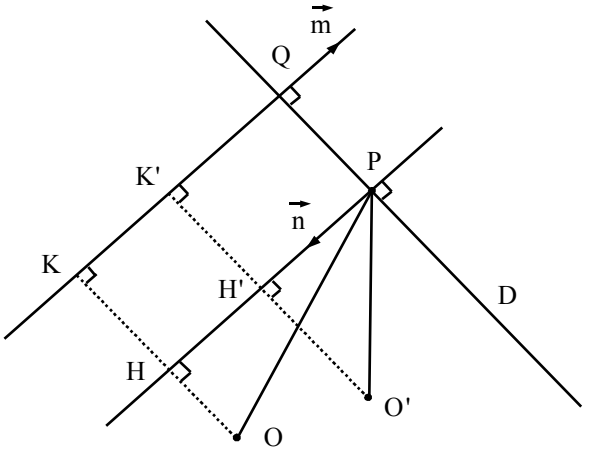
Réponse :

a) Si H et H' sont les projetés orthogonaux de O et O' sur la droite $P+\mathbb{R}\overrightarrow{n}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(D,\overrightarrow{n},P) &= (\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{n})\times(\overrightarrow{O'P}.\overrightarrow{n})\\ &= (\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{n})\times(\overrightarrow{H'P}.\overrightarrow{n})\\ &= \overline{HP}\times\overline{H'P}\times\overrightarrow{n}^2 \;=\; \overline{HP}\times\overline{H'P} \;=\; \overrightarrow{HP}.\overrightarrow{H'P}.\end{aligned}$$



Considérons un autre point Q appartenant à D, et un autre vecteur $\overrightarrow{m}$ normal à D. Notons K et K' les projetés orthogonaux de O et O' sur la droite $Q+\mathbb{R}\overrightarrow{m}$. On obtient comme précédemment

$$\mathcal{E}(D,\overrightarrow{m},Q)=(\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{m})\times(\overrightarrow{O'Q}.\overrightarrow{m})=...=\overline{KQ}\times\overline{K'Q}=\overrightarrow{KQ}.\overrightarrow{K'Q}.$$

Les quadrilatères $KQPH$ et $K'QPH'$ étant des rectangles (ils ont chacun au moins trois angles droits), on obtient $\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{KQ}$ et $\overrightarrow{H'P}=\overrightarrow{K'Q}$, d'où

$$\mathcal{E}(D,\overrightarrow{n},P)=\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{H'P}=\overrightarrow{KQ}.\overrightarrow{K'Q}=\mathcal{E}(D,\overrightarrow{m},Q).$$

Le réel $\mathcal{E}(D,\overrightarrow{n},P)$ est donc indépendant du choix de P et du vecteur $\overrightarrow{n}$.

b) Comme $\mathcal{E}(D)=\overline{HP}\times\overline{H'P}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(D)>0 \quad &\Leftrightarrow \quad H \text{ et } H' \text{ sont du même côté de } P \text{ sur la droite } P+\mathbb{R}\overrightarrow{n}\\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} O \text{ et } O' \text{ appartiennent au même demi-plan}\\ \text{ouvert de frontière } D.\end{array}\right.\end{aligned}$$

La valeur absolue $|\mathcal{E}(D)|=HP\times H'P$ de l'énergie est égale au produit des distances HP et $H'P$ des points O et O' à la droite D, ce que l'on peut écrire $\mathcal{E}(D)=\mathrm{d}\,(O,D)\times\mathrm{d}\,(O',D)$. La valeur absolue $|\mathcal{E}(D)|$ mesure l'éloignement du couple de points (O,O') par rapport à la droite D, $|\mathcal{E}(D)|$ étant d'autant plus petit que les points O et O' sont tous deux plus proches de D.

Réponse a) On sait que la normale $\Delta=M+\mathbb{R}\overrightarrow{n}$ à l'ellipse en M est la bissectrice intérieure issue de M du triangle OMO' (voir [1] ou [2]). Par suite, en utilisant des angles de droites (FIG. 2) :

$$\begin{aligned}\phi'-\phi=\big(MO,MO'\big) &= 2(MO,\Delta)\\ &= 2\left[(MO,D)+(D,\Delta)\right]\\ &= 2\left[-\phi+\frac{\pi}{2}\right]=-2\phi\ \ (\pi)\,,\end{aligned}$$

d'où $\phi'=-\phi\ \ (\pi)$. Les angles de droites ϕ et ϕ' sont donc opposés (cela se vérifie sur la FIG. 2 en utilisant la symétrie par rapport à la normale Δ).

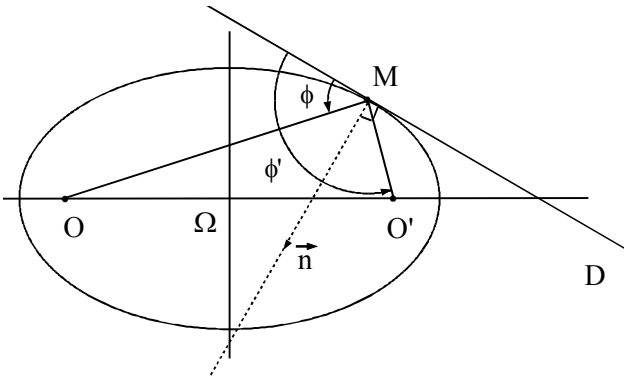


Figure 2: Question

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= (\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n}) \times (\overrightarrow{O'M}.\overrightarrow{n}) \\ &= OM\cos(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{n}) \times O'M\cos(\overrightarrow{O'M},\overrightarrow{n}).\end{aligned}$$

Une ellipse est toujours incluse dans le demi-plan fermé de frontière l'une de ses tangentes, donc $\mathcal{E}$ est positif. Ainsi :

$$\mathcal{E} = |\mathcal{E})| = OM \times O'M \times \left|\cos(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{n}) \times \cos(\overrightarrow{O'M},\overrightarrow{n})\right|. \ (*)$$

On a

$$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{n}) = (\overrightarrow{OM},D) + (D,\overrightarrow{n}) = \frac{\pi}{2} - (D,\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} - \phi \ (\pi)$$

(égalités d'angles de droites). En recommençant avec M', et en remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= OM \times O'M \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi'\right)\right| \\ &= OM \times O'M \left|\sin\phi\sin\phi'\right| \\ &= OM \times O'M \sin^2\phi,\end{aligned}$$

puisque $\phi' = -\phi \ (\pi)$.

b) • Montrons que $\mathcal{E} = b^2$ de deux façons différentes.

Première solution (analytique) : Plaçons-nous dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{\varepsilon}_1, \overrightarrow{\varepsilon}_2)$ d'origine Ω le milieu de $[OO']$ et de premier vecteur de base $\overrightarrow{\varepsilon}_1$ colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{\Omega O'}$. Notons (x_0, y_0) les coordonnées de M dans ce repère. L'ellipse B admet une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dans $\mathcal{R}$. On pose comme d'habitude $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Les coordonnées des foyers O et O' de l'ellipse B sont respectivement $(-c, 0)$ et $(c, 0)$. On sait ([1], Théorème 348) qu'une équation de la tangente D en M est :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Le réel $\mathcal{E}$ est positif puisque l'ellipse est toujours d'un même côté de sa tangente, donc :

$$\mathcal{E} = |\mathcal{E}| = |\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n}| \times |\overrightarrow{O'M}.\overrightarrow{n}|.$$

[0]Site Web MegaMaths — Tapez "megamaths dany-jack" dans un moteur de recherche. — Mél : dany-jack.mercier@hotmail.fr
© 2009, Dany-Jack Mercier, copie autorisée uniquement pour votre usage personnel

Mais $|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{n}| = KM$ où K désigne le projeté orthogonal de O sur la normale $\Delta = M + \mathbb{R}\overrightarrow{n}$. $|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n}|$ est donc égal à la distance $\mathrm{d}\,(O, D)$ du point O à la droite D. Donc :

$$\mathcal{E} = \mathrm{d}\,(O, D) \times \mathrm{d}\left(O', D\right).$$

En utilisant la formule donnant la distance d'un point à une droite :

$$\mathcal{E}) = \frac{\left|\dfrac{-x_0 c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} \times \frac{\left|\dfrac{x_0 c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\left|\dfrac{x_0^2 c^2}{a^4} - 1\right|}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}. \qquad (\maltese)$$

Puisque $M \in B$,

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} &= \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) \\ &= \frac{x_0^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2} = \frac{-c^2 x_0^2}{a^4 b^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{c^2 x_0^2}{a^4}\right), \end{aligned}$$

de sorte que $1 - \frac{c^2 x_0^2}{a^4}$ soit positif, et que l'on obtienne $\mathcal{E} = b^2$ en remplaçant dans ($\maltese$).

Seconde solution (géométrique) : Soient H et H' les projetés orthogonaux de O et O' sur D (FIG. 3). Posons $d = OH$ et $d' = O'H'$. Puisque $\mathcal{E}$ est positif, $\mathcal{E} = dd'$. Les droites (OM) et $(O'H')$ se coupent en W, et l'on a $MO' = MW$ et $d' = O'H' = H'W$ puisque D est une bissectrice extérieure du triangle OMO'. En appliquant deux fois le Théorème de Pythagore :

$$\begin{cases} OW^2 = HH'^2 + (d + d')^2 \\ OO'^2 = HH'^2 + (d - d')^2 \end{cases}$$

d'où $OW^2 - OO'^2 = 4dd'$. Comme $OO' = 2c$ (distance entre les foyers d'une ellipse) et

$$OW = OM + MW = OM + MO' = 2a,$$

on obtient

$$\mathcal{E} = dd' = \frac{OW^2 - OO'^2}{4} = a^2 - c^2 = b^2.$$

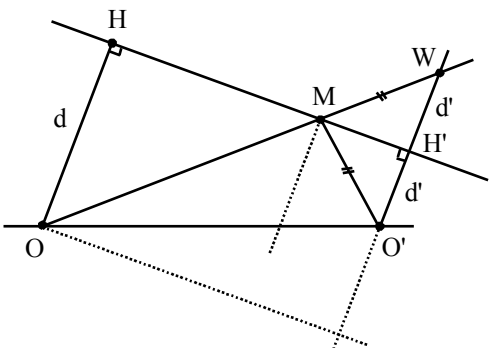


Figure 3: Solution géométrique

- Ce qui précède permet d'écrire $\mathcal{E} = OM \times O'M \sin^2\phi = b^2$.

References

[1] D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2008.

[2] D.-J. Mercier, Fondamentaux de géométrie pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Publibook, 2009.