogènes dans le repère projectif).

En effet, si  $e = (e_0, \dots, e_n)$  et  $e' = (e'_0, \dots, e'_n)$  sont deux bases de  $E$  vérifiant les conditions de la définition précédente, pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,

$$P_i = p(e_i) = p(e'_i) \Leftrightarrow \exists \lambda_i \in K^* \quad e'_i = \lambda_i e_i,$$

et

$$P_{n+1} = p\left(\sum_{i=0}^n e_i\right) = p\left(\sum_{i=0}^n e'_i\right) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* \quad \sum_{i=0}^n e'_i = \lambda \sum_{i=0}^n e_i$$

par conséquent  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Les bases  $e'$  et  $e$  sont proportionnelles, et l'on peut indifféremment choisir l'une ou l'autre pour déterminer les coordonnées homogènes d'un point du projectif.

On peut démontrer que :

**Théorème 4** *Une famille  $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$  de  $n + 2$  points de  $\mathbb{P}(E)$  est un repère projectif si et seulement si toute sous-famille de  $n + 1$  points est projectivement libre (c'est-à-dire si aucun hyperplan ne contient  $n + 1$  points parmi les  $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$ ).*

Ainsi :

- Trois points  $A, B, C$  de la droite projective forment un repère projectif si, et seulement si, ils sont distincts deux à deux.
- Quatre points  $A, B, C, D$  du plan projectif forment un repère projectif si et seulement si trois quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés.

Dans le plan projectif, une démonstration commence souvent par le choix d'un repère projectif "intéressant", bien adapté à la figure sur laquelle on travaille. Cela permet d'utiliser des équations de droites simples dans ce repère. Cette technique sera utilisée pour démontrer les Théorèmes de Pappus et de Desargues.



De façon naturelle :

**Définition 8** *On appelle système d'équations cartésiennes de  $F = p(\overrightarrow{F})$  dans le repère projectif  $(P_0, \dots, P_{n+1}) = (p(e_0), \dots, p(e_n), p(\sum_{i=0}^n e_i))$  tout système d'équations cartésiennes de  $\overrightarrow{F}$  dans la base  $(e_0, \dots, e_n)$ .*

► Par exemple, une droite du plan projectif  $\mathbb{P}^2(K)$  est formée de tous les points de coordonnées homogènes  $(x : y : z)$  telles que

$$ax + by + cz = 0$$

où  $(a, b, c) \in K^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Une telle équation est homogène.

► Deux points distincts  $A$  et  $B$  du plan projectif  $\mathbb{P}^2(K)$  déterminent une droite  $(AB)$ .

Dans un repère projectif de  $\mathbb{P}^2(K)$ , notons  $(a_0 : a_1 : a_2)$  et  $(b_0 : b_1 : b_2)$  les coordonnées homogènes de  $A$  et  $B$ . Notons  $a$  et  $b$  des vecteurs de  $K^3$  tels que  $A = p(a)$  et  $B = p(b)$ .

Un point  $M = p(x)$ , de coordonnées homogènes  $(x_0 : x_1 : x_2)$ , appartient à la droite  $(AB)$  si et seulement si le vecteur  $x$  appartient au plan vectoriel  $\text{Vect}(a, b)$  engendré par les vecteurs  $a$  et  $b$ . On peut donc écrire

$$M \in (AB) \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(a, b) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & a_0 & b_0 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

et obtenir ainsi une équation de  $(AB)$ .

## 4. LIEN AFFINE-PROJECTIF

## Les complémentaires d'hyperplans projectifs sont des espaces affines

Soit  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ . Si  $x \in \mathbb{P}^n$ , soit  $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  les coordonnées homogènes de  $x$  dans la base canonique de  $K^{n+1}$ .

Soit  $H_i$  l'hyperplan d'équation  $x_i = 0$  dans  $\mathbb{P}^n$  et  $A_i = \mathbb{P}^n \setminus H_i$  le complémentaire de cet hyperplan. On a

$$\begin{aligned} x \in A_i &\Leftrightarrow x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \quad \text{avec } x_i \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \left( \frac{x_0}{x_i} : \frac{x_1}{x_i} : \dots : \mathbf{1} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

(où le  $\mathbf{1}$  est à la  $i$ -ème position,  $0 \leq i \leq n$ ). On peut donc définir la bijection

$$\begin{aligned} f_i : \quad & K^n && \longrightarrow && A_i \\ & (x_0, x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) && \longmapsto && (x_0 : x_1 : \dots : \mathbf{1} : \dots : x_n) \end{aligned}$$

où le chapeau au dessus de  $x_i$  signifie que  $x_i$  est absent.

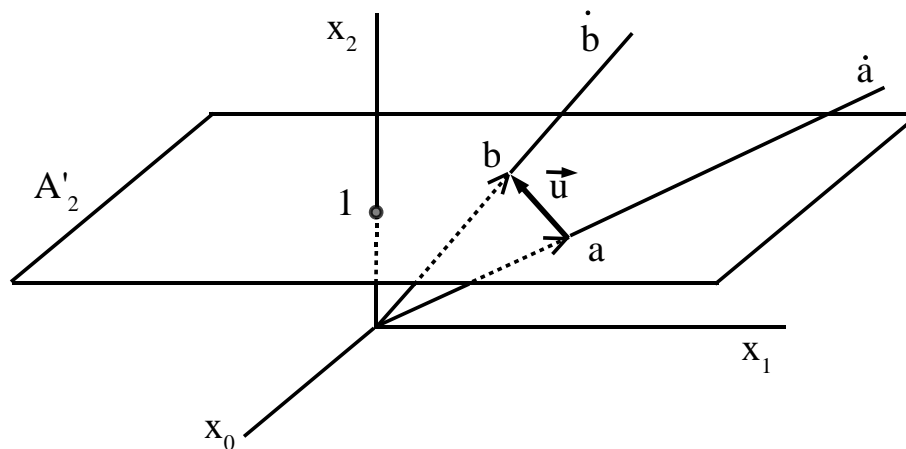
La bijection réciproque s'écrit :

$$f_i^{-1} : \quad A_i \quad \rightarrow \quad K^n \\ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

**Théorème 5** *L'ensemble  $A_i$  est structuré en espace affine par transport de la structure affine de l'espace vectoriel  $K^n$ .*

**Preuve** : Le groupe additif  $(K^n, +)$  agit simplement et transitivement sur  $A_i$  par l'action de groupe :

$$\varphi : \quad A_i \times K^n \quad \rightarrow \quad A_i \\ (a, x) \quad \mapsto \quad a + x = f_i \left( f_i^{-1}(a) + x \right).$$



**Visualisation** : Si  $A'_i$  désigne l'hyperplan affine de  $K^{n+1}$  d'équation  $x_i = 1$ , la bijection

$$g_i : \begin{array}{ccc} A'_i & \rightarrow & A_i \\ (x_0, x_1, \dots, 1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_0 : x_1 : \dots : 1 : \dots : x_n) \end{array}$$

est le pendant naturel de la bijection  $f_i : K^n \rightarrow A_i$ , et permet aussi de définir la structure affine sur  $A_i$ .

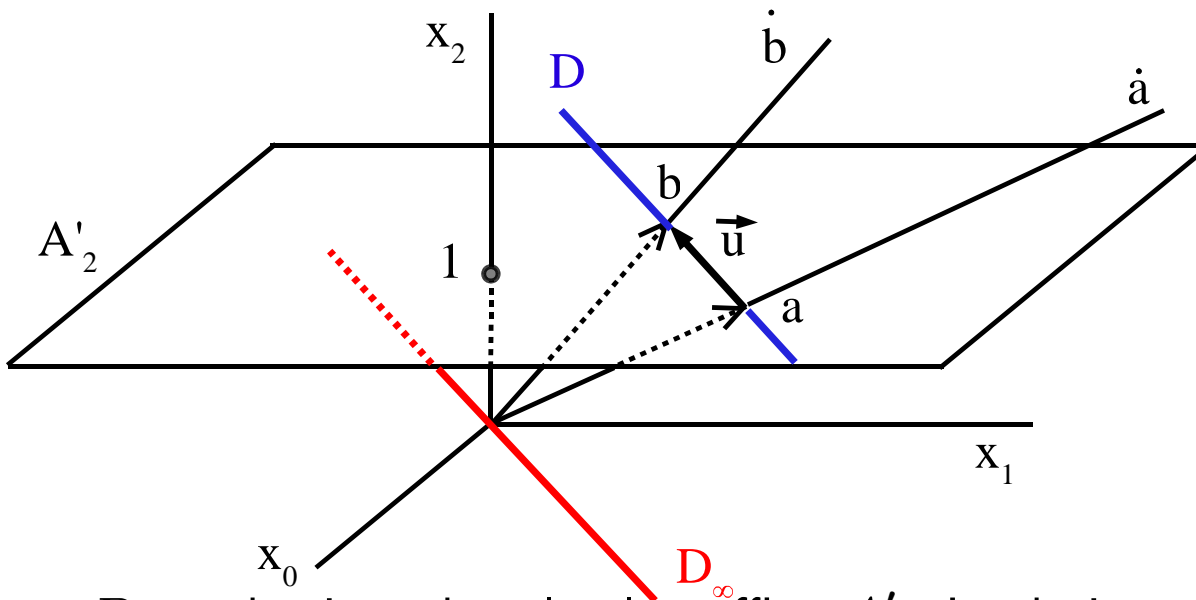
## Conséquences :

►  $\mathbb{P}^n$  est une variété différentielle de dimension  $n$  et de classe  $C^\infty$  : la famille  $\{(A_i, f_i^{-1})\}_{0 \leq i \leq n}$  est un atlas  $C^\infty$  de  $\mathbb{P}^n$ .

► Le complémentaire d'un hyperplan dans un espace projectif de dimension  $n$  est un espace affine de dimension  $n$ .

► Tout espace affine  $E$  de dimension finie peut être plongé dans un espace projectif de même dimension. Il est alors isomorphe au complémentaire d'un hyperplan projectif. Si le plongement est noté  $f_i : E \simeq K^n \rightarrow A_i$ , les éléments de  $H_i = \mathbb{P}^n \setminus A_i$  sont appelés **points à l'infini** de  $E$ . L'hyperplan  $H_i$  est appelé **hyperplan à l'infini** de  $A_i$ . On le note  $A_i^\infty$ , et :

$$\mathbb{P}(K^n) = A_i \sqcup H_i = A_i \sqcup A_i^\infty.$$



La droite bleue  $D$  est dessinée dans le plan affine  $A'_2$ . La droite rouge  $D_\infty$  est le point à l'infini sur  $D$ , et la droite projective complète  $(\dot{a}\dot{b})$  est la réunion :  $(\dot{a}\dot{b}) = D \sqcup \{D_\infty\}$ . On a

$$\mathbb{P}(K^3) = A'_2 \sqcup \mathbb{P}(A'_2) = K^2 \sqcup \mathbb{P}(K^2)$$

puisque  $\mathbb{P}(A'_2)$  est l'ensemble des droites de  $A'_2$ . On retrouve la description d'un plan projectif donnée dans l'introduction.



## Visualisation du plan affine plongé dans le projectif :

- ▶ Le plan affine  $E$  est identifié à la carte affine  $A_2$ .
- ▶ On choisit un repère projectif  $(O, I, J, K)$  formé de points de  $A_2$  :  
 $O(0 : 0 : 1)$  ;  $I(1 : 0 : 1)$  ;  $J(0 : 1 : 1)$  ;  $K(1 : 1 : 1)$ .
- ▶ Les coordonnées affines de ces points dans l'espace affine  $A_2$  sont :  
 $O(0, 0)$  ;  $I(1, 0)$  ;  $J(0, 1)$  ;  $K(1, 1)$ ,

où  $K$  est le point unitaire.

▶ Les points  $P_\infty(1 : 0 : 0)$  et  $Q_\infty(0 : 1 : 0)$  n'appartiennent pas à  $A_i$ , mais à l'hyperplan à l'infini  $H_2$  d'équation  $x_2 = 0$ . Ici,  $H_2$  est une "droite à l'infini". On a  $H_2 = (P_\infty Q_\infty)$ .

On peut attribuer des coordonnées affines à  $P_\infty$  et  $Q_\infty$ , même si cela est un tantinet provocateur !

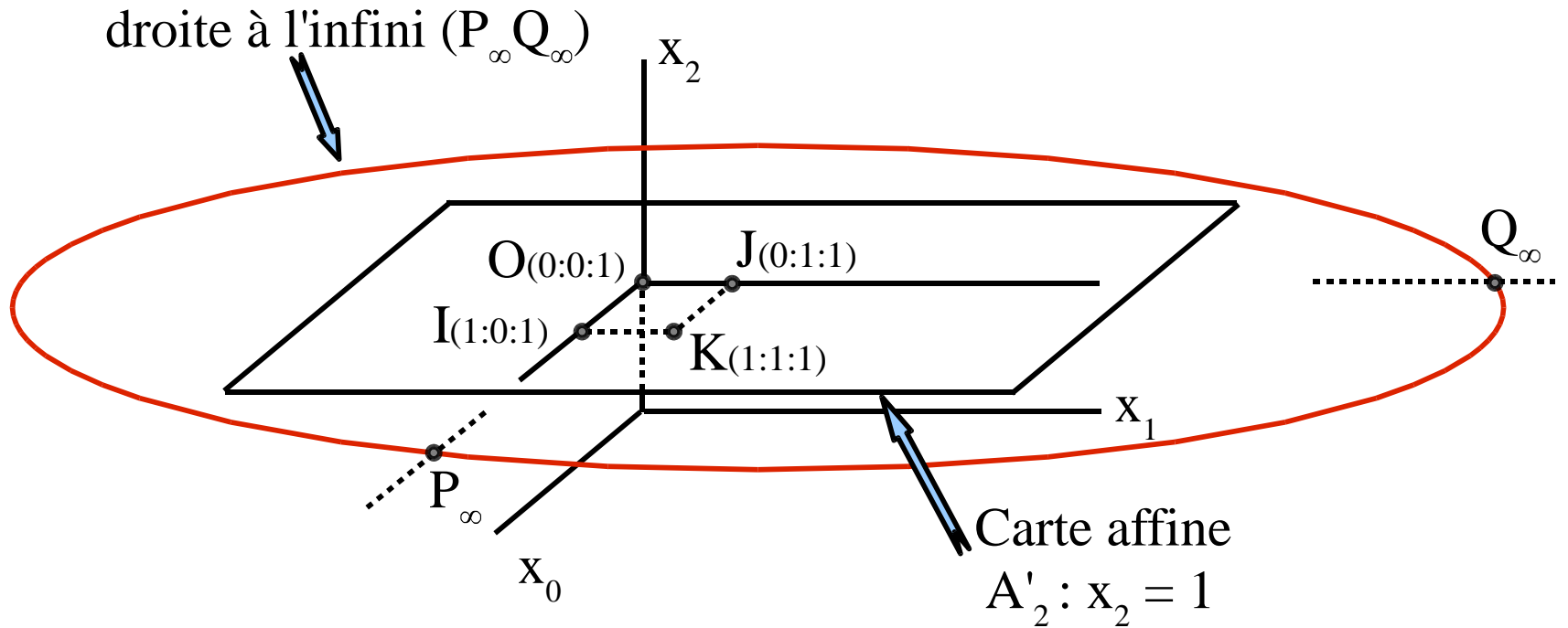
Notons que  $P_\infty \in (OI) \cap (JK)$  et  $Q_\infty \in (OJ) \cap (IK)$ .

On obtient le tableau :

Points	Coordonnées homogènes	Coordonnées affines
$O$	$(0 : 0 : 1)$	$(0, 0)$
$I$	$(1 : 0 : 1)$	$(1, 0)$
$J$	$(0 : 1 : 1)$	$(0, 1)$
$K$	$(1 : 1 : 1)$	$(1, 1)$
$P_\infty$	$(1 : 0 : 0)$	$(\infty, 0)$
$Q_\infty$	$(0 : 1 : 0)$	$(0, \infty)$

Tableau ( $T$ )

Et la visualisation :



La même figure sert à visualiser des droites parallèles de l'espace affine  $A_2$  qui se coupent en un point de la droite à l'infini  $(P_\infty Q_\infty)$ .

Une droite affine  $D_c$  de  $A_2$  de vecteur directeur  $\vec{u}(-b, a)$  admet une équation de la forme :

$$D_c : ax_0 + bx_1 + c = 0$$

dans le repère affine  $(O, I, J)$ , donc l'unique droite projective  $\widetilde{D}_c$  de  $\mathbb{P}(K^3)$  qui contient  $D_c$  sera :

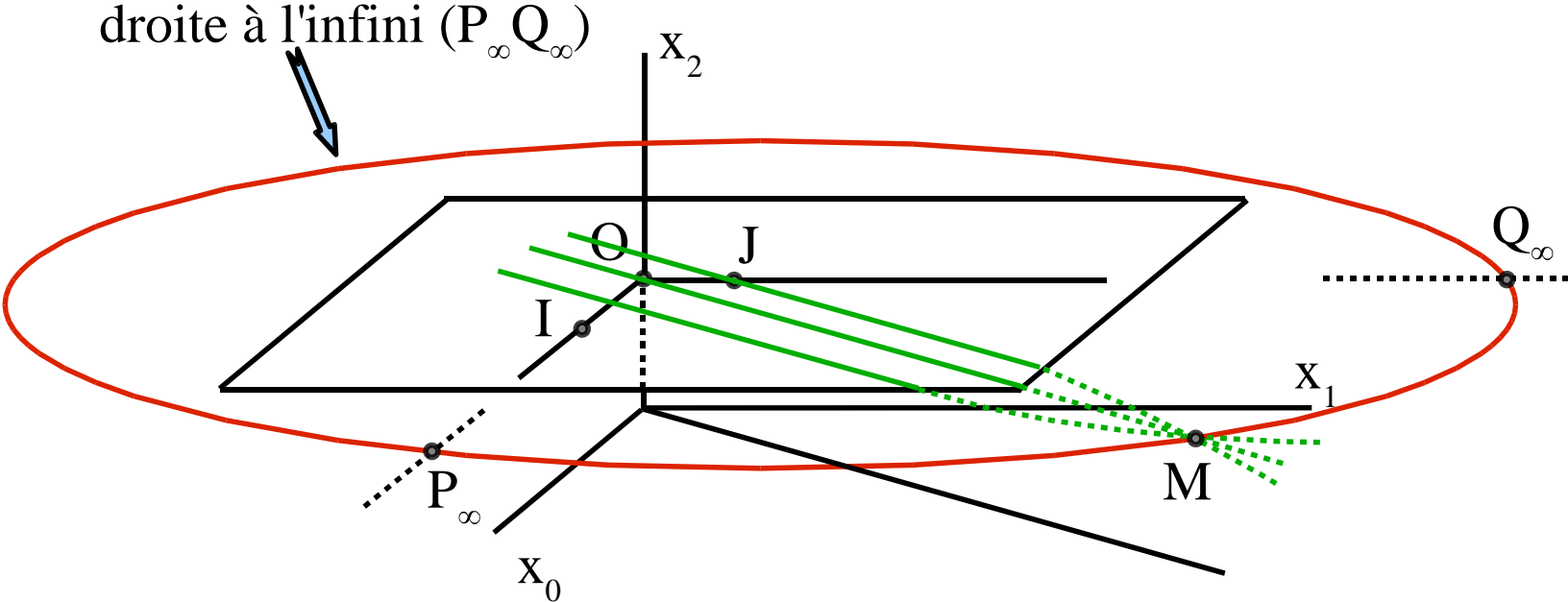
$$\widetilde{D}_c : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0.$$

On a  $\widetilde{D}_c \cap A_2 = D_c$  et  $\widetilde{D}_c \cap (P_\infty Q_\infty) = \{M\}$ , où  $M(\alpha : \beta : \gamma)$  s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

On trouve  $M(-b : a : 0)$ .

Voici la visualisation de ce phénomène :



## Le cas général ne pose pas de problème :

Si  $\dim \mathbb{P}(K^{n+1}) = n$ , la carte affine  $A_n = \mathbb{P}(K^{n+1}) \setminus H_n$  (où  $H_n$  d'équation  $x_n = 0$ ) est mise en valeur par le choix d'un repère projectif

$$\mathcal{R} = (O, I_1, \dots, I_n, K)$$

tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} O = (0 : 0 : \dots : 0 : 0 : 1) = p(e_0) \\ I_1 = (1 : 0 : \dots : 0 : 0 : 1) = p(e_1) \\ \dots\dots\dots \\ I_n = (0 : 0 : \dots : 0 : 1 : 1) = p(e_n) \\ K = (1 : 1 : \dots : 1 : 1 : 1) = p(e_0 + \dots + e_n). \end{array} \right.$$

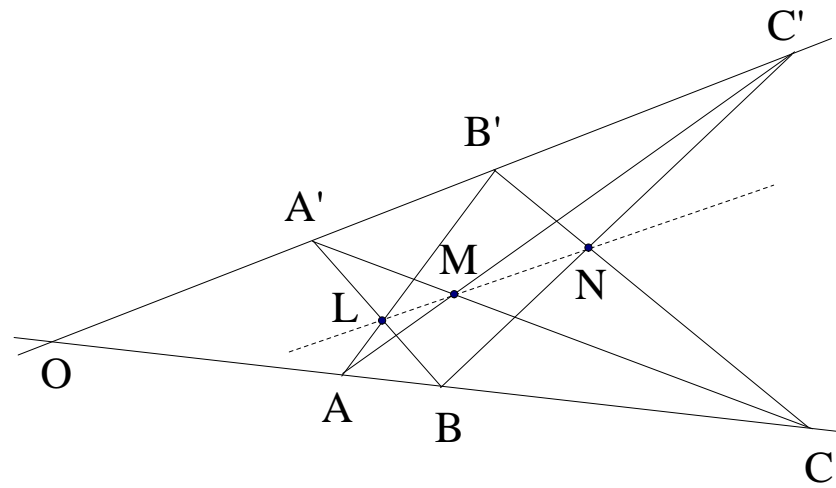
On obtient alors le tableau  $(T_n)$  :

Points	Coordonnées homogènes dans $\mathcal{R}$	Coordonnées affines dans $\mathcal{R}_a$
$O$	$(0 : 0 : \dots : 0 : 0 : 1)$	$(0, 0, \dots, 0, 0)$
$I_1$	$(1 : 0 : \dots : 0 : 0 : 1)$	$(1, 0, \dots, 0, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_n$	$(0 : 0 : \dots : 0 : 1 : 1)$	$(0, 0, \dots, 0, 1)$
$K$	$(1 : 1 : \dots : 1 : 1 : 1)$	$(1, 1, \dots, 1, 1)$

Tableau  $(T_n)$

## 5. PREUVE DU THEOREME DE PAPPUS



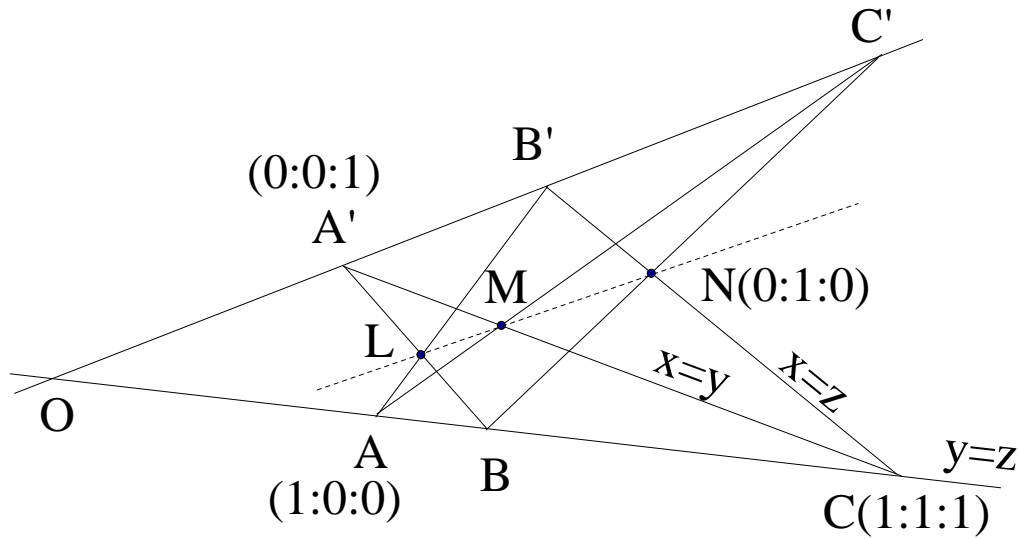


On choisit le repère projectif  $(A, N, A', C)$ , donc  $A(1 : 0 : 0)$ ,  $N(0 : 1 : 0)$ ,  $A'(0 : 0 : 1)$  et  $C(1 : 1 : 1)$ . On obtient 3 équations de droites :

$$(CA) : y = z ; \quad (CN) : x = z ; \quad (CA') : x = y.$$

Ces droites contiennent respectivement  $B$ ,  $B'$  et  $M$ , donc il existe  $p$ ,  $q$ ,  $r$  tels que  $B(p : 1 : 1)$ ,  $B'(1 : q : 1)$ ,  $M(1 : 1 : r)$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} (A'B') & : y = qx ; & (AM) & : z = ry ; & (BN) & : x = pz ; \\ (A'B) & : x = py ; & (AB') & : y = qz ; & (MN) & : z = rx. \end{aligned}$$

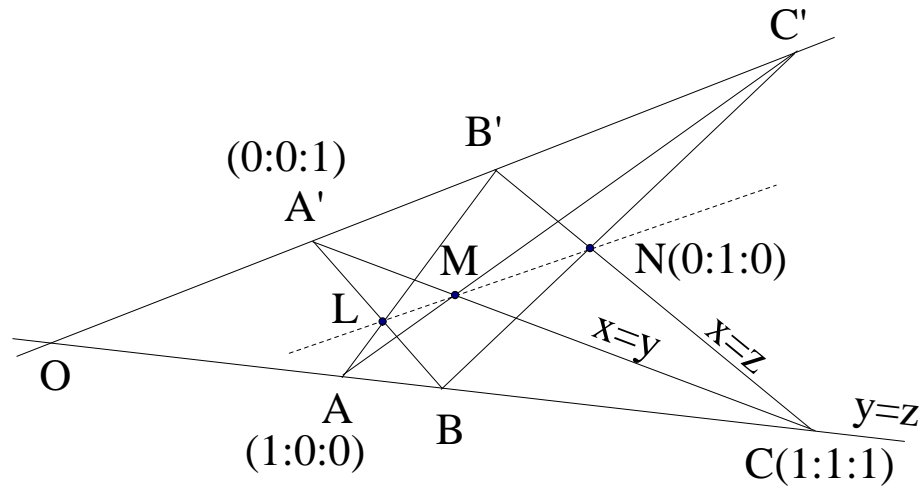


Puisque  $L \in (A'B) \cap (AB')$ , ses coordonnées homogènes  $(x : y : z)$  vérifient

$$\begin{cases} x = py \\ y = qz, \end{cases}$$

et montrer que  $L$  appartient à  $(MN)$  revient à prouver l'implication

$$\begin{cases} x = py \\ y = qz \end{cases} \Rightarrow z = rx. \quad (*)$$



$C'$  appartient aux droites  $(A'B')$ ,  $(AM)$  et  $(BN)$ , donc ses coordonnées homogènes vérifient

$$\begin{cases} y = qx \\ z = ry \\ x = pz \end{cases}$$

et  $xyz = prqxyz$ . Comme  $xyz \neq 0$  (si par ex.  $x = 0$ , alors  $x = y = z = 0$ , impossible), on obtient  $pqr = 1$ . D'où la preuve de l'implication  $(*)$  :

$$\begin{cases} x = py \\ y = qz \end{cases} \Rightarrow x = pqz \Rightarrow rx = pqrz \Rightarrow z = rx. \blacksquare$$

6. LES CAS DE FIGURES  
DU THEOREME DE PAPPUS EN AFFINE

On a évité l'étude de 6 cas de figures. Si l'on pose

$$\mathcal{T} = \{((A'B), (AB')), ((A'C), (AC')), ((B'C), (BC'))\},$$

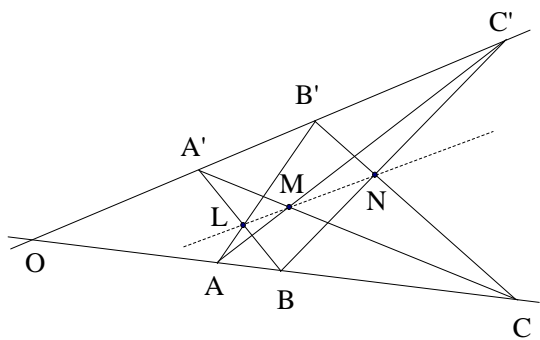
les cas à envisager sont les suivants :

▷ Si  $D$  et  $D'$  sont sécantes,

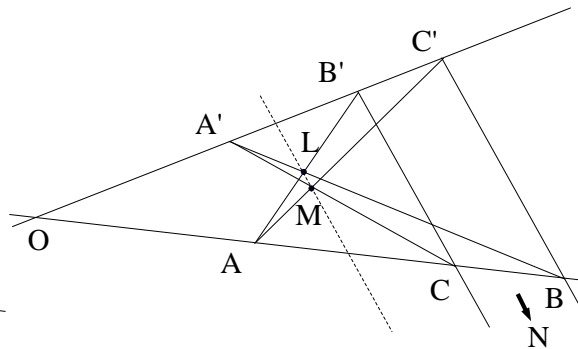
- Cas n°1 : Tous les couples de  $\mathcal{T}$  sont formés de droites sécantes,
- Cas n°2 : Seulement deux couples de  $\mathcal{T}$  sont formés de droites sécantes,
- Cas n°3 : Tous les couples de  $\mathcal{T}$  sont formés de droites parallèles.

▷ Si  $D$  et  $D'$  sont parallèles,

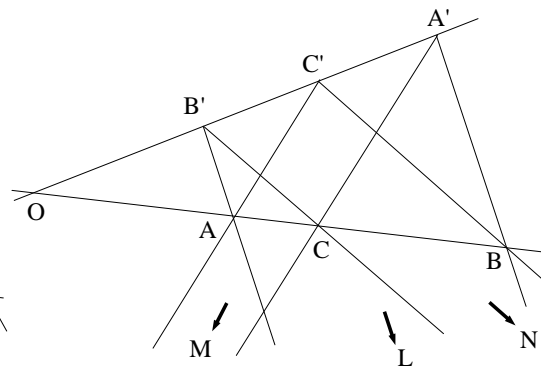
- Cas n°4 : Tous les couples de  $\mathcal{T}$  sont formés de droites sécantes,
- Cas n°5 : Seulement deux couples de  $\mathcal{T}$  sont formés de droites sécantes,
- Cas n°6 : Tous les couples de  $\mathcal{T}$  sont formés de droites parallèles.



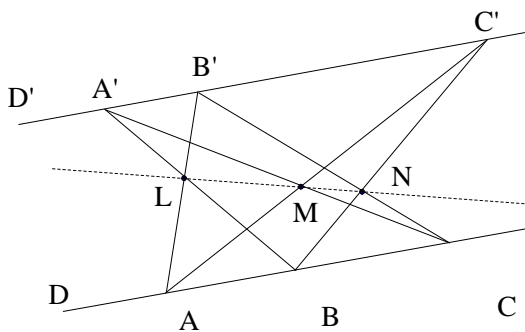
Pappus, Cas n°1



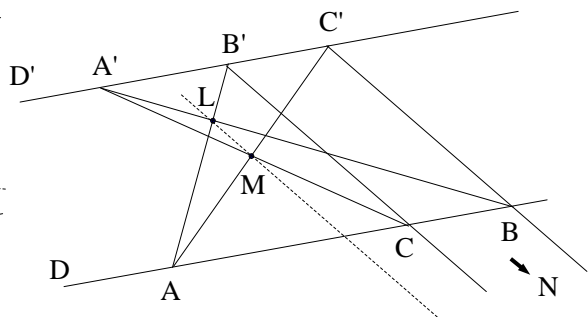
Pappus, Cas n°2



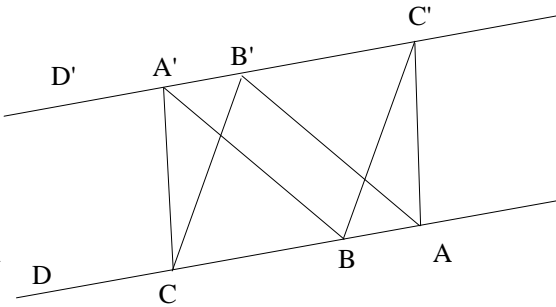
Pappus, Cas n°3



Pappus, Cas n°4



Pappus, Cas n°5



Pappus, Cas n°6

7. ET LE THEOREME DE DESARGUES ?

Dans le repère  $(A, A', A'', O)$  :

$$A(1 : 0 : 0), \quad A'(0 : 1 : 0),$$

$$A''(0 : 0 : 1), \quad O(1 : 1 : 1),$$

$$D = (OA) : \quad y = z ;$$

$$D' = (OA') : \quad x = z ;$$

$$D'' = (OA'') : \quad x = y ;$$

$$(AA') : \quad z = 0 ;$$

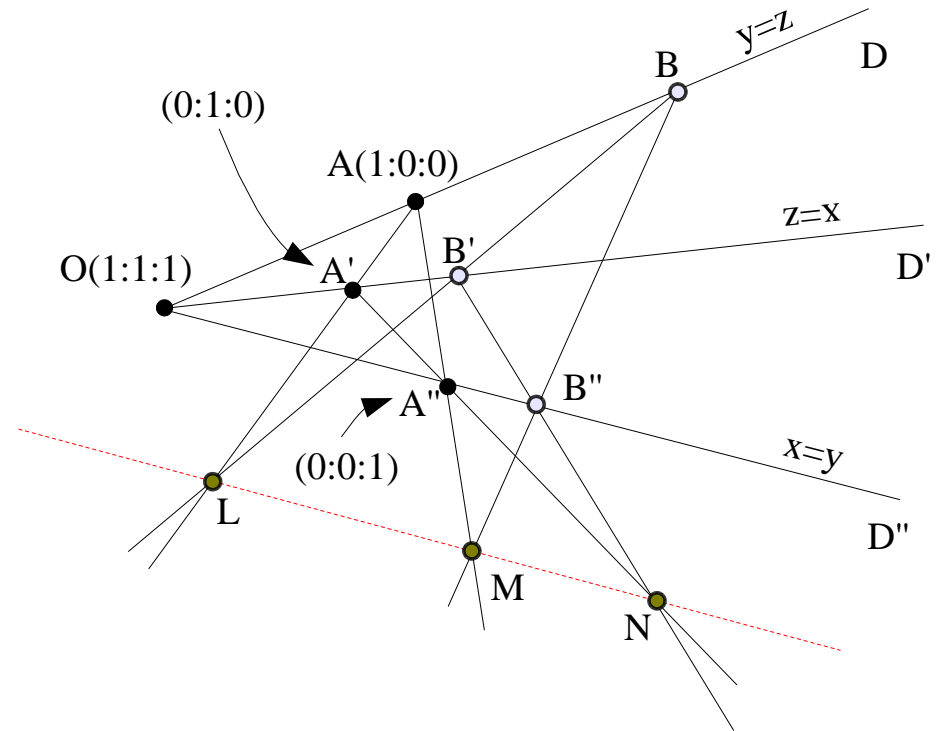
$$(AA'') : \quad y = 0 ;$$

$$(A'A'') : \quad x = 0 .$$

$$B \in (OA) \Rightarrow B(p : 1 : 1) ;$$

$$B' \in (OA') \Rightarrow B'(1 : q : 1) ;$$

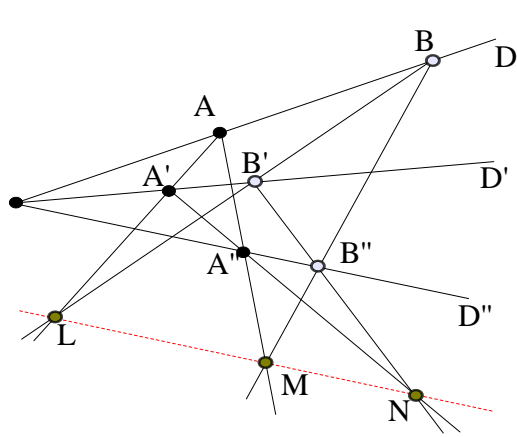
$$B'' \in (OA'') \Rightarrow B''(1 : 1 : r) .$$



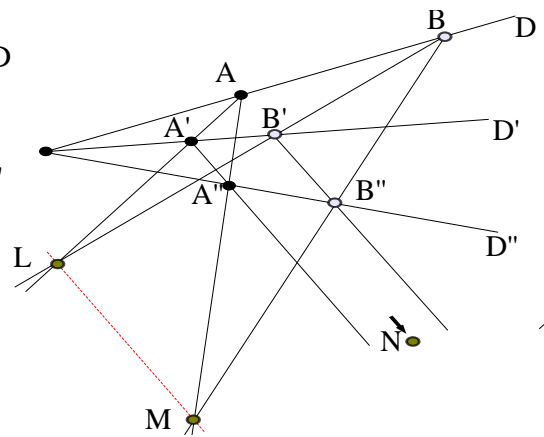
La preuve consiste alors à chercher les coordonnées homogènes de  $L$ ,  $M$  et  $N$ , puis vérifier que ces points sont alignés en annulant un déterminant  $3 \times 3$ . Les détails sont donnés dans mon article complet [3].



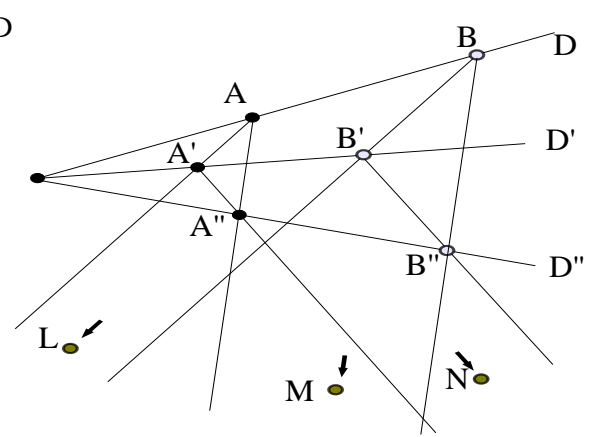
# 8. LES CAS DE FIGURES DU THEOREME DE DESARGUES EN AFFINE



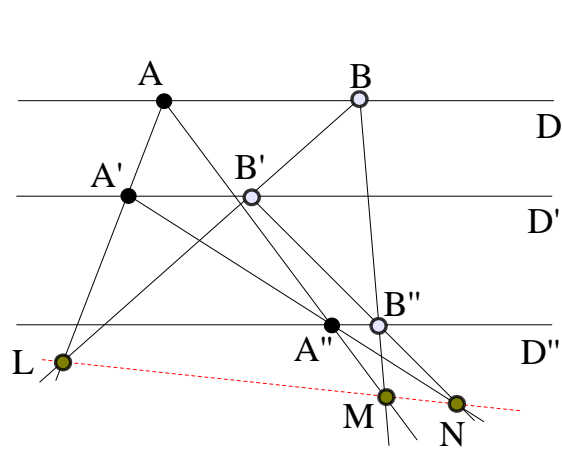
Desargues, Cas n°1



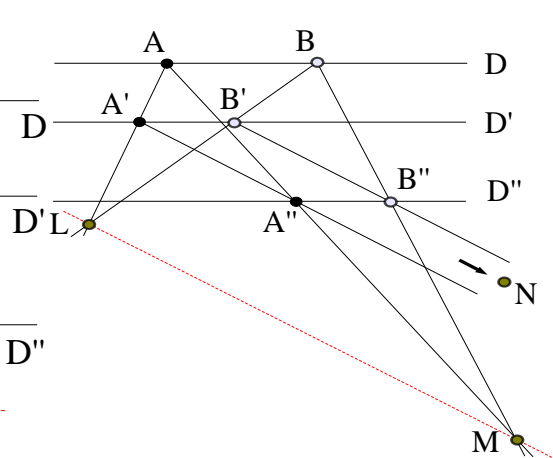
Desargues, Cas n°2



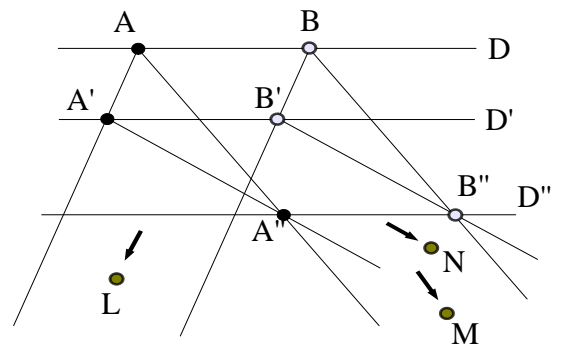
Desargues, Cas n°3



Desargues, Cas n°4



Desargues, Cas n°5



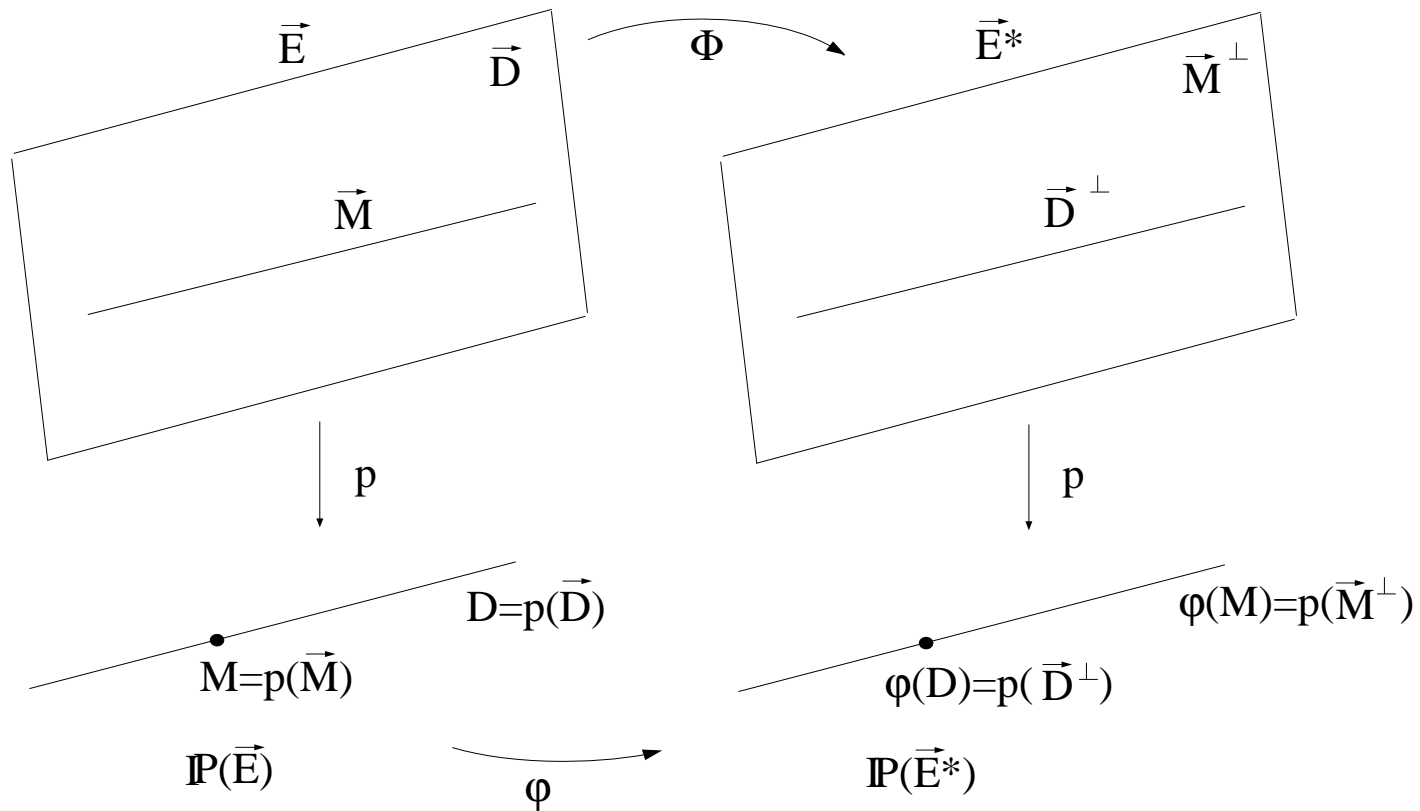
Desargues, Cas n°6

## 9. DUALITE

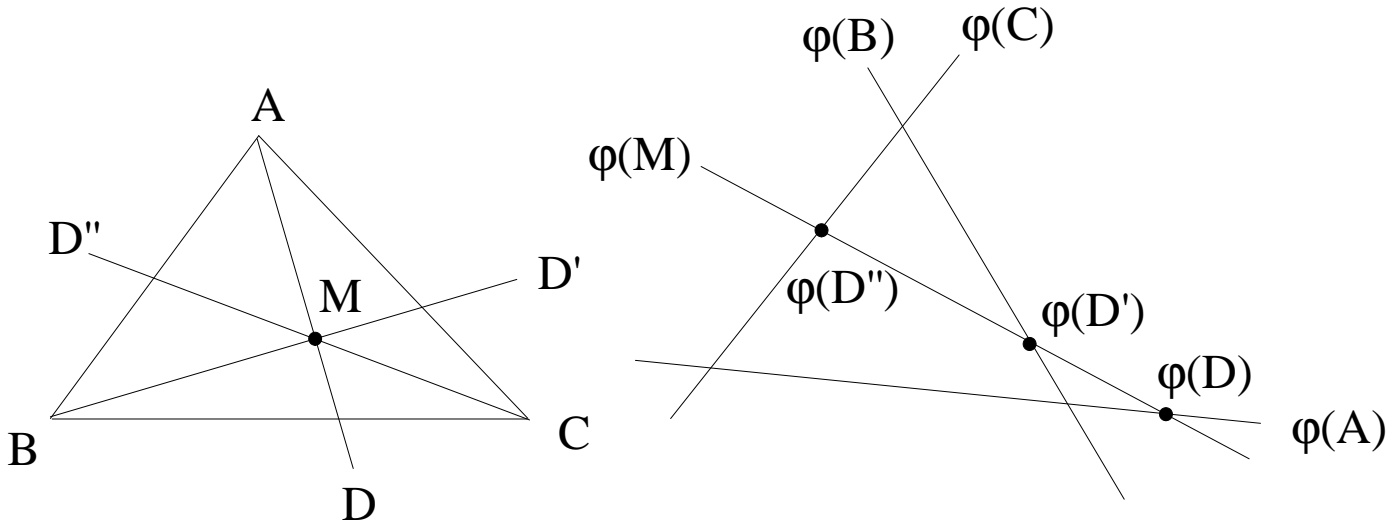
Soient  $\vec{E}^*$  le dual de  $\vec{E}$ ,  $E = \mathbb{P}(\vec{E})$  et  $E^* = \mathbb{P}(\vec{E}^*)$ .

On définit une application  $\varphi : E \rightarrow E^*$  qui :

- à un point de  $E$  associe une droite de  $E^*$ ,
- à une droite de  $E$  associe un point de  $E^*$ .

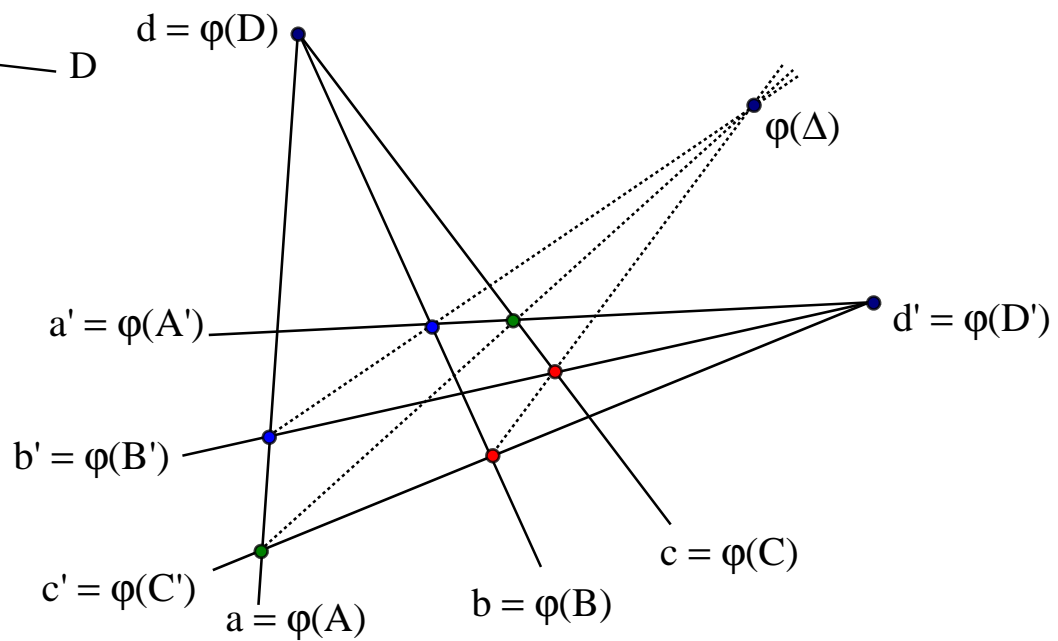
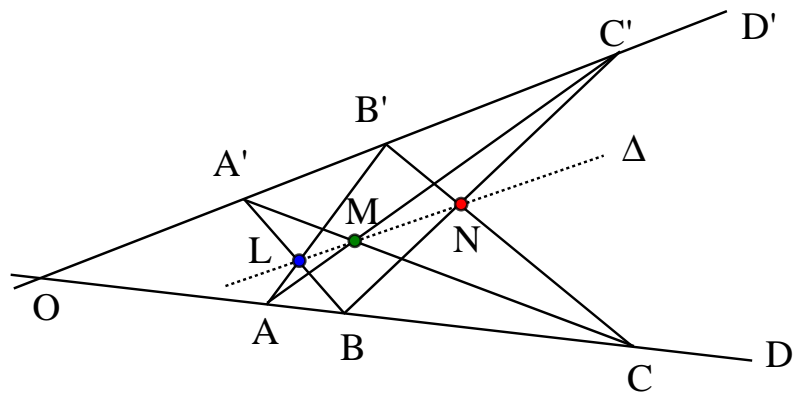


Les configurations de Ceva et de Ménélaüs sont duales :

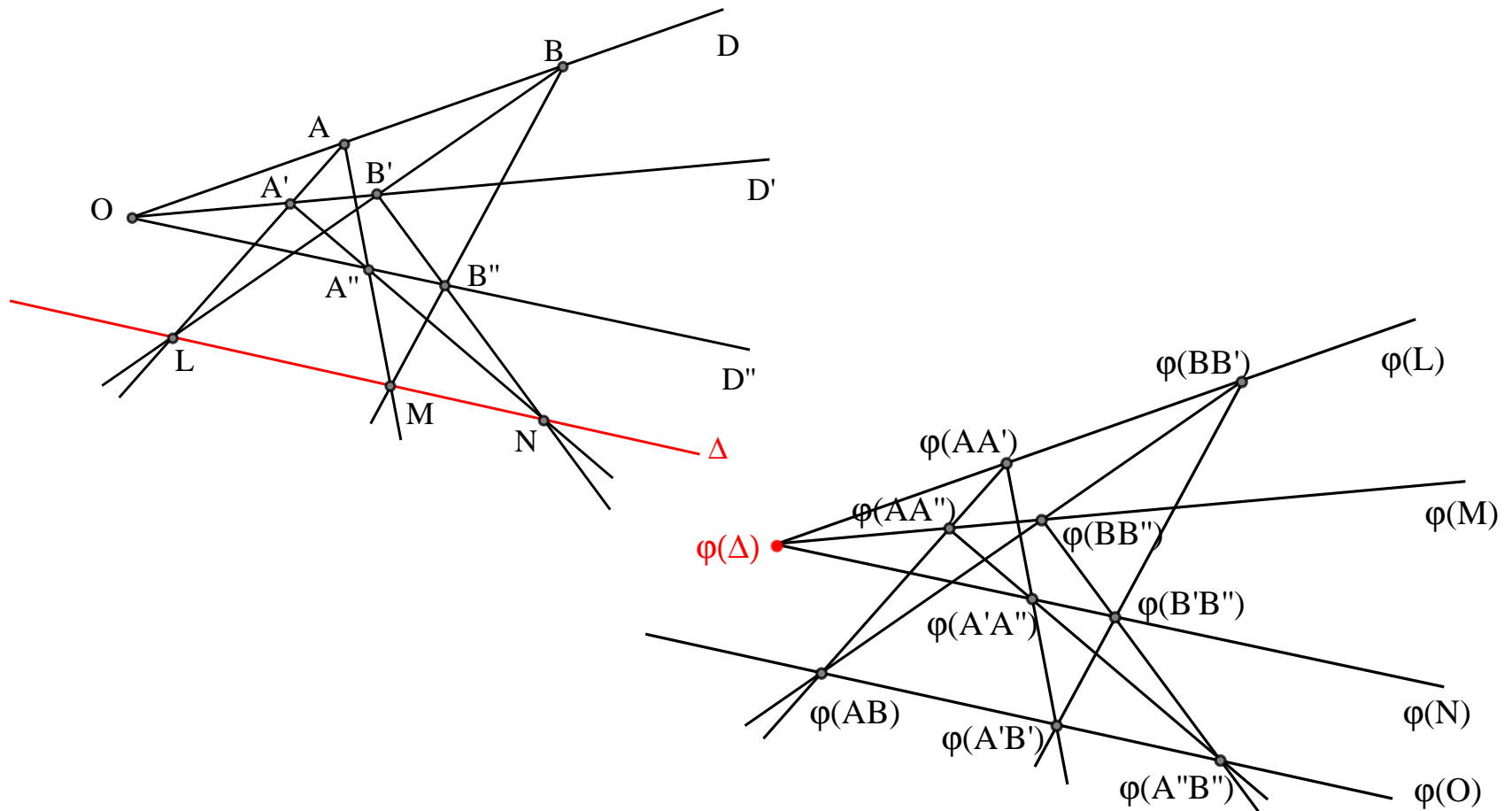


La transformation des figures par  $\varphi$  permet de déduire de nouveaux théorèmes de façon mécanique (lorsqu'il s'agit de situations d'alignement et/ou de concours). Nous allons voir deux exemples...

Premier exemple : Le dual du Théorème de Pappus.



*Deuxième exemple* : La réciproque du Théorème de Desargues est vraie, c'est l'énoncé dual de l'énoncé de Desargues ! Ce théorème est donc **autodual**.



## Références :

- [1] D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2004.
- [2] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, 14 leçons rédigées et commentées, Vol. I, Publibook, 2004.
- [3] D.-J. Mercier, Introduction aux espaces projectifs, preuves des théorèmes de Pappus et de Desargues, dualité, LMEC (Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement et les Concours), Vol. I, pp. 95-150, 2009.
- [4] J.-C. Sidler, Géométrie projective, Cours, exercices et problèmes corrigés, Dunod, 2ème édition, 1993.
- [5] X. Siefridt, Espaces projectifs, RMS 1989-90, n°8, 1990.
- [6] P. Samuel, Géométrie projective, PUF, 1986

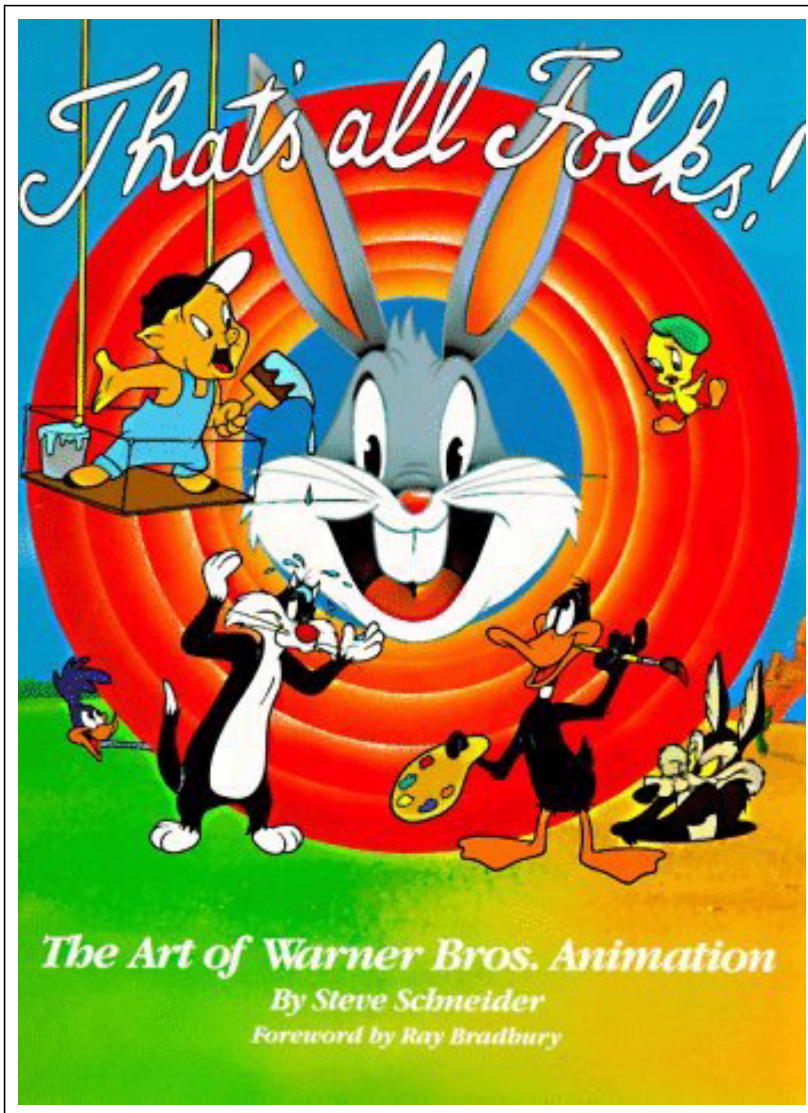


► Retrouvez cet article moult développé dans le premier numéro de la revue LMEC paru en 2009 :

*Lectures sur les Mathématiques,  
l'Enseignement & les Concours ;*

et proposez-moi des articles pour les numéros suivants !

► Sommaire du premier numéro : **L. Chélamie** : *L'apprentissage de l'autonomie devant un énoncé mathématique en classe de sixième.* ★ **D. Hoareau** : *Histoires de groupes.* ★ **D.-J. Mercier** : *Introduction aux espaces projectifs, preuves des théorèmes de Pappus et de Desargues, dualité.* ★ **D.-J. Mercier** : *Polyèdres eulériens et solides pathologiques.* ★ **R. Rolland** : *Outils élémentaires de l'analyse.* ★ **J.-E. Rombaldi** : *Accélération de la convergence des suites réelles.* ★ **A. de Saint Julien** : *Matrices toutes puissantes.*



*That's all Folks!*

*The Art of Warner Bros. Animation*

*By Steve Schneider*

*Foreword by Ray Bradbury*

Envoyez vos contributions : <http://megamaths.perso.neuf.fr/exgeo/revueLMEC.html>

Colloques et revues - Cours - Recherches

L. Chélamie, D. Hoareau, R. Rolland, J.-E. Rombaldi, A. de Saint Julien

Sous la direction de

Dany-Jack Mercier

# Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours

Volume I

  
EPU  
Éditions Publiques  
Université

Sciences  
*Mathématiques*