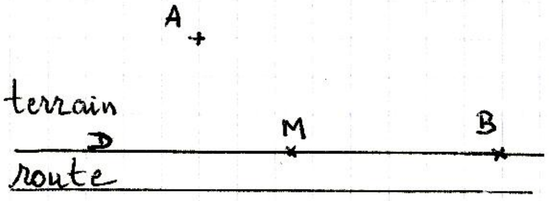
Activités Mathématiques de 1ère S.

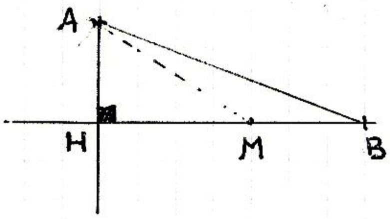
Meilleur trajet pour un tracteur.

Je suis "superintelligent tracteur" et pendant que mon maître charge la remorque je prévois, tel un GPS, le meilleur itinéraire pour aller du point A où je suis au point B où se trouve mon garage, je peux passer du terrain à la route en n'importe quel point M de la droite D



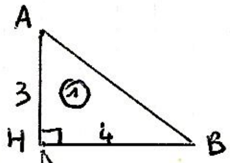
Le trajet <u>le plus court</u> c'est la ligne droite ou plutôt [AB]
L'itinéraire <u>le plus rapide</u>, je vais le chercher car j'ai hâte de me mettre au chaud et mon maître sera content de gagner du temps et peut-être du fuel, or je vais 2 fois plus vite sur la route que dans le champ, autrement dit
un trajet de longueur l dans le terrain(tt) équivaut à
un trajet de longueur 2l ~~sur~~ sur la route (tr).

- Et si j'allais "tout droit" sur la route au point H pied la perpendiculaire à D menée de A, AH étant la plus courte distance donc la distance de A à D.



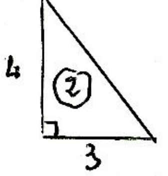
Je tombe sur des triangles rectangles et je me tourne soit vers
I mon ami Pythagore soit vers
II le trio mixte bien sympa Sin, Cos, Tan

Quelques cas très particuliers (pour faire chauffer le moteur)



trajet direct AB 5 tt donc 10 tr

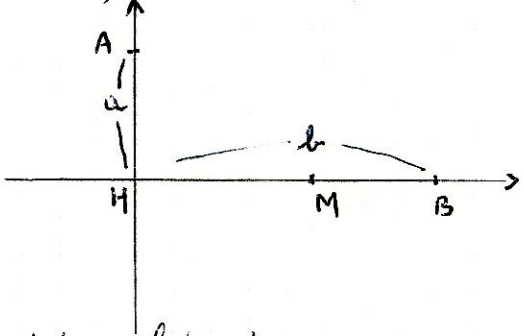
trajet AHB fig 1 3 tt (6 tr) et 6+4=10 tr



trajet AHB fig 2 4 tt (8 tr) et 8+3= 11 tr

I Dans le cas général, je n'échappe pas aux $\sqrt{\ }$ (moi les racines, j'aime : carottes, navets, betteraves !) alors

je choisis un repère



des paramètres $a = HA$ $b = HB$

V la vitesse sur le terrain car elle change avec le temps et la charge que je trimbale, je choisis des unités cohérentes,

$2V$ est donc la vitesse sur route

Je détermine M par son abscisse x, $x \in [0, b]$

Durée du trajet

$$D(x) = \frac{AM}{V} + \frac{MB}{2V} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{V} + \frac{b-x}{2V} = \frac{1}{2V}\left[2\sqrt{x^2+a^2} - x + b\right]$$

J'étudie $f(x) = 2\sqrt{x^2+a^2} - x + b$ définie sur $\mathbb{R}^+$ (et même sur $\mathbb{R}$) et qui n'est valable pour mon problème que sur $[0, b]$

$$f'(x) = 2\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2+a^2}}{2\sqrt{(x^2+a^2)}},$$

$f'(x)$ est du signe de $2x - \sqrt{x^2+a^2}$ et aussi ($2x + \sqrt{x^2+a^2}$ étant positif sur $\mathbb{R}^+$) de $(2x - \sqrt{x^2+a^2})(2x + \sqrt{x^2+a^2})$

soit $4x^2 - (x^2+a^2) = 3x^2 - a^2 = 3\left(x^2 - \frac{a^2}{3}\right) = 3\left(x - \frac{a}{\sqrt3}\right)\left(x + \frac{a}{\sqrt3}\right)$

sur $\mathbb{R}^+$ $x + \frac{a}{\sqrt3} > 0$

x	0		$a/\sqrt3$		$+\infty$
$x - \frac{a}{\sqrt3}$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	m	↗	

$f(x)$ admet un minimum pour $x = \frac{a}{\sqrt3}$

Je reviens à $x \in [0, b]$

1^e cas $b \leq \frac{a}{\sqrt3}$

x	0		b	$a/\sqrt3$
$D(x)$		↘		

$D(x)$ est "minimum" pour $x = b$ et le trajet est $[AB]$

2^e cas $b > \frac{a}{\sqrt3}$

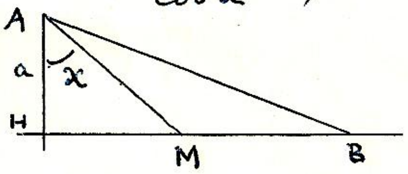
x	0		$a/\sqrt3$		b
$D(x)$		↘	m	↗	

$D(x)$ est minimum (vraiment) pour $x = \frac{a}{\sqrt3}$ alors

$\boxed{a = x\sqrt3} = 2x\frac{\sqrt3}{2}$ ça me dit quelque chose !

II Je repère M avec l'angle $\widehat{HAM}$ ($< \widehat{HAB}$) et sa mesure en radian x, $x \in [0, \alpha]$ avec $\alpha = mes_{rd}(\widehat{HAB})$

$AM = \dfrac{a}{\cos x}$, $HM = a \tan x = \dfrac{a \sin x}{\cos x}$ $BM = b - a \dfrac{\sin x}{\cos x}$



durée du trajet

$$D(x) = \frac{1}{2V} a \frac{2 - \sin x}{\cos x} + \frac{b}{2V}$$ valable pour $0 \leq x \leq \alpha$

$D(x)$ a le même sens de variation que $f(x) = \dfrac{2 - \sin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{-\cos^2 x - (2 - \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{-(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2 \sin x}{\cos^2 x}$$

qui est du signe de $2 \sin x - 1 = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\pi/2$
$\sin x$	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↗	1
$\sin x - \frac{1}{2}$	$-$	0	$+$

1er cas si $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$

x	0	α	$\frac{\pi}{6}$
$f'(x)$	$-$		$-$
$D(x)$	↘		

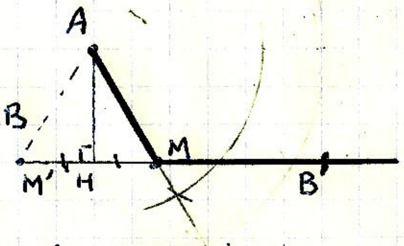
$D(x)$ décroît de $x = 0$ à $x = \alpha$ pour lequel elle est la plus petite

le trajet c'est $[AB]$

2e cas si $\alpha > \frac{\pi}{6}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	α
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$D(x)$	↘	m	↗

$D(x)$ est minimum pour $x = \dfrac{\pi}{6}$

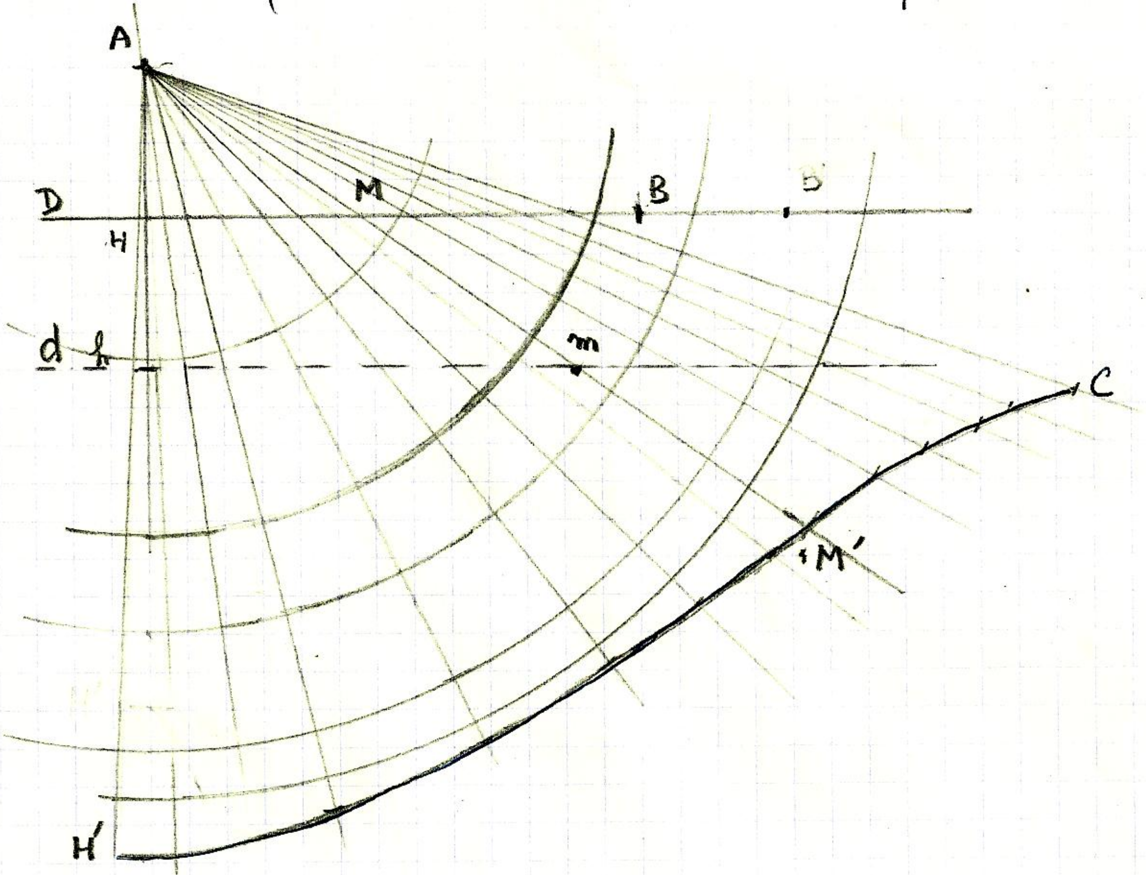


le trajet AMB est tel que le triangle AMM' est équilatéral ce qui confirme le I

III Solution approchée graphique

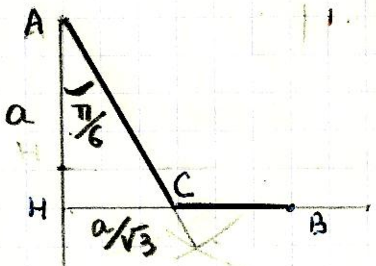
Et si je demandais à mon maître de planter des carottes ou des jalons dans le champ en face pour concrétiser pour chaque point M le trajet rectiligne sur route équivalent

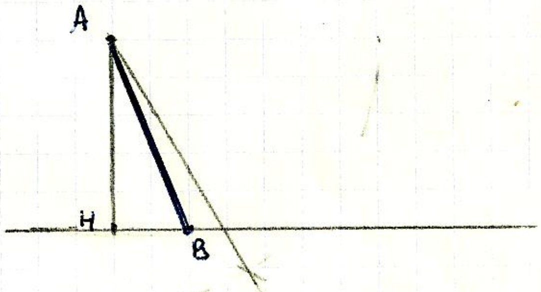
Il s'agît de prolonger AM de $Mm = AM$ puis de $mM' = MB$ (et mon maître a le compas dans l'oeil!)



Les carottes jalonnent une courbe et avec mes ondes radars je trouve le point de la courbe qui est le plus près de A.

IV Conclusion : 2 cas





$\frac{a}{\sqrt{3}} < b$ $\widehat{HAB} > \frac{\pi}{6}$

trajet le plus rapide

ACB

$b \leq \frac{a}{\sqrt{3}}$ $\widehat{HAB} \leq \frac{\pi}{6}$

trajet le plus rapide

AB

que je choisis pendant que mon maître téléphone à sa copine.