Sommes et produits

6

Introduction

Ce chapitre nécessite très peu de prérequis et peut être abordé à n'importe quel moment du moment que le **chapitre 3** a été traité. Il est néanmoins conseillé de le traiter avant les **chapitres 5** et **10**.
Ce chapitre a pour but principal de faire manipuler le symbole somme « Σ » et le symbole produit « Π ».
Les sommes faisant intervenir les coefficients binomiaux feront l'objet du **chapitre 10**.

Prérequis

- Applications (**chapitre 3**)

Objectifs du chapitre

- Introduire la notation « Σ » et étudier les propriétés élémentaires
- Etudier le **changement de variable** (principalement de type translation)
- Etudier les **sommes télescopiques**
- Introduire les **doubles sommes** « $\Sigma\Sigma$ » et étudier les propriétés élémentaires
- Introduire la notation « Π » et étudier les propriétés élémentaires
- Etudier les **produits télescopiques**
- Introduire les **doubles produits** « $\Pi\Pi$ » et étudier les propriétés élémentaires

Le cours du chapitre 6

1 Sommes simples

A Notations et remarques

Bien souvent, nous auront à faire à des nombres réels.
Il est aussi très important que I soit un ensemble fini sans quoi la définition ne pourrait pas avoir de sens (notamment si I est un ensemble non dénombrable).

Nous ne définissons pas ici la somme par récurrence. Nous nous contenterons alors de la remarque suivante.
Soient I un ensemble fini et $(x_i)_{i \in I}$ une famille (finie) de nombres complexes.

La somme des nombres complexes de la famille se note :

$$\sum_{i \in I} x_i .$$

Par exemple, si $I = \{2, 4, \pi\}$, on aura : $\sum_{i \in I} x_i = x_2 + x_4 + x_\pi$.

Bien souvent, I désigne un ensemble d'entiers consécutifs. Par exemple, si m et n sont des entiers naturels tels que $m \leqslant n$, alors pour $I = [\![m, n]\!]$, on a : $\sum_{i \in I} x_i = x_m + x_{m+1} + \ldots + x_{n-1} + x_n$.

Rappel de lecture : « somme pour i allant de m à n des x_i ».

Mais il est courant de noter la dernière somme $\sum_{i=m}^{n} x_i$ au lieu de la noter $\sum_{i \in [\![m,n]\!]} x_i$.

Remarques

On dit que i est une *variable muette*.

1. La lettre i utilisé dans les sommes précédentes peut bien sûr être changées. Par exemple, la somme $\sum_{i \in I} x_i$ est aussi égale à la somme $\sum_{j \in I} x_j$ ou bien à la somme $\sum_{l \in I} x_l$.

2. Si n désigne un entier naturel, alors la somme $\sum_{i=n}^{n} x_i$ est égal à x_n.

3. On convient que $\sum_{i \in \varnothing} x_i = 0$.

Par exemple, la somme $\sum_{i=1}^{n} x_i$ sous-entend que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

4. Lorsque rien n'est précisé, la somme $\sum_{i=m}^{n} x_i$ sous-entendra que $m \leqslant n$ et que m et n sont des entiers naturels.

5. On rencontre aussi la notation $\sum_{m \leqslant i \leqslant n} x_i$ qui est plus souple pour désigner la somme $\sum_{i=m}^{n} x_i$.

Exemples

1. $\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

2. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$.

B Propriétés élémentaires de la somme

Le théorème suivant est admis et permet de « casser la somme en deux ».

Michel Chasles (1793-1880) était un mathématicien français.
N'ayant pas défini la somme par récurrence, il nous est impossible de démontrer le **théorème 1**.

Théorème 1 — Relation de Chasles pour les sommes

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, $(x_i)_{i \in [\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes et k un entier naturel.

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{i=m}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i .$$

Le **théorème 2** a déjà été démontré dans un cadre plus général dans le chapitre précédent (**théorème 5**). Ici on le démontre par récurrence immédiate grâce au **théorème 1**.

Théorème 2 — Linéarité de la somme

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, $(x_i)_{i \in [\![m,n]\!]}$ et $(y_i)_{i \in [\![m,n]\!]}$ deux familles de nombres complexes.

$$\sum_{i=m}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=m}^{n} x_i + \sum_{i=m}^{n} y_i .$$

Le cours du chapitre 6

Le **théorème 3** a déjà été démontré dans un cadre plus général dans le chapitre précédent (**théorème 9**). Ici on le démontre par récurrence immédiate grâce aux **théorèmes 1** et **2**.

Théorème 3

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, $(x_i)_{i \in [\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes et λ un nombre complexe.

$$\sum_{i=m}^{n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=m}^{n} x_i .$$

Exemple

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ terme(s)}} = 1 \times n = n .$$

Remarques

Entre les entiers naturels m et n, il y a $n-m+1$ entiers naturels. Ce résultat, assez intuitif, sera démontré dans le **chapitre 10**.

D'une manière générale, $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} 1 = (n-m+1) \times 1 = n-m+1$.

C Changement de variable

Parfois, il peut être intéressant de changer certaines écritures dans la somme qu'on veut calculer.

Soit par exemple à calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} (k+2)$ qu'on nomme S.

Il est clair que $S = 2+3+4+5 = 14$. Mais trouvons un autre moyen de retrouver ce résultat.
Remplaçons l'écriture $k+2$ par la lettre l. On a donc $l = k+2$. On vient de faire un **changement de variable**.

Quand k varie de 0 à 3, l varie de 2 à 5. Il vient alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} (k+2) = \sum_{l=2}^{5} l$ et on retrouve bien la même somme. Il est même possible de reprendre la lettre k (étant une variable muette) : $\displaystyle\sum_{l=2}^{5} l = \sum_{k=2}^{5} k$.

Si I et J sont deux ensembles finis et qu'il existe une bijection de I dans J, alors pour toute famille $(y_j)_{j \in J}$ de nombres complexes, on a :

$$\sum_{j \in J} y_j = \sum_{i \in I} y_{f(i)} .$$

Ce qui donne également, en considérant une famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres complexes :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{f^{-1}(j)} .$$

Mauvaise nouvelle : un changement de variable n'est pas toujours possible ! Il existe en effet une formule très générale permettant de savoir à quelle condition cela est possible. En pratique, nous utilisons très souvent le changement de variable vu ci-dessus appelé *changement de variable par translation*.
Notre exemple fonctionne bien car l'application $f : \begin{array}{l} [\![0,3]\!] \longrightarrow [\![2,5]\!] \\ x \longmapsto x+2 \end{array}$ est bien une bijection.

D'une manière générale, nous avons le théorème suivant :

Théorème 4 — Changement de variable par translation

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, $(x_i)_{i \in [\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes et k un entier naturel.

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} x_{i+k} .$$

Ce résultat se retrouve naturellement en considérant le changement de variable $i = l + k$ puis en revenant à la variable initiale i.

Preuve

En admettant la formule générale du changement de variable donné ci-dessus, il suffit simplement de remarquer que l'application $f : \begin{array}{l} [\![m,n]\!] \longrightarrow [\![m-k,n-k]\!] \\ x \longmapsto x-k \end{array}$ est une bijection.

En effet, soit y un élément de $[\![m-k,n-k]\!]$.

L'équation d'inconnue x dans $[\![m,n]\!]$, $y = x-k$, admet une unique solution, à savoir $y+k$. Cette solution reste bien dans l'ensemble $[\![m,n]\!]$ car quand $m-k \leqslant y \leqslant n-k$, on a $m \leqslant y+k \leqslant n$. □

Exemple

Soient $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ et $(b_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_{k-1}) + b_n$.

Application du changement de variable $l-1=k$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{l=1}^{n+1} b_{l-1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} + b_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_{k-1}) + b_n .$$

Le cours du chapitre 6

Le théorème suivant fournit un autre type de changement de variable très utile.

Le **théorème 5** est une conséquence de la commutativité de l'addition. Par exemple, effectuer la somme $x_1+x_2+x_3+x_4$, c'est comme effectuer la somme $x_4+x_3+x_2+x_1$. Dans la première somme, les indices vont de 1 à 4, tandis que dans la seconde somme, les indices vont de 4 à 1. Cette formule inverse donc l'ordre des indices dans la somme.

Théorème 5 **Changement de variable par inversion**

Soient $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\leqslant n$ et $(x_i)_{i\in[\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = \sum_{i=m}^{n} x_{n+m-i}\,.$$

Preuve

Il suffit de remarquer que l'application $f : \begin{array}{ccc}[\![m,n]\!] & \longrightarrow & [\![m,n]\!] \\ x & \longmapsto & n+m-x\end{array}$ est une bijection.

En effet, soit y un élément de $[\![m,n]\!]$. Considérons l'équation d'inconnue x dans $[\![m,n]\!]$, $y=n+m-x$.

Cette équation admet une unique solution, à savoir $n+m-y$. Cette solution est bien dans $[\![m,n]\!]$, car quand y est dans $[\![m,n]\!]$, on a $m\leqslant y\leqslant n$, soit $-n\leqslant -y\leqslant -m$, soit $m\leqslant n+m-y\leqslant n$. □

On pouvait aussi remarquer que f est une involution...

Exemple

On calcule ici la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

Calculons la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$ en fonction de n.

D'après le **théorème 5**, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)=\sum_{i=1}^{n}(n+1)-\sum_{i=1}^{n} i=n(n+1)-\sum_{i=1}^{n} i\,.$

Ainsi, $\displaystyle 2\sum_{i=1}^{n} i=n(n+1)$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\,.$

D Autres formules souvent utiles

Il est parfois intéressant de faire des groupements astucieux quand on calcul une somme. Par exemple, regrouper tous les termes d'indice pair et ceux d'indice impair, ou bien regrouper les termes deux par deux comme l'explique le théorème suivant :

Le **théorème 6** montre qu'il est parfois utile de regrouper deux par deux les termes d'une somme.

Théorème 6

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$1)\ \sum_{i=1}^{2n} x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_{2i-1}+x_{2i}) \qquad 2)\ \sum_{i=0}^{2n+1} x_i=\sum_{i=0}^{n}(x_{2i}+x_{2i+1})\,.$$

Preuve

1) Récurrence sur n.

Lorsque $n=1$, on a d'une part, $\displaystyle\sum_{i=1}^{2} x_i=x_1+x_2$ et d'autre part, $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}(x_{2i-1}+x_{2i})=x_1+x_2\,.$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_{2i-1}+x_{2i})\,.$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n+2} x_i=\sum_{i=1}^{2n} x_i+x_{2n+1}+x_{2n+2}=\sum_{i=1}^{n}(x_{2i-1}+x_{2i})+x_{2n+1}+x_{2n+2}&=\sum_{i=1}^{n}(x_{2i-1}+x_{2i})+x_{2(n+1)-1}+x_{2(n+1)}\\&=\sum_{i=1}^{n+1}(x_{2i-1}+x_{2i})\,.\end{aligned}$$

2) En utilisant la première somme, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2n+1} x_i=\sum_{i=1}^{2n} x_i+x_0+x_{2n+1}&=\sum_{i=1}^{n}(x_{2i-1}+x_{2i})+x_0+x_{2n+1}\\&=\sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}+x_{2n+1}+\sum_{i=1}^{n} x_{2i}+x_0\\&=\sum_{l=0}^{n-1} x_{2(l+1)-1}+x_{2n+1}+\sum_{i=0}^{n} x_{2i}\end{aligned}$$

Changement de variable $i=l+1$.

$$= \sum_{i=0}^{n-1} x_{2i+1} + x_{2n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x_{2i+1} + \sum_{i=0}^{n} x_{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (x_{2i} + x_{2i+1}) .$$ □

Exemple

Calculons la somme S_n définie par l'égalité $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1)$.

Il est naturel de faire une disjonction de cas suivant la parité de n.

Cette caractérisation des nombres impairs se démontre aisément en utilisant la division euclidienne de n par 2.

Si n est impair, alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p+1$.

Il vient alors, en utilisant le **théorème 6** que

$$S_{2p+1} = \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k (2k+1) = \sum_{k=0}^{p} [(-1)^{2k}(2k+1) + (-1)^{2k+1}(2k+1)]$$
$$= \sum_{k=0}^{p} [(4k+1) - (4k+3)]$$
$$= -\sum_{k=0}^{p} 2$$
$$= -(2p+1+1)$$
$$= -n-1 .$$

Si n est pair, alors il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$.

On a alors : $S_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k (2k+1) = S_{2p+1} - (-1)^{2p+1}(4p+3) = -2p-2+4p+3 = 2p+1 = n+1$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (-1)^n (n+1)$.

Le **théorème 7** fournit deux formules de regroupement des termes dans une somme : on ajoute le premier terme avec le dernier, le deuxième avec l'avant dernier et ainsi de suite.
On remarquera que dans la première somme, le nombre de termes est impair. C'est la raison pour laquelle le terme x_n apparaît : dans la somme, c'est le terme central.

Théorème 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$1) \ \sum_{i=0}^{2n} x_i = x_n + \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{2n-i}) \qquad 2) \ \sum_{i=0}^{2n+1} x_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i + x_{2n+1-i}) .$$

Preuve

Utilisation du **théorème 6** et changement de variable $l = 2n - i$.

$$1) \ \sum_{i=0}^{2n} x_i = \sum_{i=0}^{2n} x_{2n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{2n-i} + x_n + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{2n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{2n-i} + x_n + \sum_{l=0}^{n-1} x_l = \sum_{i=0}^{n-1} x_{2n-i} + x_n + \sum_{i=0}^{n-1} x_i$$
$$= x_n + \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{2n-i}) .$$

Utilisation du changement de variable $l = 2n+1-i$.

$$2) \ \sum_{i=0}^{2n+1} x_i = \sum_{i=0}^{2n+1} x_{2n+1-i} = \sum_{i=0}^{n} x_{2n+1-i} + \sum_{i=n+1}^{2n+1} x_{2n+1-i} = \sum_{i=0}^{n} x_{2n+1-i} + \sum_{l=0}^{n} x_l = \sum_{i=0}^{n} x_{2n+1-i} + \sum_{i=0}^{n} x_i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (x_i + x_{2n+1-i}) .$$ □

Le **théorème 8** est à retenir contrairement aux deux derniers théorèmes qui ne sont pas d'usage courant.
Le mot « télescopique » vient du fait que dans une telle somme, seul le premier terme et le dernier terme restent car tous les autres termes finissent par se simplifier.

Théorème 8 Somme télescopique (ou domino)

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$ et $(x_i)_{i \in [\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i=m}^{n} (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_m .$$

Preuve

En utilisant comme changement de variable $l = i+1$, la preuve devient très simple.

Le cours du chapitre 6

$$\sum_{i=m}^{n}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=m}^{n}x_{i+1}-\sum_{i=m}^{n}x_i=\sum_{l=m+1}^{n+1}x_l-\sum_{i=m}^{n}x_i=\sum_{i=m}^{n}x_i-\sum_{i=m}^{n}x_i-x_m+x_{n+1}=x_{n+1}-x_m\,.$$

□

E Sommes classiques

Le théorème suivant regroupe des sommes à connaître par cœur. Ils sont de plus d'usage courant.

Théorème 9

Soit n un entier naturel non nul.

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad 3)\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Bien entendu, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$.

Preuve

1) Cette égalité a déjà été démontrée plus tôt.

2) Récurrence sur n.

Quand $n=1$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}k^2=1$ et d'autre part $\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2&=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\&=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}\\&=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\&=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,.\end{aligned}$$

3) Quand $n=1$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}k^3=1$ et d'autre part $\dfrac{1^2\times4}{4}=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}&=\frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4}\\&=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\&=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\,.\end{aligned}$$

□

Le **théorème 10** doit normalement vous être familier.

Théorème 10 Somme géométrique

Soient z un nombre complexe et n un entier naturel.

$$\sum_{k=0}^{n}z^k=\begin{cases}n+1 & \text{si } z=1\\ \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z\neq1\end{cases}.$$

Preuve

C'est évident quand $z=1$.

Soit dorénavant $z\neq1$.

Changement de variable $l=k+1$.

On a :
$$\begin{aligned}(1-z)\sum_{k=0}^{n}z^k=\sum_{k=0}^{n}z^k-z\sum_{k=0}^{n}z^k=\sum_{k=0}^{n}z^k-\sum_{k=0}^{n}z^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}z^k-\sum_{l=1}^{n+1}z^l&=\sum_{k=0}^{n}z^k-\sum_{k=1}^{n+1}z^k\\&=\sum_{k=0}^{n}z^k-\sum_{k=0}^{n}z^k+1-z^{n+1}\end{aligned}$$

$$= 1 - z^{n+1}\,.$$

Donc $(1-z)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}$, soit, comme $z \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. □

2 Doubles sommes

A Approche par un tableau

Dans ce cours, l'approche des doubles sommes se fait essentiellement par un tableau à double entrée. Une approche parfaitement rigoureuse nous emmènerait trop loin.
Soient I un ensemble fini, m et n deux entiers naturels non nuls.

Ainsi, l'ensemble I désigne aussi l'ensemble : $\{(i,j), 1 \leqslant i \leqslant m \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

Notons $I = [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

La somme $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i$ sera dans ce cas plutôt notée $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} x_{i,j}$.

Ces $m \times n$ nombres complexes peuvent être représentés dans un tableau à double entrée :

$i \setminus j$	1	2	$\dots$	n
1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\dots$	$x_{1,n}$
2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\dots$	$x_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\dots$	$x_{m,n}$

Dans le chapitre des espaces vectoriels, cette convention changera pour des raisons pédagogiques.

Par convention et sauf mention contraire, l'indice i désignera toujours une ligne et l'indice j désignera toujours une colonne. Par exemple, l'élément $x_{2,1}$ (représenté en bleu dans le tableau) se trouve sur la deuxième ligne et la première colonne du tableau.
Trouvons un autre moyen de sommer tous les éléments du tableau.

$i \setminus j$	1	2	$\dots$	n
1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\dots$	$x_{1,n}$
2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\dots$	$x_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\dots$	$x_{m,n}$

Addition ligne par ligne.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1,j} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{2,j} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{m,j} \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$$

Addition colonne par colonne.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,1} \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{i,2} \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{i,n} \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$$

Ces constatations nous amènent au théorème suivant :

Le **théorème 11** a déjà été démontré dans un cadre plus général dans le chapitre précédent (**théorème 6**). Il se démontre aisément par récurrence.

Théorème 11 **Formule d'interversion des sommes**

Soient m et n deux entiers naturels non nuls et $(x_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{i,j}\,.$$

Exemple

Calculons la double somme S définie par l'égalité $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} i$.

Lorsque cela est possible, on calcule toujours la somme la plus à droite. Dans le cas contraire, on n'hésite pas à utiliser le **théorème 11**.

Dans notre exemple, les sommes $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} i$ et $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} i$ sont calculables quand on considère la somme la plus à droite.

D'une part, $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} 3i = 3\sum_{i=1}^{2} i = 3(1+2) = 9$.

D'autre part, $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} i = \sum_{j=1}^{3} 3 = 3\times 3 = 9$.

B Somme triangulaire

Cette fois-ci, au lieu d'ajouter tous les éléments du tableau, ajoutons seulement ceux se trouvant au-dessus de la diagonale (diagonale comprise).

Pour cela, nous allons supposer en plus que $m = n$. Cette somme sera notée $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j}$.

$i\setminus j$	1	2	...	n
1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,n}$
2		$x_{2,2}$	...	$x_{2,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n				$x_{n,n}$

Addition ligne par ligne.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1,j} \qquad \sum_{j=2}^{n} x_{2,j} \qquad \sum_{j=n}^{n} x_{n,j} \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}$$

Addition colonne par colonne.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{1} x_{i,1} \qquad \sum_{i=1}^{2} x_{i,2} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{i,n}}_{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}}$$

Comme on le voit, qu'on somme ligne par ligne ou colonne par colonne, il y a une dépendance sur les indices. On ne peut donc pas intervertir sans raison de telles sommes.

Nous disposons ainsi du théorème suivant :

Théorème 12

Soient n un entier naturel non nul et $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}.$$

Attention, le symbole $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j}$ est différent du symbole $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j}$ aussi noté $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_{i,j}$.

Preuve

Récurrence sur n.

L'égalité est évidente quand $n=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=i}^{n+1} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n+1} x_{i,j} + \sum_{j=n+1}^{n+1} x_{n+1,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} + x_{i,n+1}\right) + x_{n+1,n+1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} x_{i,n+1} + x_{n+1,n+1}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j} + \sum_{i=1}^{n+1} x_{i,n+1}\\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}.\end{aligned}$$

□

On peut aussi ajouter les éléments du tableau qui sont strictement au-dessus de la diagonale.
Cette somme sera alors notée $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_{i,j}$.

On admet toujours que $m = n$.

$i \setminus j$	1	2	3	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
1		$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	$\cdots$	$x_{1,n-2}$	$x_{1,n-1}$	$x_{1,n}$
2			$x_{2,3}$	$\cdots$	$x_{2,n-2}$	$x_{2,n-1}$	$x_{2,n}$
3				$\cdots$	$x_{3,n-2}$	$x_{3,n-1}$	$x_{3,n}$
$\cdots$					$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-2$						$x_{n-2,n-1}$	$x_{n-2,n}$
$n-1$							$x_{n-1,n}$
n							

Addition ligne par ligne.

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1,j} \qquad \sum_{j=3}^{n} x_{2,j} \qquad \sum_{j=n-1}^{n} x_{n-2,j} \qquad \sum_{j=n}^{n} x_{n-1,j} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}$$

Addition colonne par colonne.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{1} x_{i,2} \qquad \sum_{i=1}^{2} x_{i,3} \qquad \sum_{i=1}^{n-2} x_{i,n-1} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,n}}_{\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}}$$

Ce qui nous conduit au théorème suivant :

Le **théorème 13**, comme le précédent, est facile à retenir.
En effet, il suffit de repérer quelles sont les valeurs minimum et maximum que peuvent prendre les indices.
Par exemple, dans la première égalité, l'indice i vaut au minimum 1 et au maximum $n-1$ tandis que par rapport à i, j vaut au minimum $i+1$ et au maximum n.

Théorème 13

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(x_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} .$$

Preuve

Récurrence sur n.
L'égalité est évidente quand $n = 2$.

Soit $n \geqslant 2$ et supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$.

On a :
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n+1} x_{i,j} + \sum_{j=n+1}^{n+1} x_{n,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} + x_{i,n+1} \right) + \sum_{j=n+1}^{n+1} x_{n,j}$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,n+1} + x_{n,n+1}$$
$$= \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,n+1} + x_{n,n+1}$$
$$= \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} x_{i,n+1}$$
$$= \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} .$$

□

3 Produits simples

A Notation et remarques

Nous ne définissons pas ici le produit par récurrence. Nous nous contenterons alors de la remarque suivante.
Soient I un ensemble fini et $(x_i)_{i \in I}$ une famille (finie) de nombres complexes.

Le cours du chapitre 6

Le produit des nombres complexes de la famille se note :

$$\prod_{i \in I} x_i \,.$$

Par exemple, si $I = \{2, 4, \pi\}$, on aura : $\prod_{i \in I} x_i = x_2 x_4 x_\pi$.

Bien souvent, I désigne un ensemble d'entiers consécutifs. Par exemple, si m et n sont des entiers relatifs tels que $m \leqslant n$, alors pour $I = [\![m, n]\!]$, on a : $\prod_{i \in I} x_i = x_m x_{m+1} \dots x_{n-1} x_n$.

Rappel de lecture : « produit pour i allant de m à n des x_i ».

Mais il est courant de noter le dernier produit $\prod_{i=m}^{n} x_i$ au lieu de la noter $\prod_{i \in [\![m,n]\!]} x_i$.

Remarques

On dit que i est une *variable muette*.

1. La lettre i utilisé dans les produits précédents peut bien sûr être changée. Par exemple, le produit $\prod_{i \in I} x_i$ est aussi égale au produit $\prod_{j \in I} x_j$ ou bien au produit $\prod_{l \in I} x_l$.
2. Si n désigne un entier relatif, alors le produit $\prod_{i=n}^{n} x_i$ est égal à x_n.
3. On convient que $\prod_{i \in \varnothing} x_i = 1$.

Par exemple, la somme $\prod_{i=1}^{n} x_i$ sous-entend que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

4. Lorsque rien n'est précisé, le produit $\prod_{i=m}^{n} x_i$ sous-entendra que $m \leqslant n$ et que m et n sont des entiers relatifs.
5. On rencontre aussi la notation $\prod_{m \leqslant i \leqslant n} x_i$ qui est plus souple pour désigner le produit $\prod_{i=m}^{n} x_i$.

Exemples

$$\prod_{i=1}^{3} i = 1 \times 2 \times 3 = 6 \,.$$

B Factorielle d'un nombre entier

Il est préférable de convenir à une notation pour désigner le produit des n premiers entiers naturels non nuls. Ce qui nous amène à la définition suivante :

La factorielle a déjà été rencontrée au lycée.

$n\,!$ se lit « factorielle n ».

Par exemple, $1\,! = 0\,! \times 1 = 1$.

Définition 1

Soit n un entier naturel.
On appelle **factorielle** de n, le nombre noté $n\,!$ est défini par :

$$\begin{cases} 0\,! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n\,! = n(n-1)\,! \end{cases}.$$

Exemples

1. $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
2. $6\,! = 5\,! \times 6 = 120 \times 6 = 720$.

C Propriétés élémentaires du produit

Le théorème suivant est admis et permet de « casser le produit en deux ».

N'ayant pas défini le produit par récurrence, il nous est impossible de démontrer le **théorème 14**.

Théorème 14 Relation de Chasles pour les produits

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, $(x_i)_{i \in [\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes et k un entier relatif.

$$\prod_{i=m}^{n} x_i = \left(\prod_{i=m}^{k} x_i\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n} x_i\right).$$

Le cours du chapitre 6

Le **théorème 15** est une sorte de linéarité du produit.

Théorème 15

Soient $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\leqslant n$, $(x_i)_{i\in[\![m,n]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![m,n]\!]}$ deux familles de nombres complexes.

$$\prod_{i=m}^{n} x_iy_i = \left(\prod_{i=m}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=m}^{n} y_i\right).$$

Preuve

Récurrence sur n avec m fixé dans $\mathbb{N}$.

L'égalité est évidente quand $n=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} x_iy_i = \left(\prod_{i=m}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=m}^{n} y_i\right)$.

On a : $\displaystyle\prod_{i=m}^{n+1} x_iy_i = \left(\prod_{i=m}^{n} x_iy_i\right)x_{n+1}y_{n+1} = \left(\prod_{i=m}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=m}^{n} y_i\right)x_{n+1}y_{n+1} = \left(\prod_{i=m}^{n} x_ix_{n+1}\right)\left(\prod_{i=m}^{n} y_iy_{n+1}\right) = \left(\prod_{i=m}^{n+1} x_i\right)\left(\prod_{i=m}^{n+1} y_i\right).$ □

Attention à la puissance de λ.

Théorème 16

Soient $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\leqslant n$, $(x_i)_{i\in[\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes et λ un nombre complexe.

$$\prod_{i=m}^{n} \lambda x_i = \lambda^{n-m+1}\prod_{i=m}^{n} x_i .$$

Preuve

Récurrence sur n avec m fixé dans $\mathbb{N}$.

L'égalité est évidente quand $n=0$ (on trouve x_0 dans les deux cas).

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} \lambda x_i = \lambda^{n-m+1}\prod_{i=m}^{n} x_i$.

On a : $\displaystyle\prod_{i=m}^{n+1} \lambda x_i = \prod_{i=m}^{n} \lambda x_i\lambda x_{n+1} = \lambda^{n-m+1}\prod_{i=m}^{n} x_i\lambda x_{n+1} = \lambda^{n-m+2}\prod_{i=m}^{n+1} x_i .$ □

Pour éviter le cas litigieux 0^0 aucun des nombres complexes est nul.

Théorème 17

Soient $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\leqslant n$, $(x_i)_{i\in[\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes non nuls et p un entier naturel.

$$\left(\prod_{i=m}^{n} x_i\right)^p = \prod_{i=m}^{n} x_i^p .$$

Preuve

Récurrence sur n avec m et p fixés dans $\mathbb{N}$.

L'égalité est évidente quand $n=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $\displaystyle\left(\prod_{i=m}^{n} x_i\right)^p = \prod_{i=m}^{n} x_i^p$.

On a, en vertu du **théorème 17-4** du **chapitre 4** : $\displaystyle\left(\prod_{i=m}^{n+1} x_i\right)^p = \left(\prod_{i=m}^{n} x_ix_{n+1}\right)^p = \left(\prod_{i=m}^{n} x_i\right)^p\times x_{n+1}^p = \prod_{i=m}^{n} x_i^p\times x_{n+1}^p$

$$= \prod_{i=m}^{n+1} x_i^p .$$ □

D Changement de variable

Ce paragraphe va être très court car en effet ce qui a été dit pour les sommes est aussi valables avec les produits. Nous disposons donc du changement de variable par translation et par inversion pour les produits.

Changement de variable $l=k-2$.

Par exemple, $\displaystyle\prod_{k=3}^{5}(k-2) = \prod_{k=1}^{3} k = 3\,! = 6$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{n}(n+1-k)$.

E Autres formules souvent utiles

Nous ne démontrerons pas le théorème suivant car la preuve se fait exactement comme avec les sommes. Si vous voulez quand même faire les démonstrations, vous pouvez faire l'**exercice 16** (qui sera donc corrigé en vidéo).

Le **théorème 18** regroupe les deux manières de regrouper des facteurs dans un produit.

Théorème 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

1) $\displaystyle\prod_{i=1}^{2n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_{2i-1}x_{2i}$ 2) $\displaystyle\prod_{i=0}^{2n+1} x_i = \prod_{i=0}^{n} x_{2i}x_{2i+1}$ 3) $\displaystyle\prod_{i=0}^{2n} x_i = x_n\prod_{i=0}^{n-1} x_{2i}x_{2n-i}$ 4) $\displaystyle\prod_{i=0}^{2n+1} x_i = \prod_{i=0}^{n} x_i x_{2n+1-i}$.

Attention, aucun nombre complexe doit être nul dans les hypothèses.

Théorème 19 **Produit télescopique (ou domino)**

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$ et $(x_i)_{i\in[\![m,n]\!]}$ une famille de nombres complexes non nuls.

$$\prod_{i=m}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_{n+1}}{x_m}.$$

Preuve

Comme avec la somme, avec un changement de variable on a :

$$\prod_{i=m}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \prod_{i=m}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\times x_{i+1}\right) = \prod_{i=m}^{n}\frac{1}{x_i}\times\prod_{i=m}^{n} x_{i+1} = \prod_{i=m}^{n}\frac{1}{x_i}\times\prod_{i=m+1}^{n+1} x_i = \underbrace{\prod_{i=m}^{n}\frac{1}{x_i}\times\prod_{i=m}^{n} x_i}_{=1}\times\frac{1}{x_m}\times x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_m}. \qquad \square$$

Le théorème suivant, fort intéressant, fait le lien entre la somme et le produit. Il utilise le logarithme népérien que vous connaissez très bien depuis la classe de terminale. Ce théorème sera rappelé dans le **chapitre 00** d'analyse.

Attention, le **théorème 20** n'a de sens que si l'on considère une famille de nombres réels strictement positifs.

Théorème 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres réels strictement positifs.

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i).$$

Preuve

Récurrence sur n.

L'égalité est évidente quand $n=1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$.

Rappel de terminale : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$.

On a : $\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} x_i\right) = \ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \times x_{n+1}\right) = \ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i\right) + \ln(x_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) + \ln(x_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\ln(x_i)$. $\square$

4 Doubles produits

Ce qui a été fait pour les sommes se fait aussi pour les produits. Nous nous contentons donc dans ce paragraphe de ressembler les théorèmes relatifs aux doubles produits sans faire les démonstrations (sinon, vous pouvez aller voir les **exercices 18** et **19**).

Le **théorème 21** se démontre par récurrence.
Il permet d'échanger deux « symboles produits » mais attention, les indices doivent être indépendants l'un l'autre.

Théorème 21 **Formule d'inversion des produits**

Soient m et n deux entiers naturels non nuls et $(x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de nombres complexes.

$$\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} x_{i,j} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} x_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} x_{i,j}.$$

Exemple

Voici un exemple simple ci-dessous utilisant le **théorème 21**.

Le cours du chapitre 6

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij^2 = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ij^2 = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n \times \prod_{j=1}^{n} j^2\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n \times \left(\prod_{i=1}^{n} j\right)^2\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n \times (n\,!)^2\right) = \prod_{i=1}^{n} i^n \times \prod_{i=1}^{n} (n\,!)^2$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n \times (n\,!)^{2n}$$

$$= (n\,!)^n \times (n\,!)^{2n}$$

$$= (n\,!)^{3n}.$$

Comme pour les sommes, les **théorème 22** et **23** se retiennent en sachant quelles sont les valeurs minimales et maximales que prennent les indices i et j.

Théorème 22

Soient n un entier naturel non nul et $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} x_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} x_{i,j}.$$

Théorème 23

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1} x_{i,j}.$$

Les exercices du chapitre 6

1 Calcul de sommes

Calculer en fonction de n chacune des sommes suivantes.

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n} n \qquad 3)\ \sum_{k=0}^{n} n \qquad 4)\ \sum_{k=1}^{n} (2k+1).$$

2 Utiliser le symbole « sigma »

1) Ecrire les sommes suivantes avec le symbole « Σ ».

a) $\ln(2)+\ln(3)+\ln(4)+\ldots+\ln(1914)$.

b) $1-a+a^2-a^3+\ldots-a^{19}+a^{20}$.

c) $2+4+6+8+\ldots+22$.

d) $1-2+3-4+\ldots-96+97$.

e) $1000+1010+1020+1030+\ldots+1150$.

2) Dans chacun des cas précédents, calculer la somme.

3 Utiliser le symbole « sigma »

Ecrire les sommes suivantes avec le symbole « Σ ».

1) $\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{2}{2+3}+\dfrac{3}{3+4}+\ldots+\dfrac{524}{524+525}$.

2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}-\ldots-\dfrac{236}{237}+\dfrac{237}{238}$.

4 Changement de variable

Ecrire chacune des sommes suivantes en faisant un changement de variable de sorte que la première valeur de l'indice de la nouvelle somme soit égale à 0.

$$1)\ \sum_{i=10}^{20} i^{i-8} \qquad 2)\ \sum_{k=4}^{50} \frac{e^k}{k+1} \qquad 3)\ \sum_{n=2}^{45} e^3.$$

5 Simplification de sommes

Simplifier au mieux l'écriture des nombres réels suivants :

$$1)\ \sum_{i=1}^{20}\frac{1}{i}-\sum_{k=3}^{21}\frac{1}{k} \qquad 2)\ \sum_{j=1}^{100}(73^j-2j+4) \qquad 3)\ \sum_{i=2}^{20}(10i+4)$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{100}\sum_{i=0}^{k} 2^i.$$

6 Calcul de sommes

Calculer en fonction de n chacune des sommes suivantes.

$$1)\ \sum_{j=0}^{n}\frac{2^j}{3^{j+1}} \qquad 2)\ \sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} \qquad 3)\ \sum_{i=1}^{n}\frac{5\times 2^i}{3^{i+1}}.$$

7 Calcul de produits

Calculer en fonction de n chacun des produits suivants.

$$1)\ \prod_{k=1}^{n} n \qquad 2)\ \prod_{k=1}^{n} k \qquad 3)\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \qquad 4)\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

8 Calcul de sommes

Calculer en fonction de n chacune des sommes suivantes.

$$1)\ \sum_{i=-n}^{-1} 2i \qquad 2)\ \sum_{i=-n}^{n}(i+1).$$

9 Récurrence

Montrer que :

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^{n}\prod_{k=1}^{p}(k+i)=\frac{(n+p+1)!}{n!(p+1)}.$$

10 Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes.

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} kk! \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} \qquad 3)\ \sum_{i=1}^{10}\ln\left(\frac{i}{i+1}\right).$$

11 ★ Calcul de produits

Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$u_n=\prod_{k=0}^{n-1}\cos(2^k x).$$

1) Calculer pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ $u_n\sin(x)$.

2) Donner une expression de u_n en fonction de x et de n.

12 ★ Calcul de sommes

On note S_n, T_n et U_n les sommes définis par les égalités :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\ T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} \text{ et } U_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1) Exprimer T_n en fonction de S_{2n+1} et S_n.

2) Exprimer U_n en fonction de S_n et T_n, puis de S_{2n+1} et S_n.

D'après EML 2007.

13 ★ Récurrence

Soient p un entier naturel non nul.

On pose, pour tout entier naturel non nul n :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\prod_{i=0}^{p}(k+i)}.$$

Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, S_n=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!}-\frac{n!}{(n+p)!}\right).$$

14 Calcul de sommes

Calculer en fonction de n chacune des sommes suivantes.

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \qquad 2)\ \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \qquad 3)\ \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

15 Produit des entiers pairs et impairs 🖫

1) Calculer en fonction de n chacun des produits suivants.

$$a)\ \prod_{k=1}^{n}(2k) \qquad b)\ \prod_{k=1}^{n}(2k+1).$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0=\pi \\ \forall n\geqslant 1, u_n=-\dfrac{2n+1}{2n}u_{n-1}\end{cases}$$

2) Exprimer u_n sans le symbole « Π ».

16 Démonstration de cours 🖫

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

Montrer que :

$$1)\ \prod_{i=1}^{2n}x_i=\prod_{i=1}^{n}x_{2i-1}x_{2i} \qquad 2)\ \prod_{i=0}^{2n+1}x_i=\prod_{i=0}^{n}x_{2i}x_{2i+1}$$

$$3)\ \prod_{i=0}^{2n}x_i=x_n\prod_{i=0}^{n-1}x_{2i}x_{2n-i} \qquad 4)\ \prod_{i=0}^{2n+1}x_i=\prod_{i=0}^{n}x_ix_{2n+1-i}.$$

Les exercices du chapitre 6

17 Calcul de sommes et de produits

Calculer en fonction de n chacune des sommes suivantes.

$$1)\ \sum_{k=2}^{n} \frac{4k-2}{k(k^2-1)} \qquad 2)\ \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

18 Démonstration de cours 🖫

Soient m et n deux entiers naturels non nuls et $(x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de nombres complexes.

Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} x_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} x_{i,j}.$$

19 Démonstration de cours 🖫

Soient n un entier naturel non nul et $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

1) Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} x_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} x_{i,j}.$$

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

2) Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1} x_{i,j}.$$

20 Récurrence

Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

21 Calcul de sommes

Calculer, pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$.

22 Calcul de sommes doubles

Calculer en fonction de n, chacune des sommes suivantes :

$$1)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} (i+j) \qquad 2)\ \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i} (i-1)(n-j+1)$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j(n-i+1).$$

23 Calcul de sommes

Soit x un nombre complexe.

Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

24 Calcul de sommes doubles

Calculer pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (2i+3j)$.

25 Calcul de sommes triples

Calculer pour tout entier naturel n : $\displaystyle\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}\sum_{k=0}^{p} 2^k$.

26 Récurrence

Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

27 Calcul de sommes

Calculer pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$.

28 ★ Calcul de sommes

Calculer pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$.

29 Nombres harmonique

On note, pour tout entier naturel k non nul :

$$H_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p},$$

appelé k-ème **nombre harmonique**.

Calculer pour tout entier naturel n non nul $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kH_k$ en fonction de n et H_n.

30 Calcul de produits

Calculer, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$: $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (n(n+p)-k(k+p))$.

31 Calcul de sommes

Calculer pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^3-3k^2+2k+1)$.

32 Calcul de sommes doubles

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal 2, calculer :

$$1)\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij \qquad 2)\ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}.$$

33 Transformation d'Abel

Soient $n\in\mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ deux familles de nombres complexes.

Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on note $B_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} b_i$.

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)B_k.$$

34 ★ Calcul de sommes doubles

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal 1, calculer :

$$1)\ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) \qquad 2)\ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j).$$

35 ★★ Calcul de sommes doubles

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal 2, calculer :

$$1)\ \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij \qquad 2)\ \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} ij \qquad 3)\ \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij \qquad 4)\ \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij.$$

Les exercices du chapitre 6

36 ★★ Calcul de sommes doubles

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal 2, calculer :

$$1)\ \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j| \qquad 2)\ \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=n}} ij \qquad 3)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1}.$$

37 Somme de carrés

Soient n un entier naturel non nul et $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = n \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\, x_k = 1\,.$$

38 Somme de puissances entières

Soient n un entier naturel non nul et $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \sum_{k=1}^{n} x_k^4 \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\, x_k \in \{0,1\}\,.$$

39 Calcul de sommes

Soient n un entier naturel non nul.

Calculer la somme :

$$1\times n + 2\times(n-1) + \ldots + (n-1)\times 2 + n\times 1\,.$$

40 Calcul de sommes

Calculer pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right).$

41 Calcul de produits

Calculer pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}\,.$

42 ★★ Calcul de produits

Soient n un entier naturel non nul et i un entier naturel.

Simplifier au mieux et sans symbole « Π » le produit suivant :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}.$$

43 ★ Calcul de sommes

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, calculer :

$$1)\ \sum_{k=0}^{2n} \min(k,n) \qquad 2)\ \sum_{k=0}^{2n} \max(k,n)\,.$$

44 Calcul de sommes doubles

Calculer en fonction de n chacune des sommes suivantes :

$$1)\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j} \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n} k2^k\,.$$

45 Sens de variation d'une suite

Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Montrer que la suite u est strictement croissante.

46 Calcul de sommes

Calculer pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)^2(-1)^k\,.$

47 Calcul de sommes

Calculer pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2(n+1-k)\,.$

48 Inégalité et somme

Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k\,! \leqslant (n+1)\,!\,.$

49 ★★ Calcul de sommes doubles

Pour tout entier naturel n non nul, calculer les sommes suivantes :

$$1)\ \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2 \qquad 2)\ \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} (i+j)\,.$$

50 Calcul de produits

Soit a un nombre réel et P le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1+a^{2^k})\,.$

1) Calculer ce produit quand $a = 1$.

2) Calculer $(1-a)P$ quand $a \neq 1$ et en déduire la valeur de P.

51 Calcul de produits

Pour tout entier naturel non nul n, simplifier le produit suivant :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}.$$

52 Calcul de produits

Montrer de deux manières différentes que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)\,.$$

Problèmes du chapitre 6

Les deux problèmes, indépendants, traitent de certaines sommes d'entiers naturels.

Problème I Somme des cubes

On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, la somme S_n définie par l'égalité $S_n = \sum_{i=1}^{n} k^3$, par quatre méthodes différentes.

Partie I – Première méthode

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Partie II – Deuxième méthode

1) Calculer, pour tout entier naturel k, $(k+1)^4 - k^4$

2) En déduire que :

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_n + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n\,.$$

3) Retrouver l'expression de S_n.

Partie III – Troisième méthode

1) Justifier que pour tout entier naturel k, $(n+1-k)^3 = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 k + 3(n+1)k^2 - k^3$.

2) En déduire que :

$$S_n = n(n+1)^3 - 3(n+1)^2\sum_{k=1}^{n} k + 3(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 - S_n\,.$$

3) Retrouver l'expression de S_n.

Partie IV – Quatrième méthode

1) En calculant de deux façons différentes la somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} j^2$, montrer que :

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i\,.$$

2) Retrouver l'expression de S_n.

Problème II ★ Propriétés caractéristiques de certaines sommes d'entiers

On sait déjà que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Réciproquement, on se donne une suite $(x_k)_{k \geqslant 1}$ de réels strictement positifs.

On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$.

1) Montrer alors que pour tout entier naturel non nul k, on a $x_k = k$.

Soit p un entier strictement positif.
Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p\,.$$

C'est notamment le cas quand $p = 3$.

On suppose que pour tout entier naturel non nul n, S_n est le carré d'un entier.

2) Montrer que l'entier p est nécessairement égal à 3.