Axiomatisation de $\mathbb{N}$

7

Introduction

Sur quoi repose la démonstration par récurrence ? Peut-on démontrer rigoureusement que quels que soient les entiers naturels n et p, on a $n+p=p+n$ et $np=pn$?

Dans ce chapitre nous répondons à toutes ces questions. De nombreux énoncés qui jusque-là étaient considérés comme des axiomes deviendront des théorèmes.

Prérequis

Un chapitre entier sera consacré aux suites (**chapitre 3** du livre d'analyse). Mais il faut pour celui-ci avoir un minimum de prérequis sur les suites étudiées au lycée.

- Suites numériques (vue au lycée)
- Structures algébriques : du magma au groupe (**chapitre 4**)
- Sommes et produits (**chapitre 6**)

Objectifs du chapitre

Guiseppe Peano (1858-1932) était un mathématicien italien.

- Enoncer les axiomes de **Peano**
- Enoncer l'axiomatisation ordinale
- Démontrer les propriétés liées à l'addition dans $\mathbb{N}$
- Démontrer les propriétés liées à la multiplication dans $\mathbb{N}$
- Démontrer les propriétés liées à l'ordre dans $\mathbb{N}$
- Montrer l'équivalence des deux types d'axiomatisation (Peano et ordinale)
- Approfondir la démonstration par récurrence

Le cours du chapitre 7

1 Première approche axiomatique des entiers naturels

A Axiomes de Peano

En 1889, le mathématicien italien **Guiseppe Peano** présente une axiomatisation des entiers naturels et montre comment on peut déduire de ces axiomes toutes les propriétés des entiers.
Nous admettons l'existence d'un ensemble appelé ensemble des **entiers naturels** noté $\mathbb{N}$ et contenant un élément appelé « zéro » noté « 0 ».

La justification de l'existence nous obligerait à considérer l'axiomatisation de la théorie des ensembles et donc sortirait du cadre que nous nous sommes fixés.

Axiome 1 **Axiomes de Peano**

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ vérifie les axiomes qui suivent.
A_1 : il existe une application $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ injective ;
A_2 : $0 \notin \sigma\langle\mathbb{N}\rangle$;
A_3 : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A \end{cases} \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

Remarques
1. L'application σ est appelé **successeur**. L'image d'un entier naturel par cette application porte aussi le même nom.
On note $\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ etc.

1 est donc le successeur de 0, 2 est le successeur de 1 et ainsi de suite.

2. L'**axiome 1** assure que deux entiers naturels distincts ne peuvent avoir le même successeur.
3. L'**axiome 2** assure que 0 est le successeur d'aucun entier naturel ou que 0 n'a pas d'antécédent par σ.
4. L'**axiome 3** est appelé **axiome de récurrence**. Il assure que si on se donne une partie $\mathbb{N}$ qui contient 0 ainsi que le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie est nécessairement $\mathbb{N}$.
Cet axiome peut aussi s'écrire : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \begin{cases} 0 \in A \\ \sigma\langle A\rangle \subset A \end{cases} \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

B Premières conséquences

Théorème 1

Autrement dit, tout nombre entier naturel non nul est le successeur d'un entier naturel.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application injective.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}, \sigma(m) = n.$$

Preuve
Notons $A = \sigma\langle\mathbb{N}\rangle \cup \{0\}$.
Il est clair que $0 \in A$ et que $A \subset \mathbb{N}$.
On a donc (**théorème 30-1** du **chapitre 3**), $\sigma\langle A\rangle \subset \sigma\langle\mathbb{N}\rangle$. Et comme $\sigma\langle\mathbb{N}\rangle \subset A$, on a $\sigma\langle A\rangle \subset A$.
Par l'axiome de récurrence, il vient alors que $A = \mathbb{N}$.
Ainsi, si n est non nul, il appartient nécessairement à $\sigma\langle\mathbb{N}\rangle$. □

On rappelle que l'**axiome 2** assure que 0 n'est pas dans $\sigma\langle\mathbb{N}\rangle$.

Remarques
1. Tout entier non nul admet donc un unique antécédent par l'application σ. Cet antécédent est appelé **prédécesseur**.
Par exemple, le prédécesseur de 5 est 4 (car $\sigma(4) = 5$). L'entier 0 n'a pas de prédécesseur.

L'application $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ qui à un entier naturel associe son successeur est bijective.

2. Pour toute la suite, σ désignera toujours une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Théorème 2 **Théorème de récurrence (version 1)**

Ce théorème est bien connu depuis la classe de terminale même si la formulation de ce dernier est très formelle ici. A la fin de ce chapitre, nous en reparlerons plus en détail.

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.
$$\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(\sigma(n)) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

Preuve
Supposons qu'on ait $P(0)$ et que quel que soit l'entier naturel n, $P(n) \Rightarrow P(\sigma(n))$.
Posons $A = \{n \in \mathbb{N}, P(n)\}$ et montrons que $A = \mathbb{N}$.
Il est clair que $A \subset \mathbb{N}$ et $0 \in A$.
Puis l'hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(\sigma(n))$ est équivalente à l'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A$ ».

Il vient alors que A est stable par σ , d'où (**axiome 3**), $A=\mathbb{N}$.
Finalement, quel que soit l'entier naturel n, on a $P(n)$. □

Exemple
Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}, \sigma(n)\neq n$.
Notons $P(n)$ le prédicat défini sur $\mathbb{N}$ par $\sigma(n)\neq n$.
Il s'agit donc de montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$.
$P(0)$ est bien vérifié car $0\notin\sigma\langle\mathbb{N}\rangle$ (0 n'a pas d'antécédent par σ).
Soit alors $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $P(n)$ est vrai (on suppose donc que $\sigma(n)\neq n$ pour un entier n fixé).
D'après l'**axiome 1**, comme l'application σ est injective, on a $\sigma(\sigma(n))\neq\sigma(n)$.
On conclut alors avec le **théorème de récurrence** que : $\forall n\in\mathbb{N}, \sigma(n)\neq n$.

Le théorème suivant, important, permet de justifier l'existence et l'unicité de certaines suites définies par récurrence.

L'existence d'une telle suite est trop technique à justifier. C'est la raison pour laquelle on s'intéresse qu'à l'unicité dans la démonstration.

Théorème 3

Soient a un élément d'un ensemble E et $f:E\longrightarrow E$ une application.
Il existe une unique suite $u:\mathbb{N}\longrightarrow E$ telle que :
$$\begin{cases} u(0)=a \\ \forall n\in\mathbb{N}, u(\sigma(n))=f(u(n)) \end{cases}.$$

Autrement dit, $u\circ\sigma=f\circ u$.

Preuve
Soient u et v deux suites telles que :
$$\begin{cases} u(0)=a \\ \forall n\in\mathbb{N}, u(\sigma(n))=f(u(n)) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v(0)=a \\ \forall n\in\mathbb{N}, v(\sigma(n))=f(v(n)) \end{cases}.$$

Il faut donc montrer que $u=v$.

Posons $A=\{n\in\mathbb{N}, u(n)=v(n)\}$.
Il est clair que $A\subset\mathbb{N}$ et que $0\in A$ (puisque $u(0)=a=v(0)$).
Soit un élément n de A.
On a : $u(\sigma(n))=f(u(n))=f(v(n))=v(\sigma(n))$, donc $\sigma(n)\in A$.
On conclut alors avec l'**axiome de récurrence** : $A=\mathbb{N}$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $u(n)=v(n)$. □

Le théorème suivant permettra de définir les opérations de base dans $\mathbb{N}$ à savoir l'addition et la multiplication.

Le **théorème 4** est en fait une conséquence du **théorème 3**.
Ce théorème est légitimement admis.

Théorème 4

Soient $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow F$ deux applications d'ensembles non vides.
Il existe une unique application $\varphi:E\times\mathbb{N}\longrightarrow F$ telle que :
$$\begin{cases} \forall a\in E, \varphi(a,0)=f(a) \\ \forall (a,n)\in E\times\mathbb{N}, \varphi(a,\sigma(n))=g(\varphi(a,n)) \end{cases}.$$

C Addition dans N

Théorème 5 **Addition dans $\mathbb{N}$**

Il existe une unique application $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ telle que :
1) $\forall n\in\mathbb{N}, n+0=n$ 2) $\forall (n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, n+\sigma(p)=\sigma(n+p)$.

Le **théorème 5** est une conséquence immédiate du **théorème 4** en choisissant :
$E=F=\mathbb{N}$, $+$ pour l'application φ,
σ pour l'application g et $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ l'application f.

Remarques
1. L'application $+$ s'appelle **addition** et ainsi le couple $(\mathbb{N},+)$ est un magma.
2. Quels que soient les entiers naturels n et p, l'image du couple (n,p) par l'application $+$ est appelée la **somme** des entiers naturels n et p.
3. D'après le **théorème 5**, on a : $\forall n\in\mathbb{N}, n+\sigma(0)=n+1=\sigma(n+0)=\sigma(n)$, ainsi $\sigma(n)=n+1$ pour tout entier naturel n. Autrement dit l'application successeur consiste à ajouter 1.

Utilisation de l'égalité 1).

4. D'après la remarque précédente, on a : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, n+(p+1)=(n+p)+1$.

Avec cette égalité, on a un début d'associativité.

Le cours du chapitre 7

Nous sommes maintenant en mesure de reformuler le **théorème de récurrence** (**théorème 2**) :

A la fin de ce chapitre nous en donnerons une version plus générale.

Théorème 6 **Théorème de récurrence (version 2)**

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)\,.$$

On en profite aussi pour reformuler le **théorème 3** :

Le **théorème 7** permet de dire qu'une suite d'éléments de E est entièrement définie par la donnée de son terme initial et d'une relation de récurrence.

Théorème 7

Soient a un élément d'un ensemble E et $f : E \longrightarrow E$ une application.

Il existe une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$ telle que :

$$\begin{cases} u(0) = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

Exemple

Considérons l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x+1 \end{array}$.

D'après le **théorème 7**, il existe une unique suite réelle u telle que :

L'entier 3 peut être remplacé par n'importe quel nombre réel.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = 3u_n + 2 \end{cases}.$$

Autrement dit l'addition est associative dans $\mathbb{N}$.

Théorème 8 **Associativité de l'addition dans $\mathbb{N}$**

$$\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3, n + (p+q) = (n+p) + q\,.$$

Preuve

La récurrence ne peut se faire que sur l'entier q car on ne sait pas encore ajouter 0 à un entier naturel !

Récurrence sur q avec n et p fixés dans $\mathbb{N}$.

Quand $q = 0$, on a d'une part $n + (p+0) = n+p$ et d'autre part $(n+p)+0 = n+p$.

Soit $q \in \mathbb{N}$ et supposons que $n + (p+q) = (n+p)+q$.

On a : $n + (p + (q+1)) = n + ((p+q)+1) = (n + (p+q)) + 1 = ((n+p)+q)+1 = (n+p)+(q+1)$. □

Remarque

On a montré que le couple $(\mathbb{N}, +)$ est un demi-groupe.

Autrement dit, l'entier 0 est neutre pour l'addition.

Théorème 9 **Elément neutre de l'addition dans $\mathbb{N}$**

$$\forall n \in \mathbb{N}, n + 0 = 0 + n = n\,.$$

Preuve

On sait déjà d'après le **théorème 5** que : $\forall n \in \mathbb{N}, n+0 = n$. On montre alors par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 + n = n\,.$$

L'égalité est évidente quand $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 + n = n$.

Utilisation de l'associativité.

On a : $0 + (n+1) = (0+n)+1 = n+1$. □

Remarque

On a montré que le couple $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde.

Le **théorème 10** nous servira à démontrer le théorème suivant.

Théorème 10

$$\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = 1 + n\,.$$

Preuve

Récurrence sur n.

L'égalité est évidente quand $n = 0$ (cas particulier du **théorème 9**).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $n + 1 = 1 + n$.

On a : $(n+1)+1=(1+n)+1=1+(n+1)$. □

Autrement dit l'addition est associative dans $\mathbb{N}$.

Théorème 11 Commutativité de l'addition dans $\mathbb{N}$

$$\forall(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, n+p=p+n\ .$$

Preuve

Récurrence sur n avec p fixé dans $\mathbb{N}$.

L'égalité est évidente quand $n=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $n+p=p+n$.

On a : $(n+1)+p=n+(1+p)=n+(p+1)=(n+p)+1=(p+n)+1=p+(n+1)$. □

Autrement dit, tous les nombres entiers naturels sont réguliers pour l'addition. On dit aussi que l'addition est régulière dans $\mathbb{N}$.
Comme l'addition est commutative, seule une implication est à démontrer.

Théorème 12 Régularité de l'addition dans $\mathbb{N}$

$$\forall(n,p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}, n+p=n+q\Rightarrow p=q\ .$$

Preuve

Récurrence sur n avec p et q fixés dans $\mathbb{N}$.

L'implication est évidente quand $n=0$ (conséquence de la tautologie $P\Rightarrow P$ où P est une assertion).

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $n+p=n+q\Rightarrow p=q$.

Admettons de plus que $(n+1)+p=(n+1)+q$.

Alors $n+(1+p)=n+(1+q)$, soit $n+(p+1)=n+(q+1)$, soit encore $(n+p)+1=(n+q)+1$.

Rappelons que l'application σ est injective, donc l'égalité précédente qui devient $\sigma(n+p)=\sigma(n+q)$ entraîne que $n+p=n+q$, soit par hypothèse de récurrence $p=q$. □

Le **théorème 13** permet d'ajouter membre à membre des entiers naturels dans des égalités.

Théorème 13

$$\forall(n,p,q,r)\in\mathbb{N}^4, \begin{cases} n=p \\ q=r \end{cases} \Rightarrow n+q=p+r\ .$$

Preuve

Supposons que $n=p$ et $q=r$.

Alors, l'égalité $n=p$ entraîne que $n+q=p+q$ et l'égalité $q=r$ entraîne que $p+q=p+r$.

Ainsi, $n+q=p+r$. □

D Multiplication dans N

Le **théorème 14** est une conséquence immédiate du **théorème 4**.
La loi $\times$ pourra être notée par un point ou par l'absence de symbole s'il n'y a aucun risque de confusion.

Théorème 14 Multiplication dans $\mathbb{N}$

Il existe une unique application $\times:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ telle que :

1) $\forall n\in\mathbb{N}, n\times 0=0$ 2) $\forall(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, n\times(p+1)=(n\times p)+n$.

Remarques

1. L'application $\times$ s'appelle **multiplication** et ainsi le couple $(\mathbb{N},\times)$ est un magma.
2. Quels que soient les entiers naturels n et p, l'image du couple (n,p) par l'application $\times$ est appelée le **produit** des entiers naturels n et p.
3. D'après le **théorème 14**, on a : $\forall n\in\mathbb{N}, n\times(0+1)=n\times 1=n\times 0+n=n$, donc $n\times 1=n$ pour tout entier n.

Autrement dit, la multiplication est distributive sur l'addition.

Théorème 15 Distributivité de la multiplication sur l'addition

$$\forall(n,p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \begin{cases} n(p+q)=np+nq \\ (p+q)n=pn+qn \end{cases}.$$

La récurrence ne peut se faire que sur l'entier q.

Preuve

On va démontrer que la première égalité. La seconde sera une conséquence de la commutativité de la multiplication.

On va faire une récurrence sur q avec n et p fixés sur $\mathbb{N}$.

Quand $q=0$, on a d'une part $n(p+0)=np$ et d'autre part $np+n\times 0=np+0=np$.

Soit $q\in\mathbb{N}$ et supposons que $n(p+q)=np+nq$.

On a : $n(p+(q+1))=n((p+q)+1)=n(p+q)+n=(np+nq)+n=np+(nq+n)=np+n(q+1)$. □

Le cours du chapitre 7

Autrement dit, la multiplication est associative dans $\mathbb{N}$.

Théorème 16 **Associativité de la multiplication dans $\mathbb{N}$**

$$\forall (n,\, p,\, q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N},\, n(pq) = (np)q\ .$$

Preuve

La récurrence ne peut se faire que sur l'entier q.

Récurrence sur q avec n et p fixés dans $\mathbb{N}$.

Quand $q = 0$, on a d'une part $n(p\times 0) = n\times 0 = 0$ et d'autre part $(np)\times 0 = 0$.

Soit $q \in \mathbb{N}$ et supposons que $n(pq) = (np)q$.

On a : $n(p(q+1)) = n(pq+p) = n(pq)+np = (np)q+np = (np)(q+1)$. □

Remarque

On a montré que le couple $(\mathbb{N}, \times)$ est un demi-groupe.

Autrement dit, l'entier 1 est neutre pour l'addition dans $\mathbb{N}$.

Théorème 17 **Elément neutre de la multiplication dans $\mathbb{N}$**

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n\times 1 = 1\times n = n\ .$$

Preuve

On sait déjà d'après la remarque du **théorème 14** que : $\forall n \in \mathbb{N},\, n\times 1 = n$. Il reste alors à montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, 1\times n = n\ .$$

On va faire une récurrence sur n.

Quand $n = 0$, on a $1\times 0 = 0$, l'initialisation est donc faite.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $1\times n = n$.

On a : $1\times(n+1) = 1\times n + 1\times 1 = n+1$. □

Remarque

On a montré que le couple $(\mathbb{N}, \times)$ est un monoïde.

Théorème 18

Autrement dit, l'entier 0 est absorbant pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n\times 0 = 0\times n = 0\ .$$

Preuve

On sait déjà d'après le **théorème 14** que : $\forall n \in \mathbb{N},\, n\times 0 = 0$. Il reste donc à montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, 0\times n = 0\ .$$

Faisons une récurrence sur n.

Quand $n = 0$, on a $0\times 0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0\times n = 0$.

On a : $0\times(n+1) = 0\times n + 0\times 1 = 0+0 = 0$. □

Théorème 19 **Commutativité de la multiplication dans $\mathbb{N}$**

Autrement dit, l'addition est commutative dans $\mathbb{N}$.

$$\forall (n,\, p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\, np = pn\ .$$

Preuve

Récurrence sur n avec p fixé dans $\mathbb{N}$.

Quand $n = 0$ on a $0\times p = 0$ et $p\times 0 = 0$, d'où $n\times 0 = 0\times n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $np = pn$.

On a : $(n+1)p = np + 1\times p = np + p = pn + p = p(n+1)$. □

E <u>Ordre dans N</u>

Définition 1

Soient n et p deux entiers naturels.

Dire que l'entier n est **inférieur ou égal** à p signifie que :

$$\exists k \in \mathbb{N},\, p = n+k\ .$$

Remarques

1. On écrit $n \leqslant p$ pour signifier que n est inférieur ou égal à p.

Le cours du chapitre 7

Ainsi : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2, \begin{cases} n\leqslant p \Leftrightarrow p\geqslant n \\ n<p \Leftrightarrow p>n \end{cases}$.

2. Quand on a $n\leqslant p$ avec de plus $n\neq p$, on écrit $n<p$.
3. La relation réciproque de la relation $\leqslant$ (resp. $<$) est notée $\geqslant$ (resp. $>$).

Exemple
Il est clair que $0\leqslant 1$ car $1=0+1$ (k vaut 1 par rapport à la définition).

Autrement dit, la relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Théorème 20 **Relation d'ordre dans $\mathbb{N}$**

Le couple $(\mathbb{N},\leqslant)$ est un ensemble ordonné.

Preuve
1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}, n\leqslant n$.
Il est clair que pour tout entier naturel n, $n=n+0$, d'où $n\leqslant n$.

2) Montrons que : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2, \begin{cases} n\leqslant p \\ p\leqslant n \end{cases} \Rightarrow n=p$.

Supposons que n et p sont des entiers naturels tels que $n\leqslant p$ et $p\leqslant n$.

Il existe alors un couple $(k,k')\in\mathbb{N}^2$ tel que $p=n+k$ et $n=k'+p$.

Donc $p=(k'+p)+k$, c'est-à-dire $p+0=p+(k'+k)$, soit par régularité de p, $k'+k=0$.

Voir l'**exercice 10** pour voir le résultat utilisé.

Cette dernière égalité entraîne que $k=k'=0$, d'où $n=p$.

3) Montrons que : $\forall (n,p,q)\in\mathbb{N}^3, \begin{cases} n\leqslant p \\ p\leqslant q \end{cases} \Rightarrow n\leqslant q$.

Soient n, p et q des entiers naturels tels que $n\leqslant p$ et $p\leqslant q$.

Il existe alors un couple $(k,k')\in\mathbb{N}^2$ tel que $p=n+k$ et $q=p+k'$.

Donc $q=(n+k)+k'=n+(k+k')$.

Etant donné que $k+k'$ est un entier naturel, il vient par définition que $n\leqslant q$. □

Remarque
Si $n\leqslant p$, alors il existe un unique entier k tel que $p=n+k$ (démonstration immédiate en utilisant la régularité de l'addition).
Cet entier est appelé **différence** des entiers p et n et est noté $p-n$.

Autrement dit deux entiers naturels sont toujours comparables.

Théorème 21 **Relation d'ordre totale dans $\mathbb{N}$**

Le couple $(\mathbb{N},\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

Preuve
On sait déjà que le couple $(\mathbb{N},\leqslant)$ est un ensemble ordonné. Il reste à montrer que la relation d'ordre $\leqslant$ est totale, c'est-à-dire : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2, (n\leqslant p)\vee(p\leqslant n)$.

Effectuons alors une récurrence sur n avec p fixé dans $\mathbb{N}$.

Quel que soit l'entier naturel p on a $p=p+0$.

Comme $0\leqslant p$, la propriété est initialisée.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $n\leqslant p$ ou $p\leqslant n$.

L'entier naturel p étant fixé, il y a trois cas à traiter.

Remarquez que : $n\leqslant p \Leftrightarrow (n<p)\vee(n=p)$.

- Quand on a $n<p$, il existe un entier naturel non nul k tel que $p=n+k$.

L'entier k étant non nul, il admet un prédécesseur (**théorème 1**) l de sorte que $\sigma(l)=l+1=k$.

Il vient alors que $p=n+(l+1)=l+(n+1)$ et ainsi $n+1\leqslant p$.

- Quand on a $p\leqslant n$, il existe un entier naturel k tel que $n=p+k$, d'où $\sigma(n)=\sigma(p+k)$, soit $n+1=(k+1)+p$.

Il vient donc (puisque $k+1$ est un nombre entier) que $p\leqslant n+1$.

- Quand $n=p$, on a $n=p+0$ et donc $p\leqslant n$. On se ramène alors au deuxième cas, d'où $p\leqslant n+1$. □

Le **théorème 22** est très intéressant dans certains raisonnements.

Théorème 22

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, n<p \Leftrightarrow n+1\leqslant p.$$

Preuve
Soient n et p deux entiers naturels.

Le cours du chapitre 7

Utilisation du **théorème 1**.

On dispose des équivalences suivantes : $n < p \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, p = n + k \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N}, p = n + \sigma(l) \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N}, p = n + l + 1$

$\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N}, p = l + (n+1)$

$\Leftrightarrow n + 1 \leqslant p$. □

Théorème 23 Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition

Autrement dit, la relation $\leqslant$ est compatible avec l'addition.

$$\forall (n, p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n \leqslant p \Rightarrow n + q \leqslant p + q \, .$$

Preuve

Supposons que $n \leqslant p$.

Par définition, il existe un entier naturel k tel que $p = n + k$.

Il vient alors que $p + q = (n+k) + q = (n+q) + k$, d'où par définition $n + q \leqslant p + q$. □

Théorème 24

Le **théorème 24** est une conséquence immédiate du **théorème 23**.
On peut additionner membre à membre des entiers dans des inégalités.

$$\forall (n, p, q, r) \in \mathbb{N}^4, \begin{cases} n \leqslant p \\ q \leqslant r \end{cases} \Rightarrow n + q \leqslant p + r \, .$$

Preuve

Supposons que $n \leqslant p$ et $q \leqslant r$.

D'une part l'inégalité $n \leqslant p$ entraîne que $n + q \leqslant p + q$ et d'autre part l'inégalité $q \leqslant r$ entraîne que $q + p \leqslant r + p$.

Par transitivité de la relation $\leqslant$, on a $n + q \leqslant p + r$. □

Théorème 25 Régularité de la multiplication dans $\mathbb{N}$

Autrement dit, tous les entiers naturels non nuls sont réguliers pour la multiplication.
Comme la multiplication est commutative, seule une implication est à établir.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, np = nq \Rightarrow p = q \, .$$

Preuve

Supposons que $np = nq$ et que $p \leqslant q$.

Il existe alors un entier naturel k tel que $q = p + k$.

La condition $np = nq$ devient alors $np = n(p+k) = np + nk$. Puis, comme l'addition est régulière, on a $nk = 0$.

Voir l'**exercice 10** pour connaître le résultat utilisé.

Comme n n'est pas nul, c'est nécessairement k qui l'est et dans ce cas, $q = p$.

De même, en supposant que $q \leqslant p$, on montre aussi que $q = p$. □

Théorème 26 Compatibilité de la relation d'ordre avec la multiplication

$$\forall (n, p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n \leqslant p \Rightarrow nq \leqslant pq \, .$$

Preuve

Supposons que $n \leqslant p$.

Par définition, il existe un entier naturel k tel que $p = n + k$.

Il vient alors que $pq = (n+k)q = nq + kq$, c'est-à-dire (comme $kp \in \mathbb{N}$) $nq \leqslant pq$. □

Théorème 27

On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est discret.

Entre deux nombres entiers naturels consécutifs, il n'existe aucun entier naturel.

Preuve

Raisonnement par l'absurde.

Soit n un entier naturel et supposons qu'il existe un entier naturel p tel que $n < p < n+1$.

Il existe alors un couple $(k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p = n + k$ et $n + 1 = p + k'$.

Il vient que $n + 1 = n + k + k'$ c'est-à-dire, en notant l' le prédécesseur de k', $n + 1 = n + k + (l' + 1)$.

Grâce à la régularité, on obtient $k + l' = 0$, soit $k = 0$ et $l' = 0$ ce qui est absurde car k est supposé non nul. □

Le théorème suivant très important achèvera ce paragraphe.

Théorème 28 Propriété d'Archimède

On dit dans ce cas que $\mathbb{N}$ est archimédien, c'est-à-dire intuitivement qu'il est possible de dépasser n'importe quel nombre entier en partant d'un autre nombre entier (en l'ajoutant un certain nombre de fois).

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}, a \leqslant bn \, .$$

Le cours du chapitre 7

Preuve

En fait c'est a qui convient pour n dans le théorème.

Comme b n'est pas nul, on a $1 \leqslant b$, soit $a \leqslant ab$. □

2 Seconde approche axiomatique des entiers naturels

A Axiomatisation ordinale et premières conséquences

A partir des axiomes de Peano, nous avons démontrés un grand nombre de résultats, à savoir que $(\mathbb{N}, +)$ et $(\mathbb{N}, \times)$ sont des monoïdes commutatifs, que $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné et bien d'autres.

Il est aussi possible de partir d'un autre système axiomatique. Dans ce cas les axiomes de Peano deviennent des théorèmes. Mais alors, en prenant l'axiomatique de Peano, les axiomes que nous allons exposés ici (les axiomes d'ordre) sont des théorèmes.

Nous n'allons pas autant développer cette nouvelle axiomatique comme on l'a fait avec Peano.

Commençons par formuler les axiomes d'ordre en commençant par une définition pratique.

Définition 2

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

Dire que E est **bien ordonné** signifie que toute partie non vide E admet un plus petit élément.

Remarques

1. On dit aussi que la relation $\preccurlyeq$ est de **bon ordre**.

Indice : prendre par deux les éléments.

2. Le lecteur pourra chercher à savoir pourquoi une relation de bon ordre est nécessairement totale en remarquant que la réciproque est fausse.

3. Avec des quantificateurs, dire que E est bien ordonné signifie que :

Il est alors clair que l'ensemble est bien ordonné par n'importe quelle relation.

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}, \exists n \in A, \forall x \in A, n \preccurlyeq x \,.$$

Comme pour les axiomes de Peano, nous postulons l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$ (non vide) et vérifiant les axiomes suivants :

Axiome 2 **Axiomes de l'ordre**

O_1 : $\mathbb{N}$ est bien ordonné ;

O_2 : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré ;

O_3 : toute partie non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Remarques

1. Avec les quantificateurs dire que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré signifie que : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m < n$.

De plus, pour un entier naturel n fixé dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}, n < p\}$ n'est pas vide puisque n n'est pas majoré.

Ainsi par définition, $n^+ = n+1$.

Cet ensemble possède un plus petit élément qu'on notera n^+ appelé **successeur** de n qui désignera l'entier $n+1$.

2. L'ensemble $\mathbb{N}$ lui-même admet un plus petit élément d'après l'axiome du bon ordre. On note 0 ce dernier.

3. Pour un entier naturel n non nul fixé dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}, p < n\}$ n'est pas vide puisqu'il contient 0. Cet ensemble est aussi majoré par n, donc d'après l'**axiome 3**, cet ensemble admet un plus grand élément. Ce dernier est noté $n\_$ qu'on écrira $n-1$ également qui est le **prédécesseur** de n.

Ainsi par définition, $n\_ = n-1$.

B Considération des deux systèmes axiomatiques

Plaçons-nous d'abord sous l'**axiomatique ordinale** et montrons l'**axiome de récurrence**.

Raisonnement par l'absurde.

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ tel que $A \neq \mathbb{N}$.

Admettons que $0 \in A$ et que pour tout entier naturel n de A, on a $n+1 \in A$.

Le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$ n'est pas vide et donc admet un plus petit élément m.

Si n était dans le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$, on aurait $n < m$, ce qui n'est pas possible par définition de m.

Comme $0 \in A$, m n'est pas nul et admet donc un prédécesseur n qui ne peut être que dans A.

Or par hypothèse $m = n+1 \in A$, ce qui est absurde.

Ainsi $A = \mathbb{N}$.

On se place maintenant sur l'**axiomatique de Peano** et montrons qu'elle implique l'**axiomatique ordinale**.

1) **Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.**
Soient A une partie non vide de $\mathbb{N}$ et M l'ensemble des minorants de A.
L'ensemble M n'est pas vide car il contient 0. L'ensemble M n'est pas aussi égal à $\mathbb{N}$ car si n est un élément de A, alors $n+1$ n'appartient pas à M (puisque $n+1$ n'est pas un minorant de n).
L'implication « $\forall n \in \mathbb{N}, n \in M \Rightarrow n+1 \in M$ » étant fausse, il existe un élément p de M tel que $p+1 \notin M$. Soit donc p un tel élément.

Raisonnement par l'absurde.

Supposons que $p \notin A$.
Alors, quel que soit l'élément n appartenant à A, on aurait $p < n$, c'est-à-dire $p+1 \leqslant n$, d'où $p+1$ serait un minorant de A, ce qui est évidemment contradictoire puisque $p+1 \notin M$.
Ainsi, $p \in A$ et devient donc le plus petit élément de A.

2) $\mathbb{N}$ **n'est pas majoré.**
Supposons que c'était le cas, et notons n ce majorant.
Alors $n+1 \leqslant n$. Mais comme on a aussi $n \leqslant n+1$ on a via l'antisymétrie de la relation $\leqslant$, $n = n+1$, ce qui conduirait via la régularité à $0 = 1$, ce qui est absurde.

3) **Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.**
Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, M l'ensemble des majorants de A.

A ce stade m est la borne supérieure de l'ensemble M.

Il est clair que M n'est pas vide par hypothèse. Il possède donc un plus petit élément m.
Si $m = 0$, alors l'ensemble E serait réduit au singleton $\{0\}$ et le résultat est démontré.

Raisonnement par l'absurde.

Sinon, supposons que $m \neq 0$ et $m \notin A$
Alors, quel que soit l'élément n appartenant à A, on aurait $n < m$ soit $n \leqslant m-1$, d'où $m-1$ serait un majorant de A (donc il est dans M), ce qui est contradictoire puisque $m-1 < m$.

3 Théorèmes de récurrences

A Théorème de récurrence simple (rappel)

Rappelons le théorème de récurrence rencontré plus tôt :

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

Remarques
1. Quand on a $P(0)$, on dit souvent que P (appelé aussi « **propriété** ») est **initialisé** (ou **amorcé**).
2. Quand on a : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on dit souvent que P est **héréditaire**.
3. On prendra garde à bien vérifier que les deux conditions soient réunies pour pouvoir conclure. En effet, par exemple, le prédicat P défini sur $\mathbb{N}$ par $n = n+1$ est héréditaire mais n'est jamais vrai quel que soit l'entier n.

B Récurrence à partir d'un certain rang

Bien souvent, on aura à démontrer qu'une assertion portant sur les entiers naturels est vraie non pas sur tous les entiers naturels mais sur tous les entiers naturels supérieurs à un autre entier.

Par exemple, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4 \Rightarrow n^2 \leqslant 2^n$.

Théorème 29 Théorème de récurrence simple (version 3)

Soient n_0 un entier naturel et P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(n_0) \\ \forall n \geqslant n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \geqslant n_0, P(n).$$

Preuve
Il suffit d'appliquer le **théorème de récurrence** (version 2) à $P(n_0 + n)$ au lieu de $P(n)$. □

Exemple
Montrons que :

$$\forall n \geqslant 4, n^2 \leqslant 2^n.$$

« $\forall n \geqslant 4$ » sous-entend que n est un entier naturel.

Quand $n = 4$, on a d'une part $4^2 = 16$ et d'autre part $2^4 = 16$.

Le cours du chapitre 7

Soit n un entier supérieur ou égal à 4 tel que $n^2 \leqslant 2^n$.

Alors, compte tenu de cette inégalité, on a $2n^2 \leqslant 2^{n+1}$.

Il suffit de remarquer ensuite que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 : $n^2+2n+1 \leqslant 2n^2$. En effet, cette inégalité est équivalente à $n^2-2n-1 \geqslant 0$ et une étude rapide de la fonction polynôme $x \mapsto x^2-2x-1$ montre que c'est le cas.

Ce qui permettra de conclure que : $\forall n \geqslant 4, n^2 \leqslant 2^n$.

C Récurrence double

Parfois, au moment de l'hérédité, il faut supposer la propriété vraie non pas pour un entier fixé, mais à deux entiers consécutifs fixés, ce qui nous amène au théorème suivant.

Le **théorème 30** est à utiliser quand par exemple le terme général d'une suite est défini en fonction des deux précédents.

Théorème 30 Théorème de récurrence double (version 1)

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(0) \wedge P(1) \\ \forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

Preuve

Notons $Q(n)$ le prédicat $P(n) \wedge P(n+1)$ défini sur $\mathbb{N}$.

Il s'agit donc de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ par récurrence sur n.

Supposons alors qu'on ait $P(0)$, $P(1)$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$.

Il est clair qu'on a $Q(0)$ (qui correspond à $P(0) \wedge P(1)$).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'on ait $Q(n)$ (donc $P(n) \wedge P(n+1)$).

Par hypothèse, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$. On sait donc que $P(n+2)$ est vraie.

$Q(n+1)$ c'est $P(n+1) \wedge P(n+2)$.

Il vient alors, comme $P(n+1)$ et $P(n+2)$ sont vraies que $Q(n+1)$ est vraie.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $Q(n)$ et donc en particulier $P(n)$. □

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_n + 5u_{n+1} \end{cases}.$$

On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$ par récurrence double.

Notons P le prédicat défini sur $\mathbb{N}$ par $u_n \geqslant 0$.

Il est clair que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies car $u_0 = 1 \geqslant 0$ et $u_1 = 0 \geqslant 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.

Comme vous le voyez, il n'était pas suffisant de supposer pour un entier n fixé dans $\mathbb{N}$ que $P(n)$ est vraie car nous avons aussi besoin de supposer que $P(n+1)$ est vraie pour former le nombre $3u_n + 5u_{n+1}$.

Comme $u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \geqslant 0$, on a $3u_n + 5u_{n+1} \geqslant 0$, d'où $P(n+2)$ est vraie.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

Donnons une version plus générale du **théorème de récurrence double** :

Théorème 31 Théorème de récurrence double (version 2)

Soient n_0 un entier naturel et P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(n_0) \wedge P(n_0+1) \\ \forall n \geqslant n_0, (P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2) \end{cases} \Rightarrow \forall n \geqslant n_0, P(n).$$

Preuve

La démonstration se fait exactement de la même manière que le **théorème 30**.

Il suffit d'appliquer le **théorème de récurrence** (version 2) à $P(n_0) \wedge P(n_0+1)$ au lieu de $P(n)$. □

Remarque

On parle aussi de **récurrence triple**, **quadruple** etc. D'une manière générale, on parle de **récurrence multiple**.

Le cours du chapitre 7

D Récurrence forte

Comme son nom l'indique, la récurrence forte est utile quand on a besoin de supposer qu'une propriété soit vraie non pas pour un entier fixé mais pour un nombre fini d'entiers jusqu'à un certain entier qu'on s'est fixé.
C'est par exemple le cas avec les suites quand le terme général d'une suite est défini en fonction de tous les termes précédents.

Théorème 32 **Théorème de récurrence forte (version 1)**

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

Preuve

Notons $Q(n)$ le prédicat $P(0) \wedge P(1) \wedge ... \wedge P(n)$ défini sur $\mathbb{N}$.

Il s'agit donc de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ par récurrence sur n.

Supposons alors qu'on a $P(0)$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$.

Il est clair qu'on a $Q(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'on ait $Q(n)$ (donc $P(0) \wedge P(1) \wedge ... \wedge P(n)$).

Par hypothèse, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$. On sait donc que $P(n+1)$ est vraie.

Avec l'hypothèse de récurrence, il vient qu'on a $P(0) \wedge P(1) \wedge ... \wedge P(n) \wedge P(n+1)$ c'est-à-dire $Q(n+1)$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $Q(n)$ et donc en particulier $P(n)$. □

Donnons une version plus générale du théorème précédent :

En pratique, il n'est pas toujours simple de savoir d'avance si une récurrence forte résoudra un problème. On procède alors au brouillon avec une simple récurrence et on regarde s'il est nécessaire de « doper » l'hypothèse de récurrence.

Théorème 33 **Théorème de récurrence forte (version 2)**

Soient n_0 un entier naturel et P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(n_0) \\ \forall n \geqslant n_0, (\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \geqslant n_0, P(n).$$

Preuve

Il suffit d'appliquer le **théorème de récurrence** (version 2) à $P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge ... \wedge P(n)$ au lieu de $P(n)$. □

Exemple

Vous savez depuis la terminale que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
On va le démontrer par récurrence forte.
Pour l'initialisation, c'est facile : 2 est un nombre premier.

Cette méthode permettra de comprendre pour une récurrence forte doit s'imposer.

Pour l'hérédité, faisons comme si on raisonner par récurrence simple. Autrement dit, soit n un entier supérieur ou égal à 2 et admettons qu'il admet un diviseur premier. Nous allons voir que cette hypothèse n'est pas suffisante.
Considérons l'entier $n+1$. Il y a deux possibilités :
- ou bien il est premier et c'est gagné ;
- ou bien il n'est pas premier et dans ce cas, comme il est supérieur ou égal à 2, il est composé.

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs positifs (ainsi 2 devient le plus petit nombre premier).
Un **nombre composé** est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'est pas premier (ainsi 4 devient le plus petit nombre composé).

Ce dernier cas montre que l'entier $n+1$ admet un diviseur p tel que $1 < p < n+1$ c'est-à-dire $2 \leqslant p \leqslant n$.
Mais le fait de supposer que n admet un diviseur premier n'est clairement pas suffisant ! Il faut supposer que tous les entiers compris entre 2 et n admettent un diviseur premier. Car quel que soit le diviseur p, il admettra par hypothèse de récurrence forte un diviseur premier, ce qui permettra de conclure...
Ainsi, dans tous les cas, l'entier $n+1$ admet un diviseur premier.

E Récurrence finie

C'est une situation rare mais il peut arriver de montrer une propriété pour un nombre fini d'entiers naturels.

Le **théorème 34** fonctionne comme pour le théorème de récurrence simple mais avec un nombre fini d'entiers.

Théorème 34 **Théorème de récurrence finie (version 1)**

Soient n_0 un entier naturel non nul et P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!], P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in [\![0, n_0]\!], P(n).$$

Preuve

Notons $Q(n)$ le prédicat défini par $P(n)$ si $0 \leqslant n \leqslant n_0$ et n si $n > n_0$.

Il s'agit donc de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ par récurrence sur n.

Supposons alors qu'on a $P(0)$ et : $\forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!], P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Comme $0 \leqslant 0 \leqslant n_0$, on a $P(0)$ et donc $Q(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'on ait $Q(n)$. Il y a deux possibilités pour n :

- si $0 \leqslant n \leqslant n_0 - 1$, alors par hypothèse de récurrence, $P(n+1)$ est vraie et donc $Q(n+1)$ (car $0 \leqslant n+1 \leqslant n_0$) ;
- si $n \geqslant n_0$, alors $n+1 > n_0$ soit $P(n+1)$ et par conséquent $Q(n+1)$.

Donc dans tous les cas, on a $Q(n+1)$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $Q(n)$ et donc $P(n)$ sur $[\![0, n_0]\!]$. □

Donnons une version plus générale du théorème précédent :

Le **théorème 35** est rarement utilisé en pratique.

Théorème 35 **Théorème de récurrence finie (version 2)**

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a \leqslant b$ et P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} P(a) \\ \forall n \in [\![a, b-1]\!], P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in [\![a, b]\!], P(n).$$

Preuve

Il suffit d'appliquer le **théorème de récurrence** (version 2) à $P(n)$ si $a \leqslant n \leqslant b$ et n si $n > b$ au lieu de $P(n)$. □

Pierre de Fermat (~1610-1665) était un mathématicien français.

F Descente infinie de Fermat

On considère un prédicat P défini sur $\mathbb{N}$.
On veut montrer que quel que soit l'entier naturel n, $P(n)$ est faux.

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie. On trouve alors un autre entier naturel m tel que $m < n$ et $P(m)$ est vraie. Puis on trouve de même un autre entier naturel r tel que $r < m$ et $P(r)$ est vraie etc.

On se forme alors une suite strictement décroissante d'entiers naturels (puisque $\ldots < r < m < n$). Comme on va le voir, une telle suite ne peut pas exister et donc $P(n)$ est faux quel que soit l'entier naturel n.

Voici le théorème responsable :

Une suite **stationnaire** est une suite constante à partir d'un certain rang.

Théorème 36

Toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.

Preuve

La démonstration serait similaire pour une suite définie à partir d'un certain rang.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite.

L'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas vide (puisque u est une application), et est clairement une partie de $\mathbb{N}$; il admet donc un plus petit élément qu'on notera a.

Il existe donc un entier naturel m tel que $u_m = a$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à m, on a, puisque la suite u est décroissante, $u_n \leqslant u_m$.

D'autre part, par définition de a, on a pour tout entier naturel n supérieur ou égal à m, $u_m \leqslant u_n$.

Ainsi : $\forall n \geqslant m, u_m = u_n$, ce qui signifie que la suite est stationnaire. □

Grâce au théorème précédent, si une suite strictement décroissante d'entiers naturels existait, alors l'ensemble des valeurs prises par cette suite n'est pas vide et admettrait un plus petit élément.
La stricte décroissance de la suite mène alors à une absurdité... laquelle ?

Les exercices du chapitre 7

1 Initialisation et hérédité

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

Dire si chacune des assertions est vraie.

1) $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

2) $\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

3) $\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

4) $\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

5) $\begin{cases} P(1) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

6) $\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

2 Initialisation et hérédité

Etudier par récurrence le prédicat Q défini sur $\mathbb{N}$ par :

$$Q(n) : (n+1)^2 \leqslant 2^n.$$

3 Appliquer un théorème de récurrence

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}.$$

Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1, u_n = 2^{n-1}.$$

4 Appliquer un théorème de récurrence

Soient a un nombre réel positif et u une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant a u_n.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant a^n u_0.$$

5 Appliquer un théorème de récurrence

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geqslant n$.

6 Suite de Fibonacci (~1170-~1250)

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 2^n.$$

7 Appliquer un théorème de récurrence

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^n.$$

8 Appliquer un théorème de récurrence

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1)$.

9 Appliquer un théorème de récurrence

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

10 Démonstrations supplémentaires de cours

En admettant que $(\mathbb{N}, +)$ et $(\mathbb{N}, \times)$ sont des monoïdes, et que la loi $\times$ est distributive sur la loi $+$ montrer que :

1) $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n + p = 0 \Leftrightarrow n = p = 0$.

2) $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, np = 0 \Leftrightarrow (n = 0) \vee (p = 0)$.

3) $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, np = 1 \Leftrightarrow n = p = 1$.

11 Montrer une égalité

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \dfrac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}$.

12 Appliquer un théorème de récurrence

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30} \in \mathbb{N}$.

13 Appliquer un théorème de récurrence

Démontrer que quel que soit l'entier naturel n supérieur à un entier que l'on déterminera, il existe deux entiers naturels a et b tels que :

$$n = 4a + 9b.$$

14 Appliquer un théorème de récurrence

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} + (-1)^n.$$

15 Appliquer un théorème de récurrence

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n.$$

16 Appliquer un théorème de récurrence

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}.$$

Montrer que la suite u est croissante.

17 Inégalités d'entiers

Montrer que pour tout entier naturel n :

1) $1^{2n} + 2^{2n} + 3^{3n} \geqslant 2 \times 7^n$ 2) $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} \geqslant 6^{n+1}$.

18 ★ Appliquer un théorème de récurrence

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=0}^{n} (2k+1)! \geqslant ((n+1)!)^{n+1}$.

19 Appliquer un théorème de récurrence

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Les exercices du chapitre 7

20 **Suite de Lucas (1842-1891)**

Soit L la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 2, L_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \end{cases}.$$

Montrer que pour tout entier naturel n :

1) $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5 \times (-1)^{n+1}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$

3) $L_{2n} = L_n^2 - 2 \times (-1)^n$ 4) $L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$.

21 **Appliquer un théorème de récurrence**

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1 \end{cases}.$$

Montrer que la suite u est strictement croissante.

22 **Appliquer un théorème de récurrence**

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n) \end{cases}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (n-1)!.$$

23 **Suite arithmétique**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique.

Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

1) $u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} = 0$ 2) $u_n - 3u_{n+1} + 3u_{n+2} - u_{n+3} = 0$.

24 **Appliquer un théorème de récurrence**

Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

25 **Appliquer un théorème de récurrence**

Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{4k+3} < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}$.

26 **Application injective**

Montrer que l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) \mapsto (x+y)^2 + y \end{array}$ est injective.

27 **Extractrice**

On appelle **extractrice** toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n.$$

28 **Appliquer un théorème de récurrence**

Montrer que : $\forall n \geqslant 24, \exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n = 5p + 7q$.

29 ★★ **Appliquer un théorème de récurrence**

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \notin \mathbb{N}.$$

30 **Appliquer un théorème de récurrence**

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$2 \times 6 \times 10 \times \ldots \times (4n-6) = \frac{1}{4n-2}(n+1)(n+2)\ldots(2n).$$

31 ★ **Carré parfait**

1) Déterminer un entier naturel x non tel que $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ est un carré parfait.

2) Déterminer un entier naturel y non tel que $5 + 2y + 2y^2 + 2y^3 + y^4$ est un carré parfait.

32 **Carré parfait**

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que si $2n+1$ est un carré parfait, alors $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits consécutifs.

2) Montrer que si $3n+1$ est un carré parfait, alors $n+1$ est la somme de trois carrés parfaits.

33 **Carré parfait**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, ((n+1)!)^n \leqslant 2!\,4!\ldots(2n)!$.

34 **Suite numérique**

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

35 **Appliquer un théorème de récurrence**

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) u_n \end{cases}.$$

Donner l'expression du terme général de cette suite.

37 **Inégalité de Bernoulli (1700-1782)**

Soit a un nombre réel strictement positif.

1) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^n \geqslant 2n^n.$$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^n \geqslant 2^n \times n!.$$

38 **Comme aux olympiades !**

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}.$$

Quelle est la valeur exacte du 999e terme de cette suite ?

D'après les « petits défis » de Xavier Adam (niveau terminale S).

Les exercices du chapitre 7

39 Appliquer un théorème de récurrence

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}.$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + n + 1 \,.$$

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n \end{cases}.$$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^{n+1} - 3^n \,.$$

40 ★ Comme aux olympiades !

Montrer que : $\forall n \geqslant 3, \exists (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 1$.

D'après les « petits défis » de Xavier Adam (niveau terminale S).

41 Carré parfait

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 est un carré parfait.

42 ★ Principe de récurrence de Cauchy

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$.

On suppose qu'on a :

i) $P(1)$ ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n+1) \Rightarrow P(n)$ iii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(2n)$.

Montrer que par récurrence forte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \,.$$

Problèmes du chapitre 7

Les deux problèmes traitent d'exercices de lycée (première et terminale). De nombreuses questions intermédiaires ont été volontairement supprimées, ce qui est légitime pour vous à votre niveau...

Problème I ★ Une sélection d'exercices de première

Partie I - Rappel des définitions

On répondra aux questions en utilisant uniquement le langage formel.

Dans cette partie, les suites sont définies sur $\mathbb{N}$.
1) Rappeler la définition d'une suite arithmétique.
2) Rappeler la définition d'une suite géométrique.
3) Rappeler la définition d'une suite croissante et décroissante.
4) Rappeler la définition d'une suite minorée, majoré puis bornée.
5) Rappeler la définition d'une suite périodique.

Partie II – Etude d'une suite homographique

Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+3u_n} \end{cases}.$$

1) Montrer que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0.$$

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 + \frac{2}{u_n}.$$

3) Exprimer le terme général de la suite u en fonction de n.

Partie III – Trois énoncés coriaces

Les trois énoncés de ce paragraphe sont indépendants.

1) Quels sont les cinq chiffres à droite dans l'écriture décimale du nombre 5^{1000} ?
2) On écrit la suite des nombres entiers naturels non nuls de la manière suivante :

$$123456789101112131415161718\ldots.$$

Déterminer le 1000ᵉ chiffre de cette liste.
3) On considère une suite u d'entiers naturels, définie par :

$$\begin{cases} u_1 > 0 \\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, u_{m^2+n^2} = u_m^2 + u_n^2 \end{cases}.$$

Calculer u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 13$.

Problème II ★ Une sélection d'exercices de terminale

Partie I – Un échauffement

Démontrer que la suite u définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ est croissante.

Partie II – On passe aux choses sérieuses

1) Démontrer que la suite u définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante et majorée.

2) Que peut-on en déduire ?

H est appelé la **suite harmonique**.

3) Quand est-il de la suite H définie pour tout entier naturel non nul n par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$?