Topologie de $\mathbb{R}$

4

Introduction

Afin de pouvoir généraliser les concepts principaux d'analyse sur des objets mathématiques autre que les fonctions et les suites (limite, continuité...), un cadre général s'impose : la **topologie**.
Peut-on parler de limite, de continuité ou d'autres concept d'analyse avec des matrices ? des polynômes ? La question pourrait sembler au premier abord fantaisiste.
Notre propos ici et de ne pas exposer un cours général sur la topologie (ce qui se fera en licence 3 avec les *espaces topologiques*). Ce chapitre vise d'abord à familiariser le lecteur avec le vocabulaire de la topologie usuelle (d'abord sur $\mathbb{R}$) dont il verra l'intérêt bien plus tard.

Prérequis

- Propriétés élémentaires des nombres réels, borne supérieure et inférieure, partie entière (**chapitre 1**)
- Opérations sur les ensembles (**chapitre 1** du livre Algèbre Licence 1)
- Produit cartésien (**chapitre 2** du livre Algèbre Licence 1)
- Familles d'ensembles (**chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1)
- Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ (**chapitre 4** du livre Algèbre Licence 1)

Objectifs du chapitre

- Introduire la notion de **voisinage** et étudier ses propriétés
- Introduire la notion d'**ouvert** et de **fermé**
- Introduire la notion d'**adhérence**, d'**intérieur** et de **frontière**
- Introduire la **densité** et montrer que les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$
- Déterminer les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Le cours du chapitre 4

1 Voisinages

Nous définissons plus loin ce que l'on appelle « topologie ».

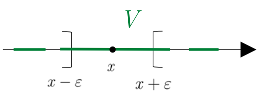
Cette notion est fondamentale en *topologie*. Elle nous servira déjà dans le **chapitre 8** pour les limites de fonctions.

A Définitions

Dans ce chapitre, l'ensemble de référence sera systématiquement $\mathbb{R}$. Il ne sera pas donc nécessaire de préciser « dans $\mathbb{R}$ ».

Définition 1

Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x un nombre réel.
Dire que V est un **voisinage** de x (dans $\mathbb{R}$) signifie que :
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V .$$



Remarques

1. Autrement dit, dire que V est un voisinage de x signifie qu'il contient au moins un intervalle ouvert centré en x.
2. Par négation, dire que V n'est pas un voisinage de x signifie que :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\subset V .$$
3. Le sous-ensemble V est un voisinage de x si et seulement si :
$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, [x-\alpha, x+\alpha] \subset V .$$
4. L'ensemble $\mathbb{R}$ est clairement un voisinage de tout nombre réel.
5. L'ensemble vide est un voisinage de tout nombre réel.

A vérifier par le lecteur en exercice (correction en vidéo).

En effet, l'assertion : $\forall x \in \varnothing, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \varnothing$, est vraie.

Exemples

1. L'intervalle $[0,2]$ est un voisinage de 1. Pour le démontrer rigoureusement, il suffit de choisir un nombre réel ε strictement positif tel que $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset [0,2]$. Le nombre $\dfrac{1}{2}$ peut convenir (mais ce n'est pas le seul).
2. L'intervalle $]0,2]$ n'est pas un voisinage de 0 puisque ce dernier n'appartient pas à $]0,2]$ (voir le **théorème 1**).
3. L'intervalle $[0,2]$ n'est pas un voisinage de 0. Pour le démontrer rigoureusement, on se fixe un nombre réel strictement positif ε .
Il suffit ensuite de trouver un élément de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui n'est pas dans $[0,2]$. Le nombre $\dfrac{-\varepsilon}{2}$ convient.
4. Le singleton $\{0\}$ n'est pas un voisinage de 0 (à démontrer par le lecteur).

En choisissant $\varepsilon = 0$, on aurait une inclusion vraie. Mais cela entrainerait aussi que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont des voisinages de 1 ! Ce qui explique l'exclusion de 0 dans la **définition 1**.

Intuitivement, c'est parce qu'il n'y a pas de « place à gauche de 0 ». Il y a comme un « débordement » de ce côté.

La **définition 2** est rarement utilisée en pratique.

Définition 2

Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x un nombre réel.
Dire que V est un **voisinage** de x **à gauche** (dans $\mathbb{R}$) signifie que :
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]x-\varepsilon, x] \subset V .$$

Exemple

L'intervalle $[0,2]$ est un voisinage de 2 à gauche.

La **définition 3** est rarement utilisée en pratique.

Définition 3

Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x un nombre réel.
Dire que V est un **voisinage** de x **à droite** (dans $\mathbb{R}$) signifie que :
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, [x, x+\varepsilon[\subset V .$$

Exemple

L'intervalle $[0,2]$ est un voisinage de 0 à droite.

Dans les **définitions 4** et **5**, on traite le cas d'un élément de $\{-\infty, +\infty\}$. Ainsi, on a défini la notion de voisinage d'un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ (dans $\mathbb{R}$).

Il est possible d'être moins strict : $\exists A \in \mathbb{R},]A, +\infty[\subset V$.

Définition 4

Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Dire que V est un **voisinage** de $+\infty$ (dans $\mathbb{R}$) signifie que :
$$\exists A \in \mathbb{R}_+^*,]A, +\infty[\subset V .$$

Exemple

Le sous-ensemble $\{2,3\} \cup]7, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ (à prouver par le lecteur).

Le cours du chapitre 4

Définition 5

Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Dire que V est un **voisinage** de $-\infty$ (dans $\mathbb{R}$) signifie que :

$$\exists B \in \mathbb{R}_-^*,]-\infty, B[\subset V .$$

Il est possible d'être moins strict : $\exists B \in \mathbb{R},]-\infty, B[\subset V$.

Exemple

Le sous-ensemble $]-\infty, 10^{100}[$ est un voisinage de $-\infty$ dans $\mathbb{R}$ (à prouver par le lecteur).

Remarque

Un **voisinage épointé** d'un nombre réel est un voisinage de ce nombre réel privé de ce nombre réel.
Par exemple, le sous-ensemble $[0,1[\cup]1,2]$ est un voisinage épointé de 1.

B Propriétés des voisinages

Pour $x \in \mathbb{R}$, on notera par commodité $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\mathbb{R}$.

Formellement, on a : $\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V\}$.

Théorème 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V .$$

La démonstration du **théorème 1** est immédiate. Un voisinage d'un nombre réel contient nécessairement ce nombre réel.

Théorème 2

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall V \in \mathcal{V}(x), \forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x) .$$

La démonstration du **théorème 2** est immédiate (transitivité de l'inclusion). Autrement dit, toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage d'un nombre réel est lui-même un voisinage de ce nombre réel.

Remarque

De ce qui précède, il est clair qu'une réunion d'une famille de voisinages d'un nombre réel est un voisinage de ce nombre réel (puisque la réunion contient l'un des voisinages qui la forme).

Ainsi, si $(V_i)_{i\in I}$ désigne une famille de voisinage d'un nombre réel x, alors l'ensemble $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage du nombre réel x.

Théorème 3

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \forall V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (\forall i \in \{1, \ldots, n\}, V_i \in \mathcal{V}(x)) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{V}(x) .$$

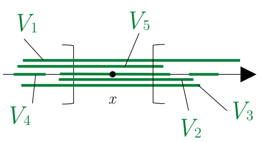
Autrement dit, une intersection finie de voisinages d'un nombre réel est un voisinage de ce nombre réel.

Preuve

Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $V_i \in \mathcal{V}(x)$.

Il existe alors par définition des nombres réels strictement positifs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},]x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i[\subset V_i .$$



En posant $\varepsilon = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Min}} (\varepsilon_i)$, on a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et comme pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i[$, on a

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= \bigcap_{i=1}^{n}]x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i[.$$

Il vient que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$.

Intersection membre à membre.

Ainsi, par définition, l'ensemble $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de x dans $\mathbb{R}$. □

Remarque

Attention, une intersection infinie de voisinages d'un nombre réel x n'est pas nécessairement un voisinage de x !

Par exemple, la famille $\left(\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est composée des voisinages de 0. Pourtant, l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ est réduit au singleton $\{0\}$ qui n'est pas un voisinage de 0.

Voir l'**exercice 2** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

Théorème 4

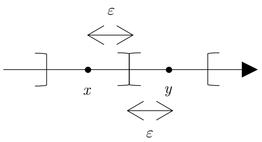
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Rightarrow \exists (V,W) \in \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y), V \cap W = \varnothing .$$

Le **théorème 4** traduit le fait que l'ensemble $\mathbb{R}$ est un **espace de Hausdorff**.
Nous reverrons cette notion en licence 2 avec les *espaces vectoriels normés*.

Preuve

Supposons que les nombres réels x et y sont distincts.

Posons $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2}$.



Il est clair que $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et les ensembles $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et $]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$, sont des voisinages respectifs des nombres x et y, et sont tels que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\,\cap\,]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\,=\varnothing$.

En effet, s'il existait un nombre réel a dans l'intersection précédente, alors $x-\varepsilon<a<x+\varepsilon$ et $y-\varepsilon<a<y+\varepsilon$.

On a : $|x-y| \leqslant |x-a|+|y-a|$.

Cela entrainerait que $|x-a|<\varepsilon$ et $|y-a|<\varepsilon$, d'où via l'**inégalité triangulaire**, $|x-y|<|x-y|$. □

Remarque

Felix Hausdorff (1868-1942) était un mathématicien allemand, un pionnier de la topologie.

2 Parties ouvertes et parties fermées

A Parties ouvertes

Il est naturel de s'intéresser aux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont voisinages de chacun de leur point. Ce qui mène naturellement à la définition suivante :

La **définition 6** est fondamentale.

Définition 6

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Dire que le sous-ensemble Ω est un **ouvert** (de $\mathbb{R}$) signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in \Omega \Rightarrow \Omega \in \mathcal{V}(x)\,.$$

Autrement dit, Ω est un voisinage de chacun de ses éléments.

Remarques

1. Par négation, dire que le sous-ensemble Ω n'est pas un ouvert signifie que :

$$\exists x \in \mathbb{R}, (x \in \Omega) \wedge (\Omega \notin \mathcal{V}(x))\,.$$

Autrement dit, il existe un nombre réel x de Ω tel que Ω n'est pas un voisinage de x.

2. Les ensembles $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts (vérification immédiate).
3. On parle aussi de **partie ouverte** dans $\mathbb{R}$ au lieu d'ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Le sous-ensemble $\{4\}\cup[0,1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ car ce n'est pas un voisinage de 4.
2. Le singleton $\{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. L'intervalle $]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 5

Soient I un ensemble et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Autrement dit, une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est encore un ouvert.

Preuve

Lorsque I est vide, le résultat est évident (l'ensemble vide est un ouvert).

On suppose I non vide.

Soit x un élément de $\displaystyle\bigcup_{i\in I}\Omega_i$.

Par définition, il existe $i_0\in I$ tel que $x\in\Omega_{i_0}$. Puis, comme Ω_{i_0} est un ouvert, il est en particulier un voisinage de x.

Utilisation du **théorème 2**.

Enfin, comme on a de plus $\Omega_{i_0}\in\displaystyle\bigcup_{i\in I}\Omega_i$, il vient que $\displaystyle\bigcup_{i\in I}\Omega_i\in\mathcal{V}(x)$.

Ainsi, l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. □

Théorème 6

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ des ouverts de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Noter ici qu'il s'agit d'une intersection <u>finie</u> d'ouverts.

Le cours du chapitre 4

Preuve

Lorsque I est vide, le résultat est évident (l'ensemble $\mathbb{R}$ est un ouvert).

Supposons que I n'est pas vide.

Soit x un élément de $\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$.

Par définition, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $x \in \Omega_i$. Puis, comme pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, Ω_i est un ouvert, ces ouverts sont en particulier des voisinages de x.

Utilisation du **théorème 3**.

Il vient que $\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \in \mathcal{V}(x)$.

Ainsi, l'ensemble $\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. □

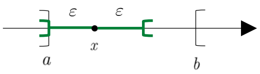
Théorème 7

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.
L'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Preuve

Quand $a = b$, on a $]a, b[= \varnothing$.

Excluons le cas où $a = b$ (cas trivial) et supposons alors que $a < b$.
Soit x un élément de $]a, b[$.



Posons $\varepsilon = \text{Min}(x - a, b - x)$.

Comme $a < x$, on a $x - a > 0$ et comme $x < b$, on a $b - x > 0$. Donc $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Puis comme $-\varepsilon < 0 < \varepsilon$, on a $x - \varepsilon < x < \varepsilon + x$.

Il reste à montrer que $a \leqslant x - \varepsilon$ et $\varepsilon + x \leqslant b$.

Comme $\varepsilon = x - a$, on a $\varepsilon \leqslant b - x$.

Quand $\varepsilon = x - a$, on a bien $a \leqslant x - \varepsilon$. Puis, on a clairement $\varepsilon + x \leqslant b$.

Comme $\varepsilon = b - x$, on a $\varepsilon \leqslant x - a$.

Quand $\varepsilon = b - x$, on a clairement $a \leqslant x - \varepsilon$ et $\varepsilon + x \leqslant b$.

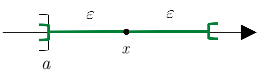
Ainsi, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]a, b[$ et l'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. □

Théorème 8

Soit a un nombre réel.
L'intervalle $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Preuve

Soit x un élément de $]a, +\infty[$.



Posons $\varepsilon = x - a$.

On remarque que $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ puisque $a < x$.

Puis comme $-\varepsilon < 0 < \varepsilon$, on a $x - \varepsilon < x < \varepsilon + x$.

Enfin, il est clair que $a \leqslant x - \varepsilon$, donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]a, +\infty[$.

L'intervalle $]a, +\infty[$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}$. □

Théorème 9

Soit a un nombre réel.
L'intervalle $]-\infty, a[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Preuve

Comme dans la preuve du théorème précédent. □

Remarque

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$

C'est implicite, mais il y a parmi cette liste, l'ensemble vide (quand $a = b$).

Comme nous voulons de le voir, les intervalles $]a, b[$, $]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. De plus, $\mathbb{R}$ est un ouvert. On démontrera plus loin que les autres intervalles de $\mathbb{R}$ (ceux qualifiés de fermés et ceux qualifiés de semi-ouverts) ne sont pas des ouverts. C'est la raison pour laquelle que les intervalles ouverts sont dits ouverts (et ce sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qualifiés ainsi).
A partir de ces ouverts de bases, on fabrique tous les ouverts possibles de $\mathbb{R}$.

Le cours du chapitre 4

Notons $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

Remarquez que $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On dit alors que ce dernier est une **topologie** sur $\mathbb{R}$. Car en effet, l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ est telle que :

Cette notion est définie de manière plus générale en licence 3.

- $\varnothing \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$;
- la réunion d'une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ est encore dans $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$;

C'est prouvé via le **théorème 5**.

- l'intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ est encore dans $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$.

C'est prouvé via le **théorème 6**.

On dit alors que le couple $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$ est un **espace topologique**. Ce couple et aussi un **espace de Hausdorff**.

Cette topologie que nous utilisons dans ce chapitre est la plus naturelle et sera donc qualifiée d'*usuelle*. Mais il est possible de faire autrement.

Par exemple, il existe la **topologie grossière** où seulement $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont les ouverts (les trois critères sont vérifiés).

Donc $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$.

Il existe aussi la **topologie discrète** où cette fois-ci toutes les parties de $\mathbb{R}$ sont des ouverts (les trois critères sont encore vérifiés).

Donc $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

B Parties fermées

La notion de **fermé** est moins intuitive que celle d'ouvert.

Définition 7

Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Dire que le sous-ensemble F est un **fermé** (de $\mathbb{R}$) signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus F \Rightarrow \mathbb{R} \setminus F \in \mathcal{V}(x).$$

Autrement dit, dire que F est un fermé signifie que son complémentaire (dans $\mathbb{R}$) est un ouvert.

Remarques

1. Il est clair que les ensembles $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$. Ce sont d'ailleurs les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}$ à jouir de cette propriété (à prouver par le lecteur).
2. On parle aussi de **partie fermée** dans $\mathbb{R}$ au lieu d'ensemble fermé de $\mathbb{R}$.
3. Une partie Ω de $\mathbb{R}$ est ouverte si et seulement si $\mathbb{R} \setminus \Omega$ est un fermé dans $\mathbb{R}$ (démonstration immédiate).

Exemples

1. L'intervalle $[0,1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.
2. L'intervalle $[0,1]$ est un fermé dans $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $\{2, 3, \sqrt{7}\}$ est un fermé dans $\mathbb{R}$ (la preuve demande connaître le **théorème 11**).

Une partie de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement ouverte ou fermée. De plus, une partie non ouverte n'est pas nécessairement fermée et inversement.

Théorème 10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_n$ des fermés de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Noter ici qu'il s'agit d'une réunion finie de fermés.

En effet, l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{n \geqslant 2} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$ car il est égal à l'ensemble $]0,1[$.

Preuve

Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'ensemble F_i est un fermé de $\mathbb{R}$.

Il est donc équivalent à dire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{R} \setminus F_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus F_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble $\displaystyle\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus F_i)\right)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Utilisation du **théorème 6**.

Ainsi, l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé de $\mathbb{R}$. □

Théorème 11

Soient I un ensemble et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Autrement dit, une intersection (finie ou infinie) de fermés est encore un fermé.

Preuve

Par hypothèse, pour tout $i \in I$, l'ensemble F_i est un fermé de $\mathbb{R}$.

Donc pour tout $i \in I$, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus F_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Utilisation du **théorème 5**.

Donc, l'ensemble $\bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus F_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Il vient donc que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus F_i) \right)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'ensemble $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de $\mathbb{R}$. □

Théorème 12

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

L'intervalle $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Preuve

On a $\mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

Le cas où $a = b$ fournit $[a, b] = \{a\}$. Et cet ensemble est bien un fermé dans de $\mathbb{R}$ car son complémentaire est une réunion de deux ouverts.

Supposons alors $a \neq b$.

On a : $\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$.

Ce qui montre que l'intervalle $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. □

Théorème 13

Soit a un nombre réel.

L'intervalle $[a, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Preuve

On a : $\mathbb{R} \setminus [a, +\infty[=]-\infty, a[$.

Donc l'intervalle $[a, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$. □

Théorème 14

Soit a un nombre réel.

L'intervalle $]-\infty, a]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Preuve

On a : $\mathbb{R} \setminus]-\infty, a] =]a, +\infty[$.

Donc l'intervalle $]-\infty, a]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. □

Remarque

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

La dénomination « fermé » est donc justifiée pour ces intervalles.

Les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont fermés sont les intervalles : $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ et $\mathbb{R}$.

3 Intérieur, adhérence et frontière

A Intérieur

Définition 8

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

On appelle **intérieur** de A, l'ensemble noté $\overset{\circ}{A}$ et défini par :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A}} \Omega .$$

Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est la réunion des ouverts de $\mathbb{R}$ contenus dans A.

Remarques

Les ouverts sont inclus dans A.

1. Il est clair que par définition $\overset{\circ}{A} \subset A$.

C'est une réunion d'ouverts.

2. Il est clair que l'intérieur d'un ensemble est un ouvert de $\mathbb{R}$.

3. Tout élément de l'intérieur d'un ensemble est appelé **point intérieur**.

Le cours du chapitre 4

Exemples

1. L'intérieur d'un singleton est vide, car seul l'ensemble vide remplit les conditions de la définition.

2. On a $\overset{\circ}{\overbrace{[0,1[}} =]0,1[$.

3. D'une manière générale, l'intérieur d'un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$, s'obtient en supprimant les éventuelles extrémités de cet intervalle.

Pour a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$, on a $\overset{\circ}{\overbrace{[a,b]}} = \overset{\circ}{\overbrace{[a,b[}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a,b]}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a,b[}} =]a,b[$.

Autrement dit, l'intérieur de A est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) inclus dans A.

Théorème 15

$$\forall (A,\Omega) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}), \begin{cases} \Omega \subset \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A \end{cases} \Rightarrow \Omega \subset \overset{\circ}{A} .$$

Preuve

On sait déjà que l'intérieur de A est un ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans A.

Soit Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans A.

Dans la réunion figure Ω_1 .

On a clairement $\Omega_1 \subset \bigcup\limits_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A}} \Omega$.

Donc par définition $\Omega_1 \subset \overset{\circ}{A}$. □

Le **théorème 16** fournit une caractéristique des ouverts de $\mathbb{R}$.

Théorème 16

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A} .$$

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que A soit un ouvert de $\mathbb{R}$.

Il est déjà clair que $A \subset \bigcup\limits_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A}} \Omega$ puisque A figure parmi cette réunion.

Puis, l'inclusion $\bigcup\limits_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A}} \Omega \subset A$ résulte du fait que dans la réunion, tous les éléments sont inclus dans A.

Ainsi $A = \bigcup\limits_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A}} \Omega = \overset{\circ}{A}$.

($\Leftarrow$) Immédiat puisque $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. □

Le **théorème 17** offre une caractéristique des intérieurs.

Théorème 17

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x) .$$

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que x est un élément de $x \in \overset{\circ}{A}$.

Par définition, il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ inclus dans A tel que $x \in \Omega$.

Donc Ω est en particulier un voisinage de x.

Utilisation du **théorème 2**.

Puis, comme $\Omega \subset A$, il vient que A est un voisinage de x, c'est-à-dire que $A \in \mathcal{V}(x)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $A \in \mathcal{V}(x)$.

Par définition, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.

Comme l'ensemble $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et est inclus dans A, on a l'inclusion $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \bigcup\limits_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A}} \Omega$,

d'où l'inclusion $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \overset{\circ}{A}$ soit $x \in \overset{\circ}{A}$ (puisque $x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$). □

Le **théorème 18** rassemble les propriétés ensemblistes des intérieurs.

Théorème 18

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

$$1)\ \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A} \quad 2)\ A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \quad 3)\ \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \quad 4)\ \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

Preuve

L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, donc...

1) Immédiat via le **théorème 16**.

2) Supposons que $A \subset B$.

L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans A et donc dans B.

Puis, comme $\overset{\circ}{B}$ est par définition le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans B, on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3) On dispose des implications suivantes :

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \\ \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \end{cases} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}.$$

4) On dispose des implications suivantes :

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \\ \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{B} \end{cases} \Rightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

De plus, $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $\overset{\circ}{B} \subset B$, donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$.

Ainsi, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans $A \cap B$.

Mais $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans $A \cap B$.

Finalement, on a $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ et donc $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. □

Remarque

Donnons un exemple où $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Choisissons $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$.

Le lecteur peut aussi prendre un exemple plus intéressant en prenant l'ensemble des nombres rationnels et l'ensembles des nombres irrationnels.

On a d'une part $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{\overbrace{[0,2]}} =]0,2[$ et d'autre part, $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0,1[\cup]1,2[$.

B Adhérence

Par commodité, notons $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}$.

Définition 9

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

On appelle **adhérence** de A, l'ensemble noté $\overline{A}$ et défini par :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \\ A \subset F}} F.$$

Autrement dit, $\overline{A}$ est l'intersection des fermés de $\mathbb{R}$ contenant A.

Remarques

1. Il est clair que par définition que $A \subset \overline{A}$.

Les fermés contiennent A.

2. Il est clair que l'adhérence d'un ensemble est un fermé de $\mathbb{R}$.

C'est une intersection de fermés.

3. Tout élément de l'adhérence d'un ensemble est appelé **point adhérent**.
4. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Attention, en analyse (surtout en topologie), il est recommandé d'employer la notation « $\overline{A}$ » pour l'adhérence de A et la notation « $\mathbb{R} \setminus A$ » ou « $\complement_{\mathbb{R}} A$ » pour le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$, sans quoi, il y a confusion.

Exemples

1. Lorsqu'il s'agit d'un intervalle de $\mathbb{R}$, il est facile de déterminer son adhérence.

Il suffit en effet de considérer l'intervalle fermé des mêmes extrémités de l'intervalle d'origine.

Pour a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$, on a $\overline{[a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} = [a,b]$.

2. Attention, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, mais $\overline{\mathbb{R}}$ ne désigne pas ici la droite numérique achevée de $\mathbb{R}$.

Par contre dans $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la topologie usuelle (hors-programme ici), l'adhérence de $\mathbb{R}$ est bien la droite numérique achevée, c'est ce qui explique la notation.

Théorème 19

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

$$1)\ \mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R} \setminus A} \qquad 2)\ \mathbb{R} \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}}.$$

Le **théorème 19** fait le lien entre la notion d'intérieur et d'adhérence.

Preuve

1) On a : $\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A}} \Omega = \bigcap_{\substack{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ \Omega \subset A}} (\mathbb{R} \setminus \Omega) = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R}\setminus A \subset F}} F = \overline{\mathbb{R} \setminus A}$.

Application du premier cas à $\mathbb{R} \setminus A$ au lieu de A.

2) On a : $\mathbb{R} \setminus \overline{A} = \mathbb{R} \setminus \overline{(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A))} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{(\mathbb{R} \setminus A)}}) = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}}$. □

Autrement dit, l'adhérence de A est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) qui contient A.

Théorème 20

$$\forall (A, F) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}), \begin{cases} F \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \\ A \subset F \end{cases} \Rightarrow \overline{A} \subset F \,.$$

Preuve

Supposons que F est un fermé de $\mathbb{R}$ qui contient A.
Alors $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et comme $A \subset F$ on a $\mathbb{R} \setminus F \subset \mathbb{R} \setminus A$.
Donc $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus A$, donc (**théorème 15**) $\mathbb{R} \setminus F \subset \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}}$, soit $\mathbb{R} \setminus F \subset \mathbb{R} \setminus \overline{A}$.
Il vient alors que $\overline{A} \subset F$. □

Le **théorème 21** fournit une caractéristique des points adhérents.

Théorème 21

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow A = \overline{A} \,.$$

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que A soit un fermé de $\mathbb{R}$.
Alors $\mathbb{R} \setminus A$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et donc (**théorème 16**), $\mathbb{R} \setminus A = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}}$, soit $\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \overline{A}$ et donc $A = \overline{A}$.
($\Leftarrow$) Immédiat puisque $\overline{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. □

Le **théorème 22** offre une caractéristique des points adhérents.

Théorème 22

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \varnothing \,.$$

Preuve

Procédons directement par équivalence :

Quelques repères :
1) troisième équivalence : utilisation du **théorème 17** (par la négation) ;
2) quatrième équivalence : utilisation de la contraposée du **théorème 2** ;
3) sixième équivalence : utilisation du **théorème 17** du **chapitre 1** du livre Algèbre Licence I.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{(\mathbb{R} \setminus A)}} \Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{\overbrace{(\mathbb{R} \setminus A)}} \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A \notin \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \not\subset \mathbb{R} \setminus A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), \neg(V \subset \mathbb{R} \setminus A) \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), \neg(V \cap A = \varnothing) \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \varnothing \,. \end{aligned}$$
□

Le **théorème 23** rassemble les propriétés ensemblistes des adhérences.

Théorème 23

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ 2) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ 3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Il est aussi possible de prouver ces égalités de manière indépendante sans utiliser les intérieurs (ce qui semble plus facile).

Preuve

1) On a : $\mathbb{R} \setminus \overline{\overline{A}} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus \overline{A}}} = \overset{\circ}{\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}}} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}} = \mathbb{R} \setminus \overline{A}$.
Donc $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
2) Par implication on a :

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{R} \setminus B \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus B}} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \overline{B} \subset \mathbb{R} \setminus \overline{A} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \,.$$

3) On a : $\mathbb{R} \setminus \overline{A \cup B} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus (A \cup B)}} = \overset{\circ}{\overbrace{(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)}} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}} \cap \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus B}} = (\mathbb{R} \setminus \overline{A}) \cap (\mathbb{R} \setminus \overline{B}) = \mathbb{R} \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$.
Donc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4) On a : $\mathbb{R} \setminus \overline{A \cap B} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus (A \cap B)}} = \overset{\circ}{\overbrace{(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B)}}$.
Puis, $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}} \cup \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus B}} \subset \mathbb{R} \setminus \overline{A \cap B}$, soit $(\mathbb{R} \setminus \overline{A}) \cup (\mathbb{R} \setminus \overline{B}) \subset \mathbb{R} \setminus \overline{A \cap B}$, ou encore $\mathbb{R} \setminus (\overline{A} \cap \overline{B}) \subset \mathbb{R} \setminus \overline{A \cap B}$.
Finalement, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. □

Le cours du chapitre 4

Remarque

Prendre $A=[0,1]$ et $B=[1,2]$.

Comme pour les intérieurs, l'inclusion $\overline{A\cap B}\subset \overline{A}\cap\overline{B}$ peut être stricte.

C Frontière

Définition 10

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
On appelle **frontière** de A, l'ensemble noté $\mathrm{Fr}(A)$ et défini par :

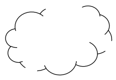
$$\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\setminus\overset{\circ}{A}\,.$$

Il s'agit donc du complémentaire de l'intérieur de A dans l'adhérence de A.

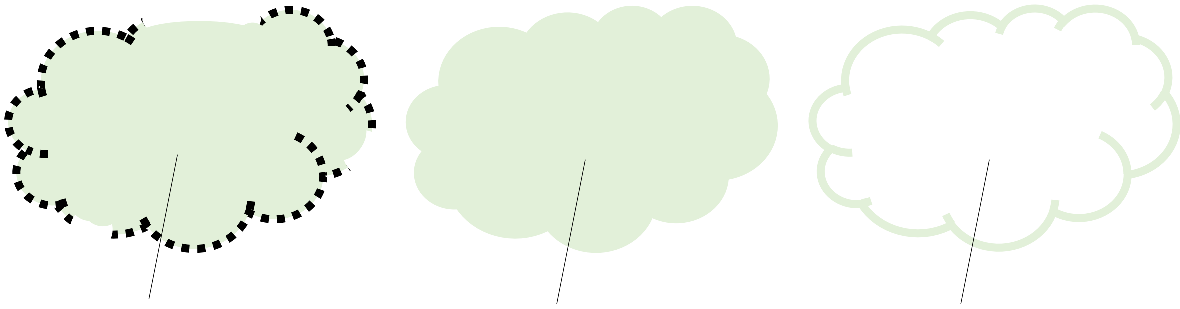
Remarque

1. Tout élément de la frontière d'un ensemble est appelé **point-frontière**.
2. A l'aide d'un dessin, comprenons les notions d'intérieur, d'adhérence et de frontière de manière intuitive :

Voici la partie A considérée où des éléments du contour ont été volontairement supprimés :



Sur le premier dessin, seule la partie verte compte (sans le contour).
Sur le deuxième dessin, la partie verte comprends en plus le contour (y compris les éléments supprimés initialement).
Sur le dernier dessin, seul le contour compte (y compris les éléments supprimés initialement).



$\overset{\circ}{A}$ $\qquad$ $\overline{A}$ $\qquad$ $\mathrm{Fr}(A)$

Exemples

1. On a $\mathrm{Fr}([0,1])=\mathrm{Fr}([0,1[)=\mathrm{Fr}(]0,1])=\mathrm{Fr}(]0,1[)=\{0,1\}$.
2. On a $\mathrm{Fr}(\mathbb{R})=\varnothing$ et $\mathrm{Fr}(\varnothing)=\varnothing$.
3. Comme on le verra plus tard, une frontière d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut être très « gros ». Par exemple, on démontera que $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$.

Théorème 24

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1) $\mathrm{Fr}(A)\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ $\qquad$ 2) $\mathrm{Fr}(A\cup B)\subset\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$.

Preuve

1) Clairement : $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\setminus\overset{\circ}{A}=\overline{A}\cap(\mathbb{R}\setminus\overset{\circ}{A})=\overline{A}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus A}$.
Ainsi l'ensemble $\mathrm{Fr}(A)$ est un fermé dans $\mathbb{R}$ étant intersection de deux fermés de $\mathbb{R}$.

La démonstration est assez technique.

2) En utilisant la définition, on a : $\mathrm{Fr}(A\cup B)=\overline{A\cup B}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus(A\cup B)}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus A)\cap(\mathbb{R}\setminus B)}$.

Puis, $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus A)\cap(\mathbb{R}\setminus B)}\subset(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus A)}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus B)}$, donc :

$\mathrm{Fr}(A\cup B)\subset(\overline{A}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus A)}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus B)})\cup(\overline{B}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus A)}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus B)})$, soit $\mathrm{Fr}(A\cup B)\subset(\overline{A}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus A)})\cup(\overline{B}\cap\overline{(\mathbb{R}\setminus B)})$.

Ainsi, $\mathrm{Fr}(A\cup B)\subset\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$. □

Remarques

Prendre par exemple $A=[0,1]$.

1. Il est possible que les ensembles A et $\mathrm{Fr}(A)$ ne soient pas comparables pour l'inclusion.

Prendre $A=[0,1]$ et $B=[0,2]$.

2. Ce n'est pas parce que $A\subset B$, qu'on a nécessairement $\mathrm{Fr}(A)\subset\mathrm{Fr}(B)$ ou $\mathrm{Fr}(B)\subset\mathrm{Fr}(A)$.

Ces inclusions peuvent être strictes (il suffit de prendre $A=\mathbb{Q}$).

3. A titre d'exercice, le lecteur montrera que $\mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A})\subset\mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}(\overline{A})\subset\mathrm{Fr}(A)$ (correction en vidéo).
4. On ne peut pas statuer définitivement quant à la comparaison des ensembles $\mathrm{Fr}(A\cap B)$ et $\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)$.

Par exemple, avec $A=]0,2[$ et $B=]1,3[$, on a $\mathrm{Fr}(A\cap B)\neq\varnothing$ alors que $\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)=\varnothing$.

Voir l'**exercice 00**.

Mais avec $A=[0,1[$ et $B=]1,2]$, on a $\mathrm{Fr}(A\cap B)=\varnothing$ alors que $\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)=\{1\}$.

5. Donnons un exemple où $\mathrm{Fr}(A\cup B)\neq\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$.

On prend $A=]0,2[$ et $B=]1,3[$.
En effet, $\mathrm{Fr}(A\cup B)=\{0,3\}$ et $\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)=\{0,2\}\cup\{1,3\}=\{0,1,2,3\}$.

Le cours du chapitre 4

4 Densité

A Définition

La notion de **densité** est fondamentale en analyse.

Définition 11

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Dire que l'ensemble A est **dense** dans $\mathbb{R}$ signifie que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow \exists a \in A, x < a < y.$$

Autrement dit, dire que A est dense dans $\mathbb{R}$, signifie qu'entre deux nombres réels, il y a toujours un élément de A (autre que x et y).

Remarques

1. L'ensemble vide n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ est évidemment dense dans lui-même.
3. Par négation, dire que A n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ signifie que :

Dans la définition, il suffit de considérer $a = \dfrac{x+y}{2}$.

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x < y \\ \forall a \in A, (x \geqslant a) \vee (y \leqslant a) \end{cases}.$$

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
En effet, on a $2 < 3$ et quelque que soit l'entier relatif n, on a bien $n \leqslant 2$ ou $n \geqslant 3$.

Il n'existe pas d'entier relatif strictement compris entre 2 et 3.

4. La condition « $\exists a \in A, x < a < y$ » est équivalente à la condition « $A \cap \,]x,y[\, \neq \varnothing$ ».

B Caractérisations de la densité

Théorème 25

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
L'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, A \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \neq \varnothing.$$

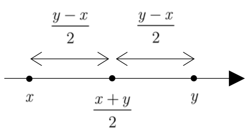
Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient x un nombre réel et ε un nombre réel strictement positif.
Comme ε n'est pas nul, on a $x - \varepsilon < x + \varepsilon$.
Puis, comme A est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $a \in A$ tel que $x - \varepsilon < a < x + \varepsilon$.
Ainsi, $A \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$) Supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, A \cap \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \neq \varnothing$.

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$.

Remarquons que $\dfrac{y-x}{2} > 0$.



Donc par hypothèse, on a en particulier $A \cap \left]\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{y-x}{2}, \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y-x}{2}\right[\neq \varnothing$, soit $A \cap \,]x,y[\, \neq \varnothing$.

Ainsi, A est dense dans $\mathbb{R}$. □

Le **théorème 26** traduit en terme topologique la densité d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Théorème 26

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
L'ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{A} = \mathbb{R}$.

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$.
L'inclusion $\overline{A} \subset \mathbb{R}$ est évidente.

On va montrer que tout voisinage de x rencontre A (**théorème 22**).

Soient x un nombre réel et V un voisinage de x.
Par définition, il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subset V$.

Intersection membre à membre par A.

Donc, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \cap A \subset V \cap A$ et d'après le **théorème 25**, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \cap A \neq \varnothing$.

Si l'ensemble $V \cap A$ était vide, alors toute partie de ce dernier serait vide.

Ainsi, l'ensemble $V \cap A$ n'est pas vide (puisqu'il contient une partie non vide), d'où $x \in \overline{A}$ et donc $\overline{A} = \mathbb{R}$.
($\Leftarrow$) Comme dans le théorème précédent. □

Le cours du chapitre 4

C Parties denses remarquables

Le **théorème 27** est important. Il dit intuitivement qu'entre deux nombres réels, il existe toujours un nombre rationnel.

Théorème 27 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$.

Notons $\varepsilon = y - x$; on a donc $\varepsilon > 0$.

On applique cette propriété à 1 et ε .

D'après la **propriété d'Archimède**, il existe un entier naturel n non nul tel que $1 < n\varepsilon$, soit $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Comme $E(nx) \leqslant nx < E(nx)+1$ (**théorème 46** du **chapitre 1**), on a $x < \dfrac{E(nx)+1}{n}$.

Puis, $\dfrac{E(nx)+1}{n} = \dfrac{E(nx)}{n} + \dfrac{1}{n}$ avec $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ et $\dfrac{E(nx)}{n} \leqslant x$, donc $x < \dfrac{E(nx)+1}{n} < x+\varepsilon$, soit $x < \dfrac{E(nx)+1}{n} < y$.

Il est clair que $\dfrac{E(nx)+1}{n} \in \mathbb{Q}$ et ainsi l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Remarques

1. De ce qui précède, on a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. De ce qui précède, on a aussi $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} = \varnothing$.

Théorème 28 Densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

La preuve est très simple et utilise le théorème précédent.

Preuve

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$.

Alors $x+\sqrt{2} < y+\sqrt{2}$.

Puis, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre rationnel a tel que $x+\sqrt{2} < a < y+\sqrt{2}$.

Donc $x < a-\sqrt{2} < y$ et $a-\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel).

Ainsi l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Remarques

1. De ce qui précède, on a $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. De ce qui précède, on a aussi $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$.

D Sous-groupes additifs de R

Nous terminons ce chapitre par l'étude (délicate) des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Cette étude fait intervenir la densité et s'en trouve donc justifiée.

Théorème 29 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit H un ensemble.
Si H est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, alors :
- il existe un nombre réel positif a tel que $H = a\mathbb{Z}$;
- ou H est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve

Supposons que H est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

S'il est réduit au singleton $\{0\}$ alors le résultat est immédiat (l'entier 0 convient).

Supposons alors que $H \neq \{0\}$.

Il existe alors un élément x de H qui n'est pas nul.

Deux cas s'imposent alors :

- ou bien $x > 0$, alors $x \in H \cap \mathbb{R}_+^*$;
- ou bien $x < 0$, alors $-x > 0$ et $-x \in H \cap \mathbb{R}_+^*$.

Comme H est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, si $x \in H$, alors $-x \in H$.

Donc l'ensemble $H \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas vide et est minoré par 0.

Donc $a = \mathrm{Inf}(H \cap \mathbb{R}_+^*)$.

D'après le **théorème 37** du **chapitre 1**, l'ensemble $H \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure a telle que $a \geqslant 0$.

On va montrer que dans ce cas H est dense dans $\mathbb{R}$.

- Supposons que $a = 0$.

Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$.

Comme $y - x > 0$ et $a = 0$, $y - x$ n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$. Il existe alors un élément g de $H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g < y - x$.

Pour plus de commodité, posons $n = E\left(\dfrac{x}{g}\right) + 1$ (donc $n \in \mathbb{Z}$).

Par définition de la partie entière, on a $n - 1 \leqslant \dfrac{x}{g} < n$, soit $gn - g \leqslant x < gn$, soit encore, puisque $gn = (n-1)g + g$, $x < gn \leqslant x + g < y$.

Une récurrence immédiate (puis au passage à $\mathbb{Z}$), montre que : $\forall n \in \mathbb{Z}, gn \in H$.
Une démonstration similaire a été donnée dans la preuve de la détermination des sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.

Enfin, comme $gn \in H$, H est dense dans $\mathbb{R}$.

- Supposons que $a > 0$.

On va montrer que $H = a\mathbb{Z}$ par double-inclusion.

Par l'absurde, admettons que $a \notin H$.

Alors comme $a < 2a$, le nombre réel $2a$ n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc un élément b de $H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b < 2a$.

A nouveau, comme $a < b$, le nombre réel b n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc un élément c de $H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < c < b$.

En effet, comme $a < c$, on a l'inégalité $-c < -a$. Puis, avec l'inégalité $b < 2a$, on a en additionnant membre à membre l'inégalité $b - c < a$.

Il vient alors que $b - c > 0$ donc $b - c \in H \cap \mathbb{R}_+^*$ et $b - c < a$, ce qui est contradictoire avec la définition de a.

Ainsi $a \in H$ et alors $a\mathbb{Z} \subset H$ (compte tenu de l'avant dernière remarque en marge).

Soit maintenant h un élément de H.

Pour plus de commodité, posons $m = E\left(\dfrac{h}{a}\right)$ (donc $m \in \mathbb{Z}$).

Par définition de la partie entière, on a $m \leqslant \dfrac{h}{a} < m + 1$, soit $am \leqslant h < a(m+1)$.

Montrons que $h = am$.

Supposons que $h \neq am$.

Alors $h - am > 0$ et $h - am \in H$, donc $h - am \in H \cap \mathbb{R}_+^*$.

Puis, comme $h < a(m+1)$, on a $h - am < a$, ce qui est contradictoire avec la définition de a.

Ainsi $h = am$ et comme $am \in a\mathbb{Z}$, il vient que $h \in a\mathbb{Z}$, soit $H \subset a\mathbb{Z}$.

Finalement, $H = a\mathbb{Z}$. □

Les exercices du chapitre 4

1 Densité

On note :

$$E=\{q^2, q\in\mathbb{Q}\} \text{ et } D=E\cup(-E).$$

Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

2 Voisinage

Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, \bigcap_{V\in\mathcal{V}(x)} V=\{x\}$.

3 Un fermé remarquable

Montrer que $\mathbb{N}$ est un fermé dans $\mathbb{R}$.

4 Un fermé remarquable 🖫

Montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé dans $\mathbb{R}$.

5 Densité 🖫

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ telles que A est dense dans $\mathbb{R}$ et $A\subset B$.

Montrer que B est dense dans $\mathbb{R}$.

6 ★ Nombres dyadique

Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

Voir l'exercice 35 du chapitre 5 du livre Algèbre Licence 1.

7 ★★ Sous-groupe additif de R

Soient ω un nombre réel et G_ω l'ensemble :

$$\{a+b\omega, (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}.$$

1) Montrer que G_ω est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

On suppose désormais que ω est un nombre rationnel.

Soit $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\omega=\frac{p}{q} \text{ et } \mathrm{PGCD}(p,q)=1.$$

2) Montrer que $G_\omega=\frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

On suppose maintenant que ω est un nombre irrationnel.

3) a) Montrer que G_ω est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Donner une application directe du résultat précédent.

8 Inégalité

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, x>b\Rightarrow a\leqslant x.$$

Montrer que $a\leqslant b$.

9 Ensembles ouverts

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ tel que A et $\mathbb{R}\setminus A$ soient ouverts dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que A n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.

On suppose en plus que $\mathbb{R}\setminus A$ est non vide et soit x un élément de cet ensemble.

On note B l'ensemble défini par l'égalité :

$$B=\{t\in A, x\leqslant t\}.$$

2) a) Montrer que B n'est pas vide et admet une borne inférieure qu'on notera m.

b) Montrer que $m>x$.

3) a) Montrer que m ne peut appartenir ni à $\mathbb{R}\setminus A$ ni à A.

b) En déduire que $A=\mathbb{R}$.

10 Densité 🖫

Montrer que l'ensemble $\{r^3, r\in\mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

11 Densité 🖫

Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

12 ★ Inégalité

Montrer que : $\forall x\in\,]0,1[, \exists(p,q,u,v)\in\mathbb{N}^4, \begin{cases}\dfrac{2u-1}{p}<x<\dfrac{2u}{p}\\ \dfrac{2v}{p}<x<\dfrac{2v+1}{q}\end{cases}$.

13 ★★ Intervalle ouvert

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, n un entier naturel non nul et des intervalles ouverts $I_1,\dots,I_n$ de $\mathbb{R}$ tels que $\bigcup_{k=1}^{n} I_k=I$.

Montrer qu'il existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $\bigcup_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} I_j$ soit un intervalle.

D'après lycée Louis-Le-Grand.

14 Partie fermée

Montrer que l'ensemble $\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n+1}, n\in\mathbb{N}\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

15 Intersection de deux parties denses

1) Montrer que l'intersection de deux parties denses de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement dense dans $\mathbb{R}$.

Soit U et V deux ouverts denses dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'ensemble $U\cap V$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3) En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides et aussi d'intérieur vide.

16 Frontière

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que A est un fermé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)\subset A$.

2) Démontrer que A est un ouvert dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A\cap\mathrm{Fr}(A)=\varnothing$.

17 Frontière

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble A et son complémentaire dans $\mathbb{R}$ ont la même frontière.

18 Adhérence et intérieur

Soient A, B, E et F des parties de $\mathbb{R}$ tels que $A\subset E$ et $B\subset F$.

Montrer que :

$$1)\ \overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B} \qquad 2)\ \overset{\circ}{\widehat{A\times B}}=\overset{\circ}{A}\times\overset{\circ}{B}.$$

19 Somme d'une partie et d'un ouvert

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, pour tout nombre réel a, le sous-ensemble $\{a\}+\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2) En déduire que, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, le sous-ensemble $A+\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

20 Adhérence

Montrer que : $\forall A\in\mathcal{P}(\mathbb{R}), \overline{A\cup(\mathbb{R}\setminus A)}=\mathbb{R}$.

Les exercices du chapitre 4

21 ★ **Somme et adhérence**

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que :

$$\overline{A}+\overline{B}\subset\overline{A+B}\,.$$

2) Montrer par un exemple que l'inclusion vue précédemment peut être stricte.

22 ★ **Adhérence d'une intersection**

Soient A un ouvert de $\mathbb{R}$ et B un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A\cap B}\,.$$

23 ★ **Adhérence d'une intersection**

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout sous-ensemble B de $\mathbb{R}$, on a :

$$A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}\,.$$

Montrer que A est un ouvert de $\mathbb{R}$.

24 ★★ **Adhérence et intérieur**

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que :

$$\overline{U}=\overline{V}=\mathbb{R}\Rightarrow\overline{U\cap V}=\mathbb{R}\,.$$

Soient F et G deux fermés de $\mathbb{R}$.

2) En déduire que :

$$\overset{\circ}{F}=\overset{\circ}{G}=\varnothing\Rightarrow\overset{\circ}{\widehat{F\cup G}}=\varnothing\,.$$

25 **Ouvert et fermé**

1) Déterminer tous les fermés de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$.

2) Déterminer tous les ouverts de $\mathbb{R}$ contenus dans $\mathbb{Q}$.

3) Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de $\mathbb{R}$.

26 **Adhérence et intérieur**

Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par l'égalité :

$$A=\left\{\frac{1}{x+n}+\frac{1}{2^n}\,,(x,n)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{N}^*\right\}.$$

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de A.

27 ★ **Adhérence et intérieur**

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que :

$$\overset{\circ}{\overline{U\cap V}}=\overset{\circ}{\overline{U}}\cap\overset{\circ}{\overline{V}}\,.$$

Soient F et G deux fermés de $\mathbb{R}$.

2) Montrer que :

$$\overline{\overset{\circ}{\widehat{F\cup G}}}=\overline{\overset{\circ}{F}}\cap\overline{\overset{\circ}{G}}\,.$$

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

3) Montrer que :

$$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}}}=\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}\cap\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{B}}}\quad\text{et}\quad\overline{\overset{\circ}{\overline{A\cup B}}}=\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}\cup\overline{\overset{\circ}{\overline{B}}}\,.$$

28 **Adhérence et intérieur**

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$1)\ \ \overset{\circ}{\widehat{A\setminus B}}=\overset{\circ}{A}\setminus\overline{B}\qquad 2)\ \ \overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}}=\overline{\overset{\circ}{A}}\qquad 3)\ \ \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}}=\overset{\circ}{\overline{A}}\,.$$

29 ★ **Réunion de deux frontières**

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$.

Montrer que :

$$\mathrm{Fr}(A\cup B)=\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)\,.$$

30 **Densité**

Soient A et B deux parties denses dans $\mathbb{R}$ tels que $A\cap B=\varnothing$.

Montrer que A et B sont d'intérieur vide.

31 **Densité**

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble $A\cup(\mathbb{R}\setminus\overline{A})$ est dense dans $\mathbb{R}$.

32 **Partie ouverte**

Soient A un fermé de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel tel que $a\notin A$.

Montrer qu'il existe deux ouverts de $\mathbb{R}$ disjoints U et V tels que $a\in U$ et $F\subset V$.

33 **Partie rare**

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Dire que la partie A est **rare** signifie que $\overset{\circ}{\overline{A}}=\varnothing$.

1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$i)\ A\text{ est rare}\qquad ii)\ \overline{A}\text{ est rare}\qquad iii)\ \overline{\mathbb{R}\setminus\overline{A}}=\mathbb{R}\,.$$

2) Montrer que si A et B sont rares, alors $A\cup B$ est rare.

34 ★ **Somme et intérieur**

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que :

$$\overset{\circ}{A}+\overset{\circ}{B}\subset\overset{\circ}{\widehat{A+B}}\,.$$

2) Montrer par un exemple que l'inclusion vue précédemment peut être stricte.

35 **Adhérence et intérieur**

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et λ un nombre réel.

Montrer que :

$$1)\ \ \overset{\circ}{\widehat{\lambda A}}=\lambda\,\overset{\circ}{A}\qquad 2)\ \ \overline{\lambda A}=\lambda\overline{A}\,.$$

36 **Partie ouverte**

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et C l'ensemble défini par :

$$C=\{\lambda x,\lambda>0,x\in U\}\,.$$

1) Montrer que C est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si 0 est un élément de U alors $C=\mathbb{R}$.

37 **Frontière**

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Montrer que les ensembles $\mathrm{Fr}(A)$, $\overset{\circ}{A}$ et $\mathbb{R}\setminus\overline{A}$ sont deux à deux disjoints et de réunion égale à $\mathbb{R}$.

38 **Partie ouverte**

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\mathrm{Fr}(A)=(A\cap\overline{\mathbb{R}\setminus A})\cup(\overline{A}\cap(\mathbb{R}\setminus A))\,.$$

39 **Partie ouverte**

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Montrer que si A est fermé dans $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{Fr}(A\cap B)\supset\mathrm{Fr}(A)\cap B\,.$$

Les exercices du chapitre 4

40 **Frontière**

Montrer que : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \subset \mathrm{Fr}(A) \Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = \varnothing$.

41 ★ **Frontière**

Soient A et B deux parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$(A \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{Fr}(A)) \subset \mathrm{Fr}(A \cap B) \subset (A \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{Fr}(A)) \cup (\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)).$$

42 **Frontière**

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\mathrm{Fr}(\overline{U}) = \mathrm{Fr}(U) \Leftrightarrow \overset{\circ}{\overline{U}} = U.$$

43 **Frontière**

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)).$$

44 **Frontière**

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Montrer que les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

1) $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \overline{A \cap X} = \overline{A} \cap \overline{X}$ 2) $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \overset{\circ}{\widehat{A \cup X}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{X}$

3) $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

45 **Frontière**

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

$$\mathrm{Fr}(\overline{A}) = \varnothing \Leftrightarrow \forall \Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, \overline{A \cap \Omega} = \overline{A} \cap \overline{\Omega}.$$

46 **Frontière**

Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que :

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(F)) = \mathrm{Fr}(F).$$

2) En déduire que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A))) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)).$$