Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

21 avril 2004

1 Surface définie paramétriquement

Une surface Σ de $\mathbb{R}^3$ est définie paramétriquement comme l'image d'une application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)) \end{array}$$

suffisamment régulière, où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On suppose que φ est injective, qu'elle est de classe C^1 sur U et que son rang est maximum en tout point de U. Cette dernière condition signifie que la différentielle

$$d\varphi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

de φ en un point $(u_0, v_0) \in U$ est de rang 2. Si l'on note commodément

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

cela revient à dire que les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont indépendants.

Définition 1 *On appelle* ***plan vectoriel tangent*** *à Σ en $M_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \Sigma$ et l'on note $E_{M_0}(\Sigma)$ l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont tangents en M_0 à une courbe γ continûment différentiable dessinée sur la surface Σ.*

Théorème 1 *Au point $M_0 = \varphi(u_0, v_0)$,*

$$E_{M_0}(\Sigma) = \operatorname{Vect}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = \operatorname{Im} d\varphi(u_0, v_0).$$

[0] [csvd0001] v1.02 http://perso.wanadoo.fr/megamaths

Preuve : Soit

$$\begin{array}{rlcl} \gamma : & I \subset \mathbb{R} & \to & \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \left(\gamma_1\left(t\right), \gamma_2\left(t\right), \gamma_3\left(t\right)\right) \end{array}$$

un chemin continument différentiable, passant par M_0, et dessiné sur la surface Σ, c'est-à-dire tel que $\gamma\left(t\right) \in \Sigma$ pour tout t. Comme la différentielle $d\varphi\left(u_0, v_0\right)$ est de rang 2, l'un des déterminants d'ordre 2 de la matrice $d\varphi\left(u_0, v_0\right)$ n'est pas nul, par exemple

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\left(u_0, v_0\right) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\left(u_0, v_0\right) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\left(u_0, v_0\right) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\left(u_0, v_0\right) \end{array} \right| \neq 0.$$

Pour tout t il existe $\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\gamma\left(t\right) = \varphi\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right). \quad (1)$$

• Montrons d'abord que les fonctions $t \mapsto u\left(t\right)$ et $t \mapsto v\left(t\right)$ sont de classe C^1 en utilisant le Théorème des fonctions implicites. La fonction

$$\begin{array}{rlcl} F : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (t, u, v) & \mapsto & \left(F_1\left(t, u, v\right), F_2\left(t, u, v\right)\right) = \left(\varphi_1\left(u, v\right) - \gamma_1\left(t\right), \varphi_2\left(u, v\right) - \gamma_2\left(t\right)\right) \end{array}$$

est de classe C^1 et l'égalité

$$F\left(t, u, v\right) = 0 \quad (2)$$

équivaut à $\gamma\left(t\right) = \varphi\left(u, v\right)$. Comme

$$\frac{D\left(F_1, F_2\right)}{D\left(u, v\right)}\left(t_0, u_0, v_0\right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\left(u_0, v_0\right) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\left(u_0, v_0\right) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\left(u_0, v_0\right) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\left(u_0, v_0\right) \end{array} \right| \neq 0,$$

le Théorème des fonctions implicites s'applique, et il existe des voisinages ouverts de t_0 et de $\left(u_0, v_0\right)$ sur lesquels (2) équivaut à $\left(u, v\right) = \psi\left(t\right)$, où ψ désigne une fonction de classe C^1 convenable. Sur ces voisinages,

$$\gamma\left(t\right) = \varphi\left(u, v\right) \Leftrightarrow F\left(t, u, v\right) = 0 \Leftrightarrow \left(u, v\right) = \psi\left(t\right) = \left(\psi_1\left(t\right), \psi_2\left(t\right)\right)$$

où ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions de classe C^1. Puisque φ est injective, les égalités

$$\gamma\left(t\right) = \varphi\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right) = \varphi\left(\psi_1\left(t\right), \psi_2\left(t\right)\right)$$

entraînent bien $\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right) = \left(\psi_1\left(t\right), \psi_2\left(t\right)\right)$ et $u\left(t\right), v\left(t\right)$ sont bien des fonctions de classe C^1.

• En différentiant (1) en t_0,

$$\gamma'\left(t_0\right) = \left(\begin{array}{c} \gamma_1'\left(t_0\right) \\ \gamma_2'\left(t_0\right) \\ \gamma_3'\left(t_0\right) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\left(u_0, v_0\right) u'\left(t_0\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\left(u_0, v_0\right) v'\left(t_0\right) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\left(u_0, v_0\right) u'\left(t_0\right) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\left(u_0, v_0\right) v'\left(t_0\right) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\left(u_0, v_0\right) u'\left(t_0\right) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\left(u_0, v_0\right) v'\left(t_0\right) \end{array} \right)$$

soit

$$\gamma'(t_0) = u'(t_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(t_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0). \quad (*)$$

Cela prouve que $\gamma'(t_0)$ appartient au plan vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ et que

$$E_{M_0}(\Sigma) \subset \mathrm{Vect}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right).$$

Montrons l'inclusion inverse. Si $\overrightarrow{w}$ est un vecteur quelconque de $\mathrm{Vect}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$, il existe deux réels a et b tels que

$$\overrightarrow{w} = a\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + b\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0),$$

et il est facile de trouver un chemin γ sur Σ tel que $\overrightarrow{w} = \gamma'(t_0)$, ce qui prouve que $\overrightarrow{w} \in E_{M_0}(\Sigma)$. Il suffit en effet de choisir deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$ de classe C^1 telles que

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad u'(t_0) = a \quad \text{et} \quad v'(t_0) = b,$$

et de rappeler que

$$\begin{array}{llll} \varphi: & U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & \varphi(u, v) \end{array}$$

est une paramétrisation de Σ, pour constater que le chemin $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ répond à la question. C'est en effet un chemin de classe C^1 dessiné sur Σ, et $(*)$ donne

$$\gamma'(t_0) = a\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + b\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \overrightarrow{w}.$$

On vient de prouver la première égalité

$$E_{M_0}(\Sigma) = \mathrm{Vect}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right).$$

• Les vecteurs

$$d\varphi(u_0, v_0)(h, k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + k\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

décrivent $E_{M_0}(\Sigma)$ quand h et k décrivent $\mathbb{R}$, donc $E_{M_0}(\Sigma) = \mathrm{Im}\, d\varphi(u_0, v_0)$. ■

Remarque : Le chemin particulier $\gamma(t) = \varphi(u_0 + t, v_0)$ dans Σ donne

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(0) \\ \gamma_2'(0) \\ \gamma_3'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$$

d'où $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \in E_{M_0}(\Sigma)$. De même $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \in E_{M_0}(\Sigma)$.

Définition 2 *On appelle* ***plan affine tangent*** *à* Σ *en* $M_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \Sigma$ *et l'on note* $T_{M_0}(\Sigma)$ *le plan affine passant par* M_0 *et de direction* $E_{M_0}(\Sigma) = \operatorname{Im} d\varphi(u_0, v_0)$.

Ainsi

$$T_{M_0}(\Sigma) = M_0 + \operatorname{Vect}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$$

Des équations paramétriques du plan tangent $T_{M_0}(\Sigma)$ sont

$$T_{M_0}(\Sigma) = M_0 + d\varphi(u_0, v_0)(h, k)$$

et une équation cartésienne de $T_{M_0}(\Sigma)$ s'obtient en développant le déterminant

$$\det\left(\overrightarrow{M_0 M}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right) = \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y - y_0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z - z_0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

2 Surface définie implicitement

Théorème 2 *Soit* Σ *la surface de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation cartésienne* $f(x, y, z) = 0$ *où* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *est une application de classe* C^1. *Si* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *est un point régulier de* Σ *(c'est-à-dire si* $df(M_0) \neq 0$*) alors le plan affine tangent à* Σ *en* M_0 *admet l'équation*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Preuve : Comme $df(M_0) \neq 0$ on peut par exemple supposer $\frac{\partial f}{\partial z}(u_0, v_0, z_0) \neq 0$. Le Théorème des fonctions implicites montre l'existence d'un voisinage ouvert U de (x_0, y_0), d'un voisinage ouvert V de z_0 et d'une application φ de classe C^1 de U dans V telle que :

$$\forall (x, y, z) \in U \times V \quad f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y)$$

avec

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)}.$$

L'ouvert $U \times V$ est un voisinage de (x_0, y_0, z_0) sur lequel Σ coïncide avec une surface régulière, à savoir le graphe de φ. La paramétrisation de Σ sur cet ouvert est

$$\begin{array}{rccc} \psi : & U & \to & U \times V \\ & (x, y) & \mapsto & (x, y, \varphi(x, y)). \end{array}$$

D'après le paragraphe précédent, le plan tangent Π à Σ en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ admet les équations paramétriques $M = M_0 + d\psi(x_0, y_0)(h, k)$ et l'équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & 1 & 0 \\ y - y_0 & 0 & 1 \\ z - z_0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de développer ce déterminant pour obtenir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0. \blacksquare$$

Corollaire 1 *Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^1. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de Σ. Le plan affine tangent $T_{M_0}(\Sigma)$ à Σ en M_0 est le plan passant par M_0 et de direction* $\operatorname{Ker} df(M_0)$*. Autrement dit $T_{M_0}(\Sigma) = M_0 + \operatorname{Ker} df(M_0)$.*

Preuve :

$$\begin{aligned}
M \in T_{M_0}(\Sigma) &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow df(M_0)\left(\overrightarrow{M_0M}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in \operatorname{Ker} df(M_0). \blacksquare
\end{aligned}$$

3 Position relative d'une surface de $\mathbb{R}^3$ et du plan tangent

Soit Σ une surface donnée au voisinage de $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ par l'équation

$$\Sigma : \quad z = f(x, y).$$

Cette équation s'écrit encore $z - f(x, y) = 0$, et le plan Π tangent à Σ en M_0 admet l'équation cartésienne

$$\Pi : \quad -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

Celle-ci s'écrit

$$\Pi : \quad z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

La position relative de Σ et de son plan tangent Π au voisinage de M_0 est donnée par le signe de la fonction

$$g(x, y) = f(x, y) - \left(z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\right).$$

Comme

$$g(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

le problème revient à chercher s'il existe un extrémum local de g en (x_0, y_0). Si f est deux fois différentiable en (x_0, y_0), la formule de Taylor-Young permet d'écrire

$$g(x_0 + h, y_0 + k) = \frac{1}{2} q(h, k) + o\left(\|(h, k)\|^2\right)$$

où

$$q(h, k) = d^2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2$$

et l'on peut conclure lorsque la forme quadratique q est non dégénérée :

- Si q est définie positive, la courbe est au dessus du plan tangent,

- Si q est définie négative, elle est au dessous du plan tangent,

- Si q est non dégénérée, ni définie positive ni définie négative, la courbe traverse le plan tangent en M_0 et l'on a un point col.

4 Sous-variétés différentielles

La définition d'une surface donnée à la Section 1 correspond à un paramétrage global en ce sens que la partie $\Sigma = \varphi(U)$ est décrite en utilisant une seule application φ. On peut généraliser sans difficulté l'étude précédente en introduisant la notion de sous-variété différentielle de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ (s.v.d.).

Définition 3 *Soient d, k et n trois entiers naturels non nuls tels que $d \leq n$. On dit que la partie Σ de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété différentielle de classe C^k et de dimension d si pour tout $M_0 \in \Sigma$ il existe un voisinage ouvert V de M_0 dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert U d'un point $t_0 = (t_{0,1}, ..., t_{0,d})$ de $\mathbb{R}^d$ et une application $\varphi : U \to V$ telle que*
1) $\varphi : U \to V$ est injective,
2) φ est de classe C^k sur U,
3) $\varphi(U) = V \cap \Sigma$,
4) La différentielle $d\varphi(t)$ est de rang maximum d.

Toutes les propriétés et les définitions localesque nous avons vues dans les paragraphes précédents (en particulier celle d'un espace tangent) sont encore valables lorsque l'on travaille avec une sous-variété différentielles de $\mathbb{R}^n$.