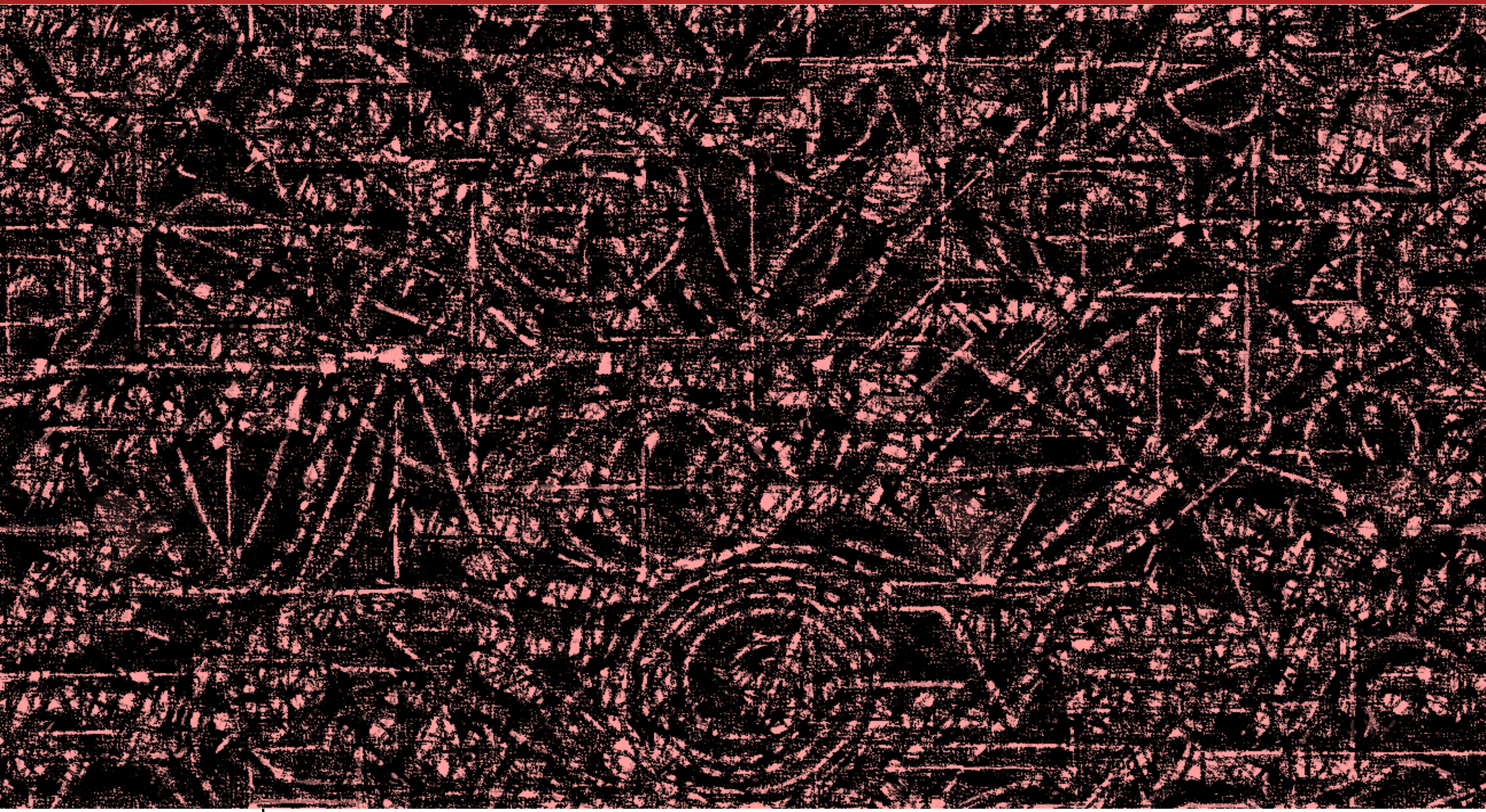
Longueurs
Vecteurs d'une droite
Isométries de droites

4



Introduction

D'autres axiomes de déplacement seront donnés dans le chapitre suivant.

Dans ce chapitre, on commence par donner les axiomes de déplacement. Ces derniers sont fondamentaux pour introduire la *longueur*. Mais attention, contrairement à ce qui se fait au collège, nous ne parlerons pas de nombres ! En clair, une longueur n'est pas un nombre mais une classe d'équivalence d'une certaine relation qu'on définira.
Nous profitons de ce chapitre pour introduire la notion de *vecteur* d'une droite qui est une version « faible » de la notion de vecteur déjà rencontrée au lycée.
Enfin, nous terminons ce chapitre par la notion d'isométrie de droites.

Prérequis

- Axiomes d'incidence (**chapitre 1**)
- Axiomes d'ordre (**chapitre 2**)
- Orientation de la droite, du plan et de l'espace (**chapitre 3**)
- Relations d'équivalence (**chapitre 2** du livre Algèbre Licence 1)
- Fonctions et application (**chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1)
- Structures algébriques : du magma au groupe (**chapitre 4** du livre Algèbre Licence 1)

Objectifs du chapitre

- Etudier les axiomes de déplacement
- Introduire la longueur
- Etudier les propriétés de la longueur
- Introduire la notion de vecteur d'une droite
- Etudier les propriétés des vecteurs (d'une droite)
- Etudier les isométries de droites

Le cours du chapitre 4

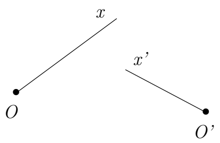
1 Longueurs et déplacement de demi-droites

A Axiomes de déplacement

On rappelle que les notations « x » et « x' » désigne des orientations.

Axiome 1

Soient Ox et $O'x'$ deux demi-droites.
Il existe une application de Ox dans $O'x'$.



Remarques

1. Tout application de Ox dans $O'x'$ sera appelée **déplacement**.
2. Au lieu de noter $\Delta : Ox \longrightarrow O'x'$ un déplacement, on le notera $\Delta_{Ox}^{O'x'}$.

Axiome 2

Tout déplacement d'une demi-droite sur elle-même est l'identité.

Attention, dans le cas général il est faux de dire que toute application d'un ensemble E vers lui-même est l'application identité.

Remarque

Autrement dit, quel que soit la demi-droite Ox, on a $\Delta_{Ox}^{Ox} = \mathrm{Id}_{Ox}$.

Axiome 3

Soient O_1x_1, O_2x_2 et O_3x_3 des demi-droites.

$$\Delta_{O_2x_2}^{O_3x_3} \circ \Delta_{O_1x_1}^{O_2x_2} = \Delta_{O_1x_1}^{O_3x_3}.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

La démonstration du **théorème 1** est immédiate, il résulte des deux derniers axiomes.

Théorème 1

Soient Ox et $O'x'$ deux demi-droites.

$$\Delta_{O'x'}^{Ox} \circ \Delta_{Ox}^{O'x'} = \mathrm{Id}_{Ox}.$$

Remarque

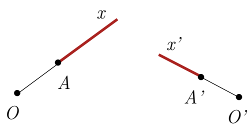
De ce qui précède, on a $\Delta_{O'x'}^{Ox} \circ \Delta_{Ox}^{O'x'} = \mathrm{Id}_{Ox}$, mais aussi $\Delta_{Ox}^{O'x'} \circ \Delta_{O'x'}^{Ox} = \mathrm{Id}_{O'x'}$.
Ainsi (**théorème 20** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence I) un déplacement est une application bijective.

Donc $A' = \Delta_{Ox}^{O'x'}(A)$.

Axiome 4

Soient A un point d'une demi-droite Ox et A' l'image du point A par l'application $\Delta_{Ox}^{O'x'}$.

L'application $\Delta_{Ax}^{A'x'}$ est la restriction à Ax de l'application $\Delta_{Ox}^{O'x'}$.



Remarque

D'après l'**axiome 4**, on a $\Delta_{Ax}^{O'x'} = \Delta_{Ax}^{A'x'}$. Autrement dit, l'image d'un point dans Ax est nécessairement dans $A'x'$.

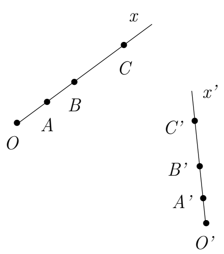
Voyons comment on peut utiliser ce dernier axiome moins évident :

Le **théorème 2** est important.

Théorème 2

Tout déplacement d'une demi-droite sur une autre conserve l'ordre.

Preuve

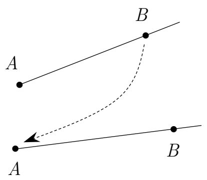


Soient Ox et $O'x'$ deux demi-droites.
Soient A, B et C trois points de la demi-droite Ox tel que B soit entre A et C.
En notant A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par $\Delta_{Ox}^{O'x'}$, montrons que B' est entre A' et C'.
Quitte à renommer les points, supposons que A est entre O et B.
Alors (**théorème 12** du **chapitre 2**) $]AB) \subset]OB)$ et donc (**définition 1** du **chapitre 3**) les demi-droites $]AB)$ et $]OB)$ ont le même sens.
On a donc (puisque $B \in Ox$) $]OB) = Ox$ et $]AB) = Ax$. D'où $B \in Ax$ puisque $B \in]AB)$.

Comme l'application $\Delta_{Ax}^{A'x'}$ est la restriction à Ax de l'application $\Delta_{Ox}^{O'x'}$ (**axiome 4**), on déduit que le point B' est sur $A'x'$.
Donc les demi-droites $B'x'$ et $]B'A')$ sont opposées.

On raisonne comme précédemment.

Par ailleurs, le point C est sur la demi-droite Bx, donc son image C' est sur la demi-droite $B'x'$.
On conclut alors que les demi-droites $]B'A')$ et $]B'C')$ sont opposés, autrement dit, le point B' est entre les points A' et C'. □



Axiome 5

Soient A et B deux points distincts.
Le déplacement de la demi-droite $]AB)$ sur la demi-droite $]BA)$ envoie le point B sur le point A.

Remarque

D'après l'**axiome 5**, on a $\Delta_{]AB)}^{]BA)}(B) = A$.

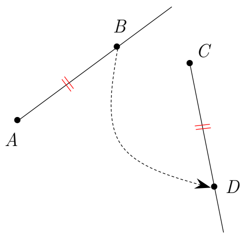
B Longueurs

La **définition 1** est fondamentale.

Définition 1

Soient $]AB[$ et $]CD[$ deux segments non nuls.

Dire que les segments $]AB[$ et $]CD[$ sont **congruents** signifie que $\Delta_{]AB)}^{]CD)}(B) = D$.



Remarques

1. On pourra dire que les segments $]AB[$ et $]CD[$ sont **superposables** au lieu de congruents.
2. Pour signifier que les segments $]AB[$ et $]CD[$ sont congruents, on écrira $]AB[\equiv]CD[$ et on codera (voir ci-contre).
3. On dira aussi (par convention donc) que deux segments nuls sont congruents.

Le **théorème 3** est une conséquence immédiate de l'**axiome 5** et de la **définition 1**.

Théorème 3

$$\forall (A,B)\in\mathcal{E}^2,]AB[\equiv]BA[.$$

Le **théorème 4** est important.

Théorème 4

La relation de congruence est une relation d'équivalence entre les segments de l'espace.

Preuve

Soient les segments $]AB[$, $]CD[$ et $]EF[$ des segments.

Réflexivité

D'après l'**axiome 2**, on a $\Delta_{]AB)}^{]AB)} = \mathrm{Id}_{]AB)}$.

L'image de tout point par l'application identité est le point lui-même.

On a donc $\Delta_{]AB)}^{]AB)}(B) = B$.

Ainsi, en appliquant la **définition 1**, on a $]AB[\equiv]AB[$.

Symétrie

Supposons que $]AB[\equiv]CD[$.

Par définition, on a alors $\Delta_{]AB)}^{]CD)}(B) = D$, d'où $\Delta_{]CD)}^{]AB)}\left(\Delta_{]AB)}^{]CD)}(B)\right) = \left(\Delta_{]CD)}^{]AB)}\circ\Delta_{]AB)}^{]CD)}\right)(B) = \Delta_{]CD)}^{]AB)}(D)$.

Comme (**théorème 1**) $\Delta_{]CD)}^{]AB)}\circ\Delta_{]AB)}^{]CD)} = \mathrm{Id}_{]AB)}$, on obtient $\Delta_{]CD)}^{]AB)}(D) = B$, et donc $]CD[\equiv]AB[$.

Transitivité

Supposons que $]AB[\equiv]CD[$ et $]CD[\equiv]EF[$.

Par définition, on a alors $\Delta_{]AB)}^{]CD)}(B) = D$ et $\Delta_{]CD)}^{]EF)}(D) = F$.

En utilisant l'**axiome 3**, on a $\Delta_{]CD)}^{]EF)}\circ\Delta_{]AB)}^{]CD)} = \Delta_{]AB)}^{]EF)}$.

Donc, $\Delta_{]AB)}^{]EF)}(B) = \left(\Delta_{]CD)}^{]EF)}\circ\Delta_{]AB)}^{]CD)}\right)(B) = \Delta_{]CD)}^{]EF)}\left(\Delta_{]AB)}^{]CD)}(B)\right) = \Delta_{]CD)}^{]EF)}(D) = F$.

Ainsi $]AB[\equiv]EF[$. □

Remarques

1. On appelle **longueur** toute classe d'équivalence de la relation de congruence entre les segments de l'espace.

Attention ! Ne pensez pas que nous parlions de nombres ici. D'ailleurs, une longueur est un ensemble de segments.

2. Etant donné un segment $]AB[$, on note AB la longueur qu'il représente.

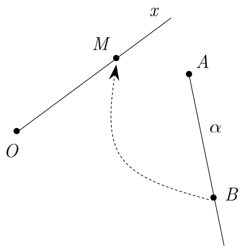
3. On note 0 la classe d'équivalence des segments nuls. On l'appelle la **longueur nulle**.

Théorème 5 **Report de longueur**

Bien sûr, α désigne une classe d'équivalence, c'est-à-dire un ensemble de segments (qui sont deux à deux congruents).

> Soient Ox une demi-droite et α une longueur.
> Il existe un unique point M sur la demi-droite fermée Ox tel que le segment $]OM[$ représente la longueur α .

Preuve



Si $\alpha = 0$, il suffit alors de considérer le point O.

Supposons maintenant que $\alpha \neq 0$.

Existence

Soit $]AB[$ un segment représentant α .

Soit M l'image du point B par le déplacement de la demi-droite $]AB)$ sur la demi-droite Ox .

Par la **définition 1**, on a $]AB[\equiv]OM[$, donc $AB = OM$, soit $OM = \alpha$, ce qui prouve l'existence du point M.

Unicité

Soit N un point de la demi-droite Ox tel que $\lambda = ON$, donc tel que $AB = ON$, soit $]AB[\equiv]ON[$

Mais $]AB[\equiv]OM[$, donc par symétrie et transitivité, on a $]OM[\equiv]ON[$.

On a $]OM) =]ON) = Ox$.

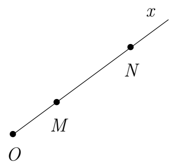
Ainsi, $\Delta_{]OM)}^{]ON)}(M) = N$, soit $\Delta_{Ox}^{Ox}(M) = N$ et donc (via l'**axiome 2**), $M = N$, ce qui prouve l'unicité. □

2 Ordre et opérations

A Ordre

La définition suivante permet de comparer des segments :

Définition 2



> Soient M et N deux points d'une demi-droite Ox .
> Dire que le segment $]OM[$ est **strictement inférieur** au segment $]ON[$ signifie que le point M est entre les points O et N.

Remarques

1. Pour signifier que le segment $]OM[$ est strictement inférieur au segment $]ON[$, on écrit $]OM[<]ON[$.

2. On dit aussi le segment $]ON[$ est **strictement supérieur** au segment $]OM[$ quand $]OM[<]ON[$ et on écrira alors $]ON[>]OM[$.

3. On convient que tout segment nul est strictement inférieur à tout segment non nul.

On peut alors annoncer le théorème suivant :

Théorème 6

La notion d'ordre strict est traitée dans la **définition 20** du **chapitre 2** du livre Algèbre Licence I.

> La relation « $<$ » est une relation d'ordre strict total sur les segments dont une extrémité est O et dont l'autre appartient à la demi-droite Ox .

Preuve

Soient M, N et P des points d'une demi-droite Ox .

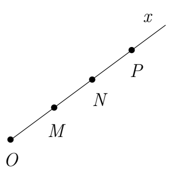
Antisymétrie

Supposons que $]OM[<]ON[$ et $]ON[<]OM[$.

Si M est entre O et N, alors N ne peut pas être entre O et M. On suppose alors quelque chose de faux, ce qui entraîne la relation souhaitée.

On a alors immédiatement $]OM[=]ON[$.

Transitivité



Supposons que $]OM[<]ON[$ et $]ON[<]OP[$.

Alors d'une part le point M est entre les points O et N, et d'autre part le point N est entre les points O et P.

Or, comme $]ON[\subset]OP[$ (**théorème 13** du **chapitre 2**), le point M est entre les points O et P.

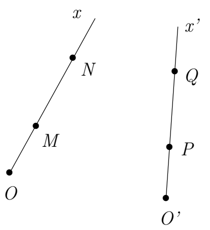
Totalité

Comme les points M et N sont sur la demi-droite Ox , le point O n'est pas entre les points M et N.

En appliquant le **théorème 3** du **chapitre 3**, ou bien M est entre O et N, ou bien N est entre O et M.

Ainsi, on a $]OM[<]ON[$ ou $]ON[<]OM[$. □

Le cours du chapitre 4



La relation « $OM < ON$ » ne dépend pas des représentants choisis dans les classes OM et ON.

Remarques

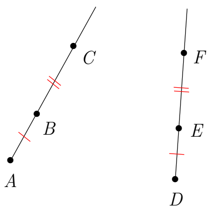
1. Soient Ox et $O'x'$ deux demi-droites.
Soient M et N deux points de la demi-droite Ox tels que $O * M * N$, soit $]OM[\, < \,]ON[$.
Soit P (resp. Q) le point de la demi-droite $O'x'$ tel que $]OM[\, \equiv \,]O'P[$ (resp. $]ON[\, \equiv \,]O'Q[$) (**théorème 5**).
D'après la **définition 1**, on a $\Delta_{]OM)}^{]O'P)}(M) = P$ et $\Delta_{]ON)}^{]O'Q)}(N) = Q$, soit $\Delta_{Ox}^{O'x'}(M) = P$ et $\Delta_{Ox}^{O'x'}(N) = Q$.
D'après le **théorème 2**, le point P est donc entre les points O' et Q.
On obtient alors que $]O'P[\, < \,]O'Q[$.
De ce qui précède, la relation « $<$ » induit une relation d'ordre strict total sur les longueurs non nulles. On écrira désormais $OM < ON$ au lieu de $]OM[\, < \,]ON[$.
2. On convient que la longueur nulle est strictement inférieure à tout autre longueur non nulle.

B Addition

Avant de définir la somme de deux longueurs, nous avons besoin du théorème suivant :

Théorème 7

Soient B (resp. E) un point appartenant à un segment non nul AC (resp. DF).
Si $AB = DE$ et $BC = EF$, alors $AC = DF$.



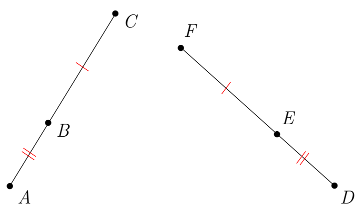
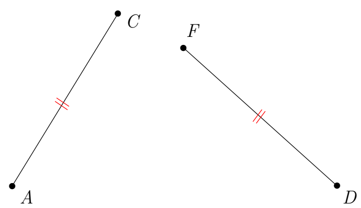
Preuve

Supposons que $AB = DE$ et $BC = EF$.
Alors $]AB[\, \equiv \,]DE[$ et donc $\Delta_{]AB)}^{]DE)}(B) = E$.
Par conservation de l'ordre (**théorème 2**) $\Delta_{]AB)}^{]DE)}(C) \in \,]EF)$ (sinon C serait entre D et E).
On a alors $\Delta_{]BC)}^{]DE)} = \Delta_{]BC)}^{]EF)}$ (**axiome 4**).
Mais comme $BC = EF$, on a $]BC[\, \equiv \,]EF[$, donc $\Delta_{]BC)}^{]EF)}(C) = F$ (**définition 1**).
Ainsi, $\Delta_{]AB)}^{]DE)}(C) = F$, soit (en utilisant le **théorème 11** du **chapitre 2**) $\Delta_{]AC)}^{]DF)}(C) = F$, et par suite $AC = DF$. □

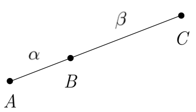
On utilise ici la définition de la restriction d'une application (**définition 14** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence I).

Remarque

Schématisons le **théorème 7** :

Données initiales	Théorème utilisé	Conclusion
		
On a $AB = DE$ et $BC = EF$.		On a $AC = DF$.

On peut maintenant sans crainte définir la somme de deux longueurs :



Définition 3

Soient α et β deux longueurs non nulles, A, B et C des points tels que $A * B * C$, $AB = \alpha$ et $BC = \beta$.
On appelle **somme** des longueurs α et β, la longueur AC.

Remarques

On a donc $AB + BC = AC$.

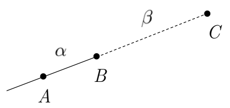
1. La somme des longueurs α et β est notée $\alpha + \beta$.
2. Pour toute longueur α, on étend la définition précédente en posant : $\alpha + 0 = \alpha$ et $0 + \alpha = 0$.
3. L'addition est une loi interne dans l'ensemble des longueurs et 0 en est l'élément neutre.

Donc en particulier $0 + 0 = 0$.

Théorème 8 **Commutativité de l'addition des longueurs**

Soient α et β deux longueurs.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$



Preuve

Le cas où $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ est immédiat.

Supposons alors que les longueurs α et β sont non nulles.

Soient $]AB[$ un représentant de la longueur α et C le point obtenu en reportant la longueur β sur la demi-droite opposée à la demi-droite $]BA)$.

On a donc $\alpha = AB$ et $\beta = BC$.

Il vient que, comme $A * B * C$, $\alpha + \beta = AC$ (**définition 3**).

Utilisation du **théorème 3**.

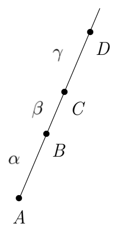
Puis, on a aussi $\alpha = BA$ et $\beta = CB$, d'où $\beta + \alpha = CA$.

Mais $AC = CA$, donc $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. □

Théorème 9 **Associativité de d'addition des longueurs**

Soient α, β et γ des longueurs.

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma .$$



Preuve

Le cas où $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$ est immédiat.

Supposons alors que les longueurs α, β et γ sont non nulles.

Soient $]AB[$ un représentant de la longueur α et C le point obtenu en reportant la longueur β sur la demi-droite opposée à la demi-droite $]BA)$.

Notons aussi D le point obtenu en reportant la longueur γ sur la demi-droite opposée à la demi-droite $]CB)$.

Le lecteur pourra facilement justifier (correction en vidéo) que si A, B, C et D sont des points de l'espace tels que : $A * B * C$ et $B * C * D$, alors $A * B * D$ et $A * C * D$.

Par construction, on a $\alpha + \beta = AC$. Puis, comme le point C est entre les points A et D, on a $AD = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Par ailleurs, $BD = \beta + \gamma$, donc (le point B est entre les points A et D) $AD = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Ainsi, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$. □

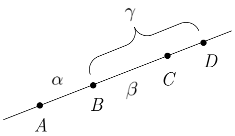
Remarque

Quand α, β et γ expriment des longueurs, on pourra écrire sans ambiguïté $\alpha + \beta + \gamma$ leur somme.

Théorème 10 **Compatibilité de d'addition avec l'ordre**

Soient α, β et γ des longueurs tels que $\beta < \gamma$.

$$\alpha + \beta < \alpha + \gamma .$$



Preuve

Si $\alpha = 0$, c'est immédiat.

Supposons alors que $\alpha \neq 0$.

Soient $]AB[$ un représentant de la longueur α et C le point obtenu en reportant la longueur β sur la demi-droite <u>fermée</u> opposée à la demi-droite $]BA)$.

On a donc $\alpha + \beta = AC$.

Soit D le point obtenu en reportant la longueur γ sur la demi-droite <u>fermée</u> opposée à la demi-droite $]BA)$.

On a donc $\alpha + \gamma = AD$.

Par hypothèse, $\beta < \gamma$, ce qui entraîne que $]BC[<]BD[$ donc par définition C est entre les points B et D ou bien C est confondu avec B (si $\beta = 0$).

Utilisation du **théorème 13** du **chapitre 2**.

Mais le point B est entre les points A et D, donc $]BD[\subset]AD[$ et alors C est entre A et D.

Par suite, $AC < AD$, c'est-à-dire $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. □

C <u>Soustraction</u>

Théorème 11

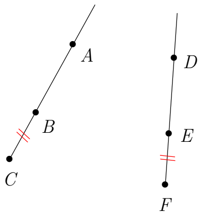
Soient A et B deux points situés sur une demi-droite fermée d'origine C, soient D et E deux points situés sur une demi-droite fermée d'origine F.

Si $AC = DF$ et $BC = EF$, alors $AB = DE$.

Preuve

Si deux des trois points A, B et C sont confondus, alors le résultat à établir est immédiat.

Supposons désormais que les trois points A, B et C sont deux à deux distincts.



Traitons le cas où le point B est entre les points A et C.
Par définition, on a alors $CB < CA$, soit $FE < FD$, et donc le point E est entre les points F et D.
Considérons le déplacement $\Delta_{]CA)}^{]FD)}$.

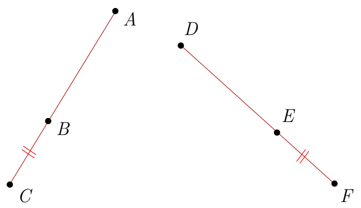
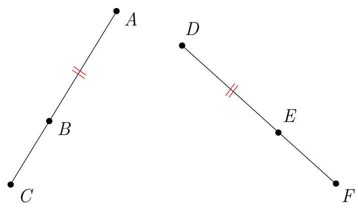
Comme $BC = EF$, on a $\Delta_{]CA)}^{]FD)}(B) = \Delta_{]CB)}^{]FE)}(B) = E$.

Ainsi, l'application $\Delta_{]BA)}^{]ED)}$ est la restriction de l'application $\Delta_{]CA)}^{]FD)}$ à la demi-droite $]BA)$.

Or par hypothèse $AC = DF$, donc $\Delta_{]CA)}^{]FD)}(A) = D$, d'où $\Delta_{]BA)}^{]ED)}(A) = D$.

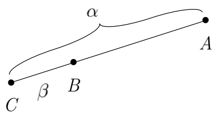
Ainsi, par définition $AB = DE$. □

Remarque
Schématisons le **théorème 11** :

Données initiales	Théorème utilisé	Conclusion
	**Théorème 11**	
On a $BC = EF$ et $AC = DF$		On a $AB = DE$.

On peut maintenant énoncer sans criante la définition suivante :

On abrège $(\beta < \alpha) \vee (\alpha = \beta)$ en écrivant $\beta \leqslant \alpha$.



On a donc $AC - BC = AB$.

En effet, la classe d'un segment nul est noté « 0 ».

Définition 4

Soient α et β deux longueurs non nulles telles que $\beta \leqslant \alpha$, soient A et B les points d'une demi-droite fermée d'origine C tels que $AC = \alpha$ et $BC = \beta$.
On appelle **différence** des longueurs α et β , la longueur AB.

Remarques
1. La différence des longueurs α et β est notée $\alpha - \beta$.
2. Si les points A et B sont confondus alors $\alpha - \beta = 0$.
3. On complète la définition en posant pour toute longueur α : $\alpha - 0 = \alpha$.

Théorème 12

Soient α et β deux longueurs telles que $\beta \leqslant \alpha$.
$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha .$$

Preuve
Le cas où $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta$ est immédiat.
Supposons alors que $\beta \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$.
Soient $]AC[$ un représentant de la longueur α et B le point de la demi-droite $]CA)$ tel que $CB = \beta$.

On rappelle que $\beta \leqslant \alpha$ et $\alpha \neq \beta$.

Par hypothèse, $\beta < \alpha$, donc $]CB[<]AC[$, c'est-à-dire que B est entre A et C.
D'après la **définition 4**, $AB = \alpha - \beta$. Puis, d'après la **définition 3**, $AC = CB + BA$.
Ainsi, $\alpha = \beta + (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) + \beta$. □

3 Vecteurs d'une droite

Le lecteur connait déjà la notion de *vecteur* rencontrée en classe de seconde. En revanche, les contraintes du programme actuel (au lycée) empêchent toute approche théorique de cet objet.

A Segments orientés

Définition 5

On appelle **segment orienté** tout couple de points de l'espace.

Remarques

Soient A et B deux points.

Un segment orienté est un bipoint.

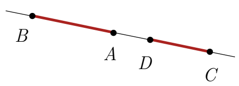
1. Un couple de point est appelé **bipoint**.
2. Pour le segment orienté (A,B), A est appelé **origine** et B **extrémité**.

Pour tout point A, le segment orienté (A,A) est nul.
On parle aussi de **vecteur lié**.

Si l'origine et l'extrémité d'un segment orienté sont confondus, on dit qu'il est **nul**.

3. On note $\overrightarrow{AB}$ le segment orienté (A,B).
4. On appelle **longueur** du segment orienté $\overrightarrow{AB}$, la longueur du segment $]AB[$.

On dit que le segment orienté $\overrightarrow{AB}$ est inclus dans $\mathcal{D}$ pour dire en réalité que $]AB[\subset\mathcal{D}$.



Définition 6

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux segments orientés non nuls inclus dans une droite $\mathcal{D}$.
Dire que les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le **même sens** signifie que les demi-droites $]AB)$ et $]CD)$ ont le même sens.

Remarque

Dans la définition précédente, on abrège « le segment orienté $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que le segment orienté $\overrightarrow{CD}$ » par « les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens » en anticipant sur la symétrie cette relation.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

La démonstration du **théorème 13** est immédiate (voir le **théorème 3** du **chapitre 3**).

Théorème 13

Soit $\mathcal{D}$ une droite.
La relation « avoir le même sens » est une relation d'équivalence sur l'ensembles des segments orientés non nuls de la droite $\mathcal{D}$.

Ce qui conduit naturellement au théorème suivant :

La démonstration du **théorème 14** est immédiate (voir le **théorème 4** du **chapitre 3**).

Théorème 14

Il n'y a que deux classes d'équivalence pour la relation « avoir le même sens ».

Remarque

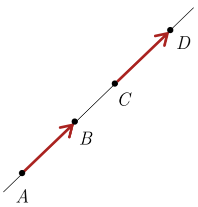
Considérons un segment orienté non nul $\overrightarrow{AB}$ inclus dans une droite $\mathcal{D}$.
Lorsque la droite $\mathcal{D}$ est orientée, on dit que le segment orienté $\overrightarrow{AB}$ est **positif** (resp. **négatif**) si la demi-droite $]AB)$ appartient à l'orientation de la droite $\mathcal{D}$ (resp. à l'orientation opposée de la droite $\mathcal{D}$).

B Equipollence

Attention, cette fois-ci les segments orientés peuvent être nuls contrairement à la **définition 6**.

Définition 7

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux segments orientés inclus dans une droite $\mathcal{D}$.
Dire que les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **équipollents** signifie qu'ils sont nuls, ou qu'ils sont non nuls, de même longueur et de même sens.



Remarque

On écrira (c'est abusif) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ pour signifier que les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équipollents.

La démonstration du **théorème 15** est immédiate.

Théorème 15

Soit $\mathcal{D}$ une droite.
La relation d'équipollence est une relation d'équivalence sur l'ensembles des segments orientés de la droite $\mathcal{D}$.

Remarques

Un vecteur (appelé aussi **vecteur libre**) est donc un ensemble de segments orientés (ou de bipoints).

1. Une classe d'équivalence de la relation d'équipollence est appelé **vecteur**.
2. On appelle **vecteur nul**, et on note $\vec{0}$, la classe d'équivalence des segments orientés nuls.

On aurait dû écrire $\overrightarrow{AB}\in\vec{u}$. C'est donc purement symbolique que nous employons l'égalité.

3. Si un segment orienté représente un vecteur $\vec{u}$, on écrira abusivement $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.
4. On appelle **norme** d'un vecteur, la longueur commune à tous ses représentants.

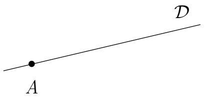
On notera $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.

Le cours du chapitre 4

Théorème 16

Soient A un point d'une droite $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur.

Il existe un unique point B sur la droite $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



On a donc $AB = \|\vec{u}\|$.

Preuve

Si $\vec{u} = \vec{0}$, il suffit de prendre le point A (puisque $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$).

Supposons que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Par le **théorème 5**, il existe un unique point B de la droite $\mathcal{D}$ tel que le segment $]AB[$ représente la longueur $\|\vec{u}\|$.

Donc $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. □

C Somme de deux vecteurs

Pour pouvoir définir la somme de deux vecteurs, nous avons besoin au préalable du théorème suivant :

Théorème 17

Soient A, B, C, D, E et F des points appartenant à une même droite.

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$.

Attention, il va s'agir de montrer que les segments orientés $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont équipollents (mais pas égaux au sens propre).

Par exemple, si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, alors les points A et B d'une part, et les points D et E d'autre part sont confondus. La relation $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ donne alors la conclusion.

Le lecteur pourra montrer (correction en vidéo) que si A, B et C désignent des points tels que les demi-droites $]AB)$ et $]BC)$ ont le même sens, alors B est entre A et C.

La relation $AC = DF$ n'est pas suffisante pour avoir $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$.

Preuve

Si l'un des segments orientés est nul, le résultat à démontrer est immédiat.

Supposons alors qu'aucun des segments orientés soit nul.

Supposons aussi que les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont le même sens.

Alors les segments orientés $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ ont aussi le même sens et donc, B est entre A et C, E est entre D et F.

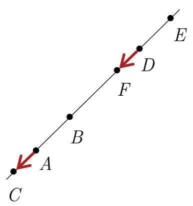
La relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ entraîne que $AB = DE$ et la relation $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ entraîne que $BC = EF$.

En appliquant le **théorème 7**, on a alors $AC = DF$.

Il reste à montrer que les segments orientés $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DF}$ ont le même sens, autrement dit (**définition 6**), que les demi-droites $]AC)$ et $]DF)$ ont le même sens.

C'est immédiat puisque $]AC) =]AB)$ et $]DF) =]DE)$.

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$.



Supposons maintenant que les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'ont pas le même sens.

Alors les segments orientés $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ n'ont aussi pas le même sens et donc, A est entre B et C, D est entre E et F ou C est entre A et B, F est entre D et E.

Traitons le premiers cas (l'autre cas se traite de la même manière).

On sait que $AB = DE$ et $BC = EF$.

En appliquant le **théorème 11**, on a dans les deux cas $AC = DF$.

Enfin, comme les demi-droites $]AB)$ et $]BA)$ n'ont pas le même sens, la demi-droite $]AC)$ a le même sens que la demi-droite $]BC)$ (**théorème 2** du **chapitre 3**).

Remarquez que $]BA) =]BC)$.

De même, les demi-droites $]DF)$ et $]EF)$ ont le même sens. Or, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$, donc les demi-droites $]AC)$ et $]DF)$ ont le même sens et alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$. □

On peut maintenant définir sans crainte la somme de deux vecteurs.

Définition 8

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'une droite $\mathcal{D}$, A, B et C des points de la droite $\mathcal{D}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la classe d'équivalence du segment orienté $\overrightarrow{AC}$.

Ainsi, la somme de deux vecteurs est un vecteur.

Sans surprise, on a le théorème suivant :

Théorème 18 **Relation de Chasles pour les vecteurs d'une droite**

Soient A, B et C des points d'une même droite.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

La démonstration du **théorème 18** est une conséquence immédiate de la **définition 8**.
Dans l'égalité, on ajoute en réalité les classes d'équivalence des deux segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ (qui sont donc des vecteurs).

Montrons à présent que les vecteurs d'une droite forment un groupe commutatif pour l'addition.

Le cours du chapitre 4

La relation « avoir le même sens » pour les segments orientés non nuls d'une droite s'étend aisément avec les vecteurs non nuls d'une droite.

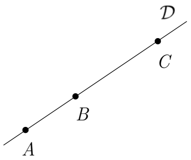
Utilisation de la valeur absolue (nous ne manipulons pas des nombres).

Théorème 19

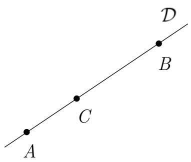
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'une droite $\mathcal{D}$.
1) Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ et le sens du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est le même que celui des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2) Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\big|\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\big|$ et le sens du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est le même que celui des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la plus grande norme.

Preuve

Soient A, B et C trois points appartenant à la droite $\mathcal{D}$.
Notons $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$.
1) Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens.



Alors les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont le même sens, et alors le point B est entre les points A et C.
Par définition, $\|\vec{u}\|=AB$ et $\|\vec{v}\|=BC$.
Puis, d'après la **relation de Chasles**, $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Donc, $\|\vec{u}+\vec{v}\|=AC$.
Enfin, en utilisant la **définition 3**, on a $AB+BC=BC$, c'est-à-dire $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.
Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ ont deux à deux le même sens : cela résulte du **théorème 12** du **chapitre 2**.
2) Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés.



Alors les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de sens contraire et donc ou bien C est entre A et B, ou bien A est entre B et C.
Traitons seulement le premiers cas (l'autre cas se traite de la même manière).
Par définition, $\|\vec{u}\|=AB$ et $\|\vec{v}\|=BC$.
D'après la **relation de Chasles**, $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Donc, $\|\vec{u}+\vec{v}\|=AC$.
Or C est entre A et B, alors d'après la **définition 2**, $AC<AB$. On a aussi (via la **définition 4**) $AC=AB-BC$.
Ainsi, $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|$ (on obtiendrait $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{v}\|-\|\vec{u}\|$ dans l'autre cas, d'où la valeur absolue).
Enfin, comme $A*C*B$, on a $]AC)\subset]AB)$ et donc le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$ qui a la plus grande norme par rapport au vecteur $\vec{v}$. □

Dans l'autre cas, on aurait cette fois-ci $AB<AC$.

Remarquez que $BC<AB$.

Théorème 20 **Commutativité de l'addition des vecteurs**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'une même droite.
$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}.$$

Preuve

Si l'un des vecteurs est nul, il suffit d'appliquer le **théorème 22**.
Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.
- Ces vecteurs ont le même sens : $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|=\|\vec{v}\|+\|\vec{u}\|=\|\vec{v}+\vec{u}\|$.

Utilisation du **théorème 8** et du **théorème 19**.

Puis, les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{v}+\vec{u}$ ont le même sens puisqu'ils ont le même sens que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
- Ces vecteurs ont des sens opposés : $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\big|\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\big|=\|\vec{v}+\vec{u}\|$.

Utilisation du **théorème 19**.

Puis, les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{v}+\vec{u}$ ont le même sens puisqu'ils ont le même sens que le vecteur $\vec{u}$ (si l'on suppose que $\|\vec{v}\|<\|\vec{u}\|$). □

Théorème 21 **Associativité de l'addition des vecteurs**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs d'une même droite.
$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}.$$

Preuve

Si l'un des vecteurs est nul, on a immédiatement la relation demandée.
Supposons que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient non nuls.
Il y a beaucoup de cas à traiter. On va traiter en détail deux cas.

Il y a six cas à étudier en tout.

- Supposons que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont le même sens.
Alors $\|\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}+\vec{w}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.

Utilisation des **théorèmes 9** et **19**.

De même, $\|(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}\|=\|\vec{u}+\vec{v}\|+\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.

Puis, il est clair que les vecteurs $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ et $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ ont le même sens.

Donc $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$.

- Supposons à présent que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, et que le vecteur $\vec{w}$ a un sens contraire aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}+\vec{w}$ sont de même sens dans ce cas.
Les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont de sens contraire.

Alors avec $\|\vec{w}\|<\|\vec{v}\|$ par exemple, on a $\|\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}+\vec{w}\|=\|\vec{u}\|+(\|\vec{v}\|-\|\vec{w}\|)$.

De même, $\|(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}\|=\|\vec{u}+\vec{v}\|-\|\vec{w}\|=(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)-\|\vec{w}\|$.

L'égalité $\|\vec{u}\|+(\|\vec{v}\|-\|\vec{w}\|)=(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)-\|\vec{w}\|$, se prouve facilement à l'aide du **théorème 25**.

Si vous voulez détailler ce point, il faut traiter deux cas suivant si c'est le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ ou $\vec{w}$ qui a la plus grande norme.

Enfin, le vecteur $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ est du même sens que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}+\vec{w}$ (et donc de $\vec{v}$ puisque $\|\vec{w}\|<\|\vec{v}\|$), et le vecteur $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ a le même sens que le vecteur $\vec{v}$.

Ainsi, $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$. □

Remarque

De ce qui précède, on écrira $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ au lieu de $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ ou $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$.

Théorème 22

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'une droite.

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}\ .$$

Preuve

D'où proviennent les points A et B ? On prend A un point de la droite $\mathcal{D}$, puis on applique le **théorème 5**.

Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BB}$ étant un représentant du vecteur nul, on a d'après la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}\ .$$

De même, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ étant un représentant du vecteur nul, on a d'après la **relation de Chasles** :

$$\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\ .$$

Ainsi, $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$. □

Théorème 23

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'une droite.

Il existe un unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}=\vec{0}$.

Preuve

L'unicité résulte du **théorème 2** du **chapitre 4** du livre Algèbre Licence I.

Montrons seulement l'existence.

Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$.

D'après la **relation de Chasles**, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

En notant alors $\vec{v}=\overrightarrow{BA}$, on a $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}=\vec{0}$. □

Remarque

Donc, $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$.

L'unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ est appelé l'**opposé** du vecteur $\vec{u}$. On le note $-\vec{u}$.

D Multiplication par un entier

Cela a été vu dans le **chapitre 4** du livre Algèbre Licence I.

Rappelons les notations que nous avons employées dans les groupes.

Soient x un élément d'un groupe G (noté additivement), et n un entier relatif.

On pose :

$$1)\ \ 0x=0_G \qquad 2)\ \ nx=(n-1)x+x\ ,\ \text{si}\ \ n\in\mathbb{N}^* \qquad 3)\ \ nx=-((-n)x)\ \ \text{si}\ \ n\in\mathbb{Z}_-^*\ .$$

En adaptant, on pose donc :

Par exemple, si $\vec{u}$ désigne un vecteur, on a :
$0\vec{u}=\vec{0}$, $2\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}$, $-2\vec{u}=-(2\vec{u})$.

$$1)\ \ 0\vec{u}=\vec{0} \qquad 2)\ \ n\vec{u}=(n-1)\vec{u}+\vec{u}\ \ \text{si}\ \ n\in\mathbb{N}^* \qquad 3)\ \ n\vec{u}=-((-n)\vec{u})\ \ \text{si}\ \ n\in\mathbb{Z}_-^*\ .$$

Dans des structures plus faibles (par exemple les demi-groupes), on peut convenir à des notations similaires.

Soient x un élément d'un demi-groupe E (noté additivement), et n un entier naturel non nul.

On pose :

$$1)\ \ 1x=x \qquad 2)\ \ nx=(n-1)x+x\ ,\ \text{si}\ \ n\geqslant 2\ .$$

Enfin, dans les magmas unitaires, on convient que si x est un élément d'une tel structure et e l'élément neutre de la loi associée, alors $0x=e$ (loi additive), $x^0=e$ (loi multiplicative).

Par exemple, si α désigne une longueur, on a :
$1\alpha=\alpha$, $2\alpha=\alpha+\alpha$, $0\alpha=0$.

Théorème 24

Soient $\vec{u}$ un vecteur d'une droite et k un entier relatif.
1) Si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul et $k>0$, alors le sens du vecteur $k\vec{u}$ est le même que celui du vecteur $\vec{u}$.
2) Si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul et $k<0$, alors le sens du vecteur $k\vec{u}$ est opposé au sens du vecteur $\vec{u}$.

Preuve

1) Supposons que le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul et $k>0$.

Démonstration par récurrence.

Il est clair que le vecteur $\vec{u}$ a le même sens que lui-même, ce qui permet de dire que la propriété à vérifiée est vraie pour $k=1$.
Soit $k>0$ et supposons que le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$.
Via les notations précédentes, on a $(k+1)\vec{u}=k\vec{u}+\vec{u}$.
Or, d'après le **théorème 19-1**, le vecteur $k\vec{u}+\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$. Donc le vecteur $(k+1)\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$.
2) Supposons que le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul et $k<0$.
D'après ce qui a été vu précédemment, le vecteur $-k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$ (puisque $-k>0$).
Mais $-k\vec{u}=-(k\vec{u})$ (via les notations précédente). Les vecteurs $-k\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont donc des sens opposés.
Il vient alors que les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont des sens opposés. □

Théorème 25

Soient $\vec{u}$ un vecteur d'une droite et k un entier relatif.
$$\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|.$$

Preuve

Démonstration par récurrence.

L'égalité est évidente si k est nul.

L'entier k est positif, donc $|k|=k$.

Soit $k\in\mathbb{N}$ et supposons que $\|k\vec{u}\|=k\times\|\vec{u}\|$.

Utilisation des **théorèmes 19** et **24** et des notations classiques dans les structures algébriques.
Le lecteur montrera qu'un vecteur et son opposé ont la même norme.

On a alors $\|(k+1)\vec{u}\|=\|k\vec{u}+\vec{u}\|=\|k\vec{u}\|+\|\vec{u}\|=k\times\|\vec{u}\|+\|\vec{u}\|=(k+1)\,\|\vec{u}\|$.
Puis, pour $k<0$, on a $-k>0$ et donc $\|k\vec{u}\|=\|-((-k)\vec{u})\|=\|(-k)\vec{u})\|=|-k|\times\|\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$. □

Le **théorème 26**, lourd à démontrer, à déjà était fait dans un cas plus général pour une loi multiplicative. Dans le cas d'une loi additive, il suffit d'adapter la démonstration générale (voir le **théorème 17** du **chapitre 4** du livre Algèbre Licence 1).

Théorème 26

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'une même droite, k et k' deux entiers relatifs.
$$1)\ k\vec{u}+k'\vec{u}=(k+k')\vec{u}\qquad 2)\ k\vec{u}+k\vec{v}=k(\vec{u}+\vec{v})\qquad 3)\ k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}.$$

4 Isométries de droites

A Définition et propriétés remarquables

La définition suivante est fondamentale pour la suite :

Définition 8

Les isométries (de droites) jouent un rôle très important en géométrie.

Soit f une application d'une droite $\mathcal{D}$ dans une droite $\mathcal{D}'$.
Dire que f est une **isométrie** signifie que :
$$\forall(A,B)\in\mathcal{E}^2,\ \begin{cases}A\in\mathcal{D}\\ B\in\mathcal{D}\end{cases}\Rightarrow\ ]AB[\,\equiv\,]f(A)f(B)[\,.$$

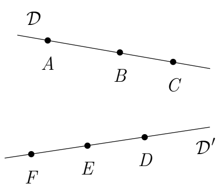
Remarques

1. La **définition 8** dit simplement qu'une isométrie d'une droite sur une autre droite conserve la longueur.
2. En passant aux classes d'équivalence, la relation $]AB[\,\equiv\,]f(A)f(B)[$ devient $AB=f(A)f(B)$.

Le **théorème 27** est important.

Théorème 27

Une isométrie d'une droite sur une autre droite conserve la relation « entre ».



Preuve

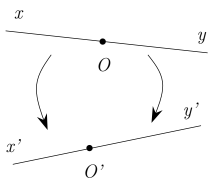
Soit f une application d'une droite $\mathcal{D}$ dans une droite $\mathcal{D}'$.
Soient aussi, A, B et C trois points de la droite $\mathcal{D}$ tels que $A*B*C$.
Notons D, E et F les images respectives des points A, B et C par l'application f.

Le cours du chapitre 4

La relation $A * B * C$ entraîne que $AB + BC = AC$ (**définition 3**).
Puis, comme f est une isométrie, on a $DE + EF = DF$.

Comme on le verra plus loin, une isométrie de droites est nécessairement injective. Ce qui assure que les points E, D et F sont deux à deux distincts.

L'ensemble d'arrivée de l'application f étant une droite, les points E, D et F sont alignés.
Selon le **théorème 3** du **chapitre 2**, un seul de ces points est entre les deux autres. Compte tenu de la dernière égalité obtenue, c'est évidemment le point E. □



On obtient donc $\mathcal{D} = Ox \cup \{O\} \cup Oy$ et $\mathcal{D}' = O'x' \cup \{O'\} \cup O'y'$.

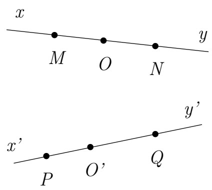
Soit Δ_1 le déplacement d'une demi-droite Ox sur une demi-droite $O'x'$.
Notons Oy et $O'y'$ les demi-droites opposées respectivement à Ox et $O'x'$.
Soit Δ_2 le déplacement d'une demi-droite Oy sur une demi-droite $O'y'$.
Soit f l'application de la droite $\mathcal{D}$ dans la droite $\mathcal{D}'$ définie par le « recollement » des déplacements Δ_1 et Δ_2 :
- l'application f coïncide avec Δ_1 sur Ox ;
- l'application f coïncide avec Δ_2 sur Oy ;
- l'image de O par l'application f est O'.

Le **théorème 28** est très important.

Théorème 28

L'application f définie ci-dessus est une isométrie, et c'est l'unique isométrie qui coïncide avec le déplacement Δ_1 sur la demi-droite Ox .

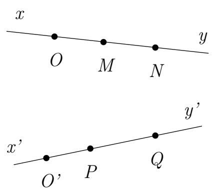
Preuve



Soient M et N deux points distincts situés sur la droite $\mathcal{D}$.
Notons P et Q les images respectives des points M et N par f.
Le but est de prouver que f est une isométrie, donc que $MN = PQ$.
En utilisant la **définition 1**, on a, suivant la position du point M sur la droite $\mathcal{D}$, $\Delta_1(M) = P$, $\Delta_2(M) = P$ ou bien $f(M) = O'$ (ce dernier cas se produit si M est confondu avec O).
Pour ce dernier cas, il est clair que $MN = PQ$. On a la même conclusion si N est confondu avec O. On suppose désormais que les points M et N sont distincts de O.
On obtient alors $OM = O'P$ et $ON = O'Q$. Plusieurs cas sont à étudier.
- Le point O est entre les points M et N.

Dans le cas contraire, les points P et Q seraient du même côté de O', ce qui est absurde.

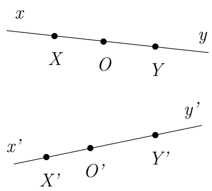
Dans ce cas, le point O' est entre les points P et Q, ce qui donne :
$$PQ = PO' + O'Q = O'P + O'Q = OM + ON = MO + ON = MN .$$



- Le point M est entre les points O et N.
Dans ce cas, le point P est entre les points O' et Q (utilisation du **théorème 2**) ce qui donne :
$$PQ = O'Q - O'P = ON - OM = MN .$$
- Le point N est entre les points O et M.
Ce cas se montre comme dans le cas précédent.
Ainsi, l'application f est une isométrie.
Montrons à présent que f est l'unique isométrie qui coïncide avec le déplacement Δ_1 sur la demi-droite Ox .

On va montrer que les applications f et g coïncident sur la demi-droite Oy avec de plus $g(O) = O'$.

Soit $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ une isométrie qui coïncide avec l'application Δ_1 sur la demi-droite Ox .
Soit X un point de la demi-droite Ox.
Par les hypothèses, on a, en notant X' l'image de X par Δ_1, $X' = f(X) = g(X)$.



La relation « entre » étant conservée par les isométries de droites, les points O' et $g(O)$ sont des points de la demi-droite $X'y'$ (attention, ce point doit être compris pour la suite, discussion en vidéo...).
Or, $X'g(O) \underset{g}{=} XO \underset{f}{=} X'O'$, donc (en utilisant le **théorème 5**) $g(O) = O'$.
Soit enfin un point Y de la demi-droite Oy.
Notons Y' et Y'' les images respectives du point Y par les applications f et g.
La relation « entre » étant conservée par les isométries de droites, les points Y' et Y'' sont sur la demi-droite $O'y'$.
Or, $O'Y'' \underset{g}{=} OY \underset{f}{=} O'Y'$, donc (en utilisant le **théorème 5**) $Y'' = Y'$.

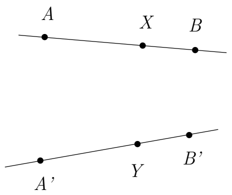
Les applications f et g ont le même ensemble de départ et d'arrivée et : $\forall X \in \mathcal{D}, f(X) = g(X)$.

Finalement, on a montré que les applications f et g coïncident partout sur $\mathcal{D}$, et donc $f = g$. □

Théorème 29

Soient $]AB[$ et $]A'B'[$ deux segments congruents non nuls.
Il existe une unique isométrie f de la droite (AB) sur la droite $(A'B')$ telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Le cours du chapitre 4



Preuve

Notons Δ le déplacement de la demi-droite $]AB)$ sur la demi-droite $]A'B')$.

En appliquant la **définition 1**, on a $\Delta(B) = B'$.

Soit f l'isométrie (l'unicité vient du **théorème 28**) prolongeant le déplacement Δ. Alors f est <u>une</u> isométrie de la droite (AB) sur la droite $(A'B')$ telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

On a montré l'existence d'une isométrie f de la droite (AB) sur la droite $(A'B')$ telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Il reste à montrer l'unicité de l'isométrie.

Soit alors g une isométrie de la droite (AB) sur la droite $(A'B')$ telle que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.

Soit X un point de la demi-droite $]AB)$.

Notons Y et Y' les images respectives du point X par les applications f et g.

La relation « entre » étant conservée par les isométries de droites, les points Y et Y' sont sur la demi-droite $]A'B')$.

Or, $A'Y = AX = A'Y'$, donc (en utilisant le **théorème 5**) $Y = Y'$.

Ainsi, l'application g coïncide avec l'application Δ sur la demi-droite $]AB)$, et donc (**théorème 28**) $f = g$. □

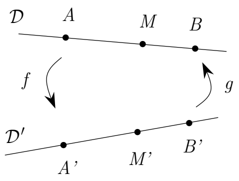
Le **théorème 30** est une conséquence immédiate du **théorème 29** : on applique le **théorème 29** à l'application identité.
De plus, la notion de point fixe est connue du lecteur (voir la remarque de la **définition 21** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence I).

Théorème 30

Une isométrie d'une droite sur elle-même ayant deux points fixes est l'identité.

Théorème 31

Toute isométrie d'une droite sur une autre droite est une bijection, l'application réciproque étant une isométrie.



Preuve

Soit f une isométrie d'une droite $\mathcal{D}$ sur une droite $\mathcal{D}'$.

Soient A et B deux points de la droite $\mathcal{D}$, A' et B' leurs images respectives par f.

Comme $AB = A'B'$, on définit l'isométrie g de la droite $(A'B')$ sur la droite (AB) avec $g(A') = A$ et $g(B') = B$.

Or, $(f \circ g)(A') = A'$ et $(f \circ g)(B') = B'$. Donc en utilisant le **théorème 30**, comme l'ensemble de départ et d'arrivée de l'application $f \circ g$ est la droite $(A'B')$, on en déduit que $f \circ g = \mathrm{Id}_{(A'B')}$.

De plus, $(g \circ f)(A) = A$ et $(g \circ f)(B) = B$, donc en utilisant de nouveau le **théorème 30**, comme l'ensemble de départ et d'arrivée de l'application $g \circ f$ est la droite (AB), on en déduit que $g \circ f = \mathrm{Id}_{(AB)}$.

Par le **théorème 20** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence I, les applications f et g sont bijectives avec $f^{-1} = g$. □

La démonstration du **théorème 32** est immédiate : les isométries de droites conservent les longueurs et l'ordre.

Théorème 32

Les isométries de droites conservent la relation d'équipollence.

Remarque

De ce qui précède, on définit l'image d'un vecteur $\vec{u}$ par une isométrie de droites comme le vecteur dont les représentants sont les images des représentants du vecteur $\vec{u}$.

On entend par « isométrie d'une droite » une isométrie d'une droite sur elle-même.

B <u>Le groupe des isométries d'une droite</u>

Le théorème suivant mérite une attention particulière :

Théorème 33 **Groupe des isométries d'une droite**

Les isométries d'une droite forment un groupe pour la composition.

Preuve

Soient $\mathcal{D}$ une droite, $f, g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ deux isométries.

<u>Loi interne</u>

Soient A et B deux points de la droite $\mathcal{D}$.

On a : $(f \circ g)(A)(f \circ g)(B) = f(g(A))f(g(B)) = g(A)g(B) = AB$.

Ce qui montre que l'application $f \circ g$ est une isométrie de la droite $\mathcal{D}$.

<u>Loi associative</u>

Voir le **théorème 4** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence I.

On sait que la composition des applications en général est associative, donc *à fortiori* pour les isométries d'une droite.

<u>Elément neutre</u>

L'application identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ est une isométrie de la droite $\mathcal{D}$ et vérifie trivialement $f \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ f = f$.

Eléments symétrisables

Tout isométrie d'une droite (qui est donc bijective) admet d'après le **théorème 31**, une application réciproque qui est aussi une isométrie. □

Remarque

L'ensemble des isométries d'une droite $\mathcal{D}$ sera noté $\mathrm{Is}(\mathcal{D})$.

Ainsi, le couple $(\mathrm{Is}(\mathcal{D}), \circ)$ est un groupe.

Soient $\mathcal{D}$ une droite, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ une isométrie, A et B deux points de la droite $\mathcal{D}$ d'images respectives A' et B'.

On sait que les isométries de droites conservent la relation « entre ». Donc l'image directe d'une demi-droite de même sens que la demi-droite $]AB)$ est une demi-droite de même sens que $]A'B')$.

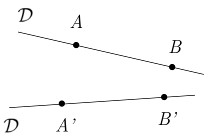
De même, l'image directe d'une demi-droite de sens opposé à $]AB)$ est une demi-droite de sens opposé à $]A'B')$.

Ainsi, si les demi-droites $]AB)$ et $]A'B')$ ont le même sens, alors l'application f conserve le sens de toutes les demi-droites incluses dans la droite $\mathcal{D}$. Dans ce cas, on dit que l'application f est **directe**.

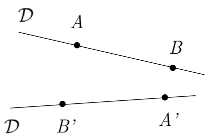
Si les demi-droites $]AB)$ et $]A'B')$ ont des sens opposés, alors l'application f inverse le sens de toutes les demi-droites incluses dans la droite $\mathcal{D}$. Dans ce cas, on dit que l'application f est **indirecte**.

Ces considérations nous amènent au théorème suivant :

L'isométrie f est directe :



L'isométrie f est indirecte :



Théorème 34 Sous-groupe des isométries directes d'une droite

Les isométries directes d'une droite forment un sous-groupe du groupe des isométries d'une droite.

Preuve

Soient $\mathcal{D}$ une droite et $f, g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ deux isométries directes.

- L'application identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ est clairement une isométrie directe.

- L'application $f \circ g$ (ou $g \circ f$) est une isométrie de la droite $\mathcal{D}$ (**théorème 33**). Elle est aussi directe (**théorème 3** du **chapitre 2**).

- Comme l'application f est bijective, elle admet une application réciproque f^{-1}. D'après le **théorème 33**, cette dernière est une isométrie et est directe car l'application f l'est. □

La relation « avoir du même sens » est réflexive dans l'ensemble des demi-droites incluses dans $\mathcal{D}$.

La relation « avoir du même sens » est transitive dans l'ensemble des demi-droites incluses dans $\mathcal{D}$.

Le lecteur pourra montrer que la composée d'une isométrie directe d'une droite et d'une isométrie indirecte de la même droite est une isométrie indirecte. Ainsi, si f^{-1} n'était pas directe, alors il en serait de même pour l'application $f \circ f^{-1}$, ce qui est absurde !

Remarques

1. L'ensemble des isométries directes d'une droite $\mathcal{D}$ sera noté $\mathrm{Is}^+(\mathcal{D})$.

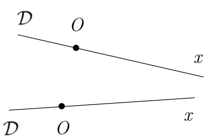
2. L'ensemble des isométries indirectes d'une droite $\mathcal{D}$ sera noté $\mathrm{Is}^-(\mathcal{D})$.

Donc $\mathrm{Is}^+(\mathcal{D}) \cup \mathrm{Is}^-(\mathcal{D}) = \mathrm{Is}(\mathcal{D})$.

Théorème 35

Une isométrie directe d'une droite ayant un point fixe est l'identité.

Preuve



Soient f une isométrie directe d'une droite $\mathcal{D}$ ayant un point fixe O, et Ox une demi-droite d'origine O incluse dans la droite $\mathcal{D}$.

Comme f est une isométrie directe, l'image directe de la demi-droite Ox est elle-même.

L'application f est par conséquent l'unique prolongement du déplacement de la demi-droite Ox sur elle-même.

Or, en utilisant l'**axiome 2**, l'identité prolonge aussi ce déplacement.

Il vient alors que $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. □

Théorème 36

Soient $\mathcal{D}$ une droite et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ une isométrie directe.

Tout segment orienté inclus dans la droite $\mathcal{D}$ a pour image par f un segment orienté équipollent.

La démonstration du **théorème 36** est immédiate : une isométrie directe d'une droite conserve les longueurs et la relation « avoir le même sens ».

Remarque

De ce qui précède, si A et B sont deux points de la droite $\mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

Autrement, dit, les segments orientés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ sont équipollents.

Théorème 37

Soient M un point d'une droite $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ une isométrie directe.

Le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ en dépend pas du choix du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

Le **théorème 37** est important.

On parle ici de la classe d'équivalence du segment orienté $\overrightarrow{Mf(M)}$.

Le cours du chapitre 4

Preuve

Soit N un point de la droite $\mathcal{D}$.

On va montrer que les segments orientés $\overrightarrow{Mf(M)}$ et $\overrightarrow{Nf(N)}$ sont équipollents.

D'après la **relation de Chasles**, on a :

$$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nf(M)} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nf(N)} + \overrightarrow{f(N)f(M)} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nf(N)} - \overrightarrow{f(M)f(N)}.$$

D'après le **théorème 36**, les segments orientés $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ sont équipollents.

Il vient alors que $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Nf(N)}$. □

Dans le théorème suivant, on note $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ l'ensemble des vecteurs de la droite $\mathcal{D}$.

Théorème 38

Soient M un point d'une droite $\mathcal{D}$.

L'application $\varphi : \begin{array}{rcl}(\mathrm{Is}^+(\mathcal{D}), \circ) & \longrightarrow & (\overrightarrow{\mathcal{D}}, +) \\ f & \mapsto & \overrightarrow{Mf(M)}\end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Compte tenu du **théorème 37**, l'application φ est bien définie.
La notion d'isomorphisme de groupes a été traitée en algèbre (**chapitre 4** du livre Algèbre Licence 1).

Preuve

Soient $f, g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ deux isométries directes.

- On sait déjà que les couples $(\mathrm{Is}^+(\mathcal{D}), \circ)$ et $(\overrightarrow{\mathcal{D}}, +)$ sont des groupes.
- Montrons que l'application φ est un morphisme.

$(f \circ g)(M) = f(g(M))$.

On a : $\varphi(f \circ g) = \overrightarrow{M(f \circ g)(M)} = \overrightarrow{Mf(M)} + \overrightarrow{f(M)(f \circ g)(M)} = \overrightarrow{Mf(M)} + \overrightarrow{Mg(M)} = \varphi(f) + \varphi(g)$.

- Montrons que l'application φ est injective.

Supposons que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

On a par conséquent $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Mg(M)}$, donc $Mf(M) = Mg(M)$, soit, puisque les demi-droites $]Mf(M))$ et $]Mg(M))$ ont le même sens, $f(M) = g(M)$.

Ainsi, les applications f et g sont égales.

On a montré que : $\forall X \in \mathcal{D}, f(X) = g(X)$.

- Montrons que l'application φ est surjective.

Soit $Y \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$.

Considérons l'équation d'inconnue h dans $\mathrm{Is}^+(\mathcal{D})$: $\varphi(h) = Y$.

Il existe un vecteur $\vec{y}$ de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ tel que $Y = \vec{y}$, soit $\varphi(h) = \vec{y}$, soit encore $\overrightarrow{Mh(M)} = \vec{y}$.

D'après le **théorème 16**, il existe un point N de la droite $\mathcal{D}$ tel que $\vec{y} = \overrightarrow{MN}$.

L'équation devient alors $\overrightarrow{Mh(M)} = \overrightarrow{MN}$, soit $h(M) = N$.

Ainsi, toute isométrie directe h telle que $h(M) = N$ est solution de l'équation, et par conséquent, l'application φ est bien un isomorphisme de groupes. □

Le théorème précédent nous conduit à la définition suivante :

Définition 9

Soient $\vec{u}$ un vecteur d'une droite $\mathcal{D}$ et M un point de cette droite.

On appelle **glissement** de vecteur $\vec{u}$ l'isométrie directe f telle que $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u}$.

Remarque

La norme du vecteur $\vec{u}$ est appelé l'**amplitude** de ce glissement.

Théorème 39

Tout isométrie indirecte d'une droite est involutive.

La notion d'application involutive a été abordée dans la **définition 13** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

Preuve

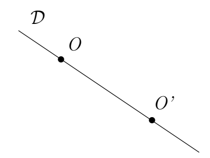
Soit f une isométrie indirecte d'une droite $\mathcal{D}$.

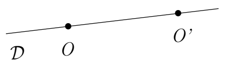
Montrons que f est involutive, c'est-à-dire que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.

Cette affirmation se montre très facilement (correction en vidéo).

La composée de deux isométries indirectes étant directe, il suffit de montrer (**théorème 35**) que l'application f^2 admet un point fixe.

Le cours du chapitre 4





Soit O un point de la droite $\mathcal{D}$.
Notons O' l'image de ce point par l'application f.
Supposons que les points O et O' sont confondus.
Alors $f^2(O) = f(f(O)) = f(O) = O$, et donc O est un point fixe de f^2, d'où $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.
Supposons que les points O et O' sont distincts.
Comme l'application f est indirecte, l'image directe de la demi-droite $]OO')$ par f est la demi-droite $]O'O)$.
Dans ce cas, le point $f(O')$ appartient à la demi-droite $]O'O)$. De plus, on a $O'O = OO' = O'f(O')$. Donc $f(O') = O$.
Finalement, $f^2(O) = f(f(O)) = f(O') = O$, et donc $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.
Dans tous les cas, l'application f est involutive. $\square$