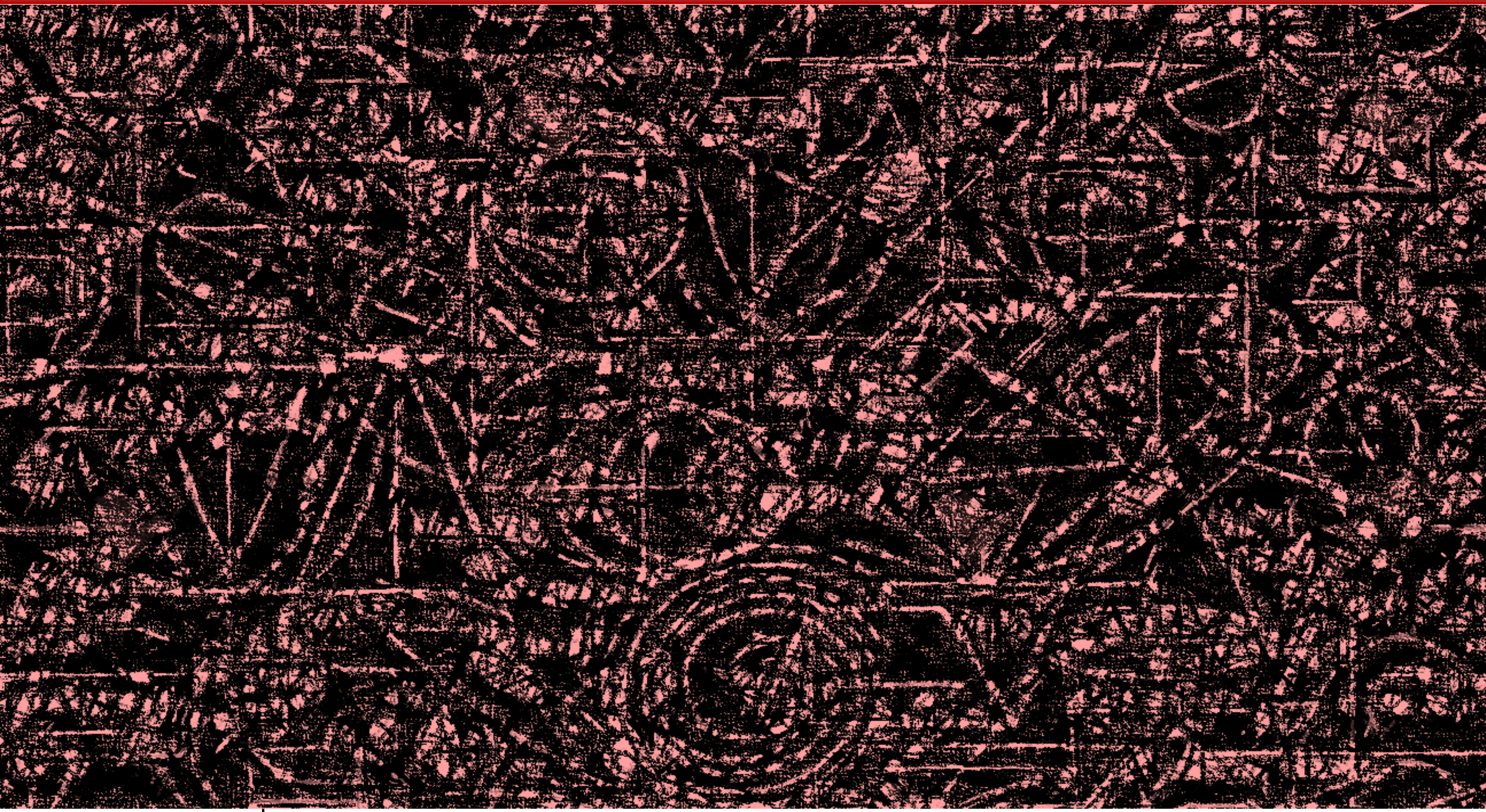
Orientation de la droite, du plan et de l'espace

3



Introduction

L'*orientation* est incontournable en géométrie, notamment dans le plan, par exemple pour définir rigoureusement les *angles orientés*. Mais ce n'est pas simple.
En première lecture, le lecteur pourra omettre certaines preuves (celles faisant au moins une demi-page) et pourra laisser tomber l'orientation de l'espace (ou admettre tous les résultats) qui est une étude plus délicate.
On demande au lecteur d'être très attentif sur l'orientation d'un plan avec la notion de **drapeau**, car nous l'utiliserons très souvent par la suite.

Prérequis

- Axiomes d'incidence (**chapitre 1**)
- Axiomes d'ordre (**chapitre 2**)
- Relations d'équivalence (**chapitre 2** du livre Algèbre Licence 1)

Objectifs du chapitre

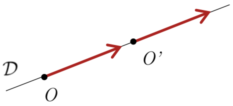
- Définir la notion de sens sur une droite
- Introduire la notion de **drapeau**
- Orienter le plan
- Introduire la notion de **trièdre**
- Orienter l'espace

Le cours du chapitre 3

1 Orientation d'une droite

A Définition

Commençons par une définition simple :



Définition 1

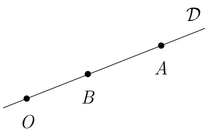
Soient $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ deux demi-droites incluses dans une droite $\mathcal{D}$ d'origines respectives O et O'.

Dire que les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le **même sens** signifie que l'une des deux est incluse dans l'autre.

Remarques

1. On abrège dans la **définition 1** « $\mathcal{D}_O$ a le même sens que $\mathcal{D}_{O'}$ » par « $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens » afin d'anticiper sur la symétrie de cette relation.
2. Par définition, $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens quand :

$$\mathcal{D}_O \subset \mathcal{D}_{O'} \text{ ou } \mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}_O .$$



Exemple

Ci-contre, on considère un point O appartenant à une droite $\mathcal{D}$.
Soient A et B deux points incidents à la droite $\mathcal{D}$ tels que $O * B * A$.
D'après le **théorème 12** du **chapitre 2**, on a $]BA) \subset]OA)$.
Donc les demi-droites $]BA)$ et $]OA)$ ont le même sens.
Il est clair que les demi-droites $]BO)$ et $]BA)$ n'ont pas le même sens et que plus généralement, deux demi-droites opposées n'ont pas le même sens.

B Propriétés

Le **théorème 1** fournit deux caractéristiques importantes de deux demi-droites qui ont le même sens.
Notez que dans ce théorème, les points O et O' sont distincts.

Théorème 1

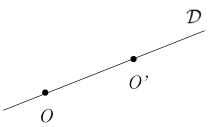
Soient $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ deux demi-droites incluses dans une droite $\mathcal{D}$ d'origines respectives O et O' distinctes.

Les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :
i) les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens ;
ii) l'intersection des demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ n'est pas vide, et il existe un point de l'intersection qui n'est pas entre les points O et O' ;
iii) l'intersection des demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ n'est pas vide, et aucun point de l'intersection n'est entre les points O et O'.

Preuve

Qui peut le plus, peut le moins !

iii) $\Rightarrow$ ii) Evident.
ii) $\Rightarrow$ i) Supposons que l'intersection des demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ n'est pas vide, et qu'il existe un point A de l'intersection qui n'est pas entre les points O et O'.
Dans ce cas, ou bien on a $O * O' * A$, ou bien on a $O' * O * A$.
Remarquons que comme $A \in \mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O'}$, on a $]OA) = D_O$ et $]O'A) = D_{O'}$

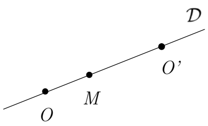


Dans le premier cas, on a d'après le **théorème 12** du **chapitre 2**, $]O'A) \subset]OA)$, donc $\mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}_O$ et dans le second cas, on a $]OA) \subset]O'A)$, donc $\mathcal{D}_O \subset \mathcal{D}_{O'}$.
Ainsi, les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens.
i) $\Rightarrow$ iii) Par contraposition. Il y a donc deux cas.

On rappelle que si A et B désignent deux sous-ensembles d'un ensemble E, alors :

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B .$$

Ou bien $\mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O'} = \varnothing$, alors comme les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ne sont pas vides, on a $\mathcal{D}_O \not\subset \mathcal{D}_{O'}$ et $\mathcal{D}_{O'} \not\subset \mathcal{D}_O$.
Donc les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ n'ont le même sens par définition.
Ou bien les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont un point commun M qui est situé entre les points O et O'.



Puisque $M \in \mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O'}$, on a $\mathcal{D}_O =]OM)$ et $\mathcal{D}_{O'} =]O'M)$. Mais comme $O * M * O'$, on a (**théorème 11** du **chapitre 2**) $]OM) =]OO')$ et $]O'M) =]O'O)$.
On obtient donc $\mathcal{D}_O =]OO')$ et $\mathcal{D}_{O'} =]O'O)$, d'où (**théorème 10** du **chapitre 2**) $\mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O'} =]OO'[$.
Par suite, on a $\mathcal{D}_O \not\subset \mathcal{D}_{O'}$ et $\mathcal{D}_{O'} \not\subset \mathcal{D}_O$, donc les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ n'ont le même sens. □

Détail de cette conclusion en vidéo.

Le cours du chapitre 3

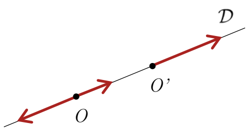
Théorème 2

Soient $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ deux demi-droites incluses dans une droite $\mathcal{D}$, n'ayant pas le même sens et d'origines respectives O et O' distinctes.
Si $\mathcal{D}'_O$ est la demi-droite opposée à $\mathcal{D}_O$, alors les demi-droites $\mathcal{D}'_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens.

La démonstration est délicate.

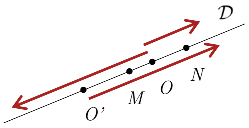
Preuve

Les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ n'ayant pas le même sens, on a (**théorème 1**) deux cas à traiter.



Ou bien $\mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O'} = \varnothing$, alors $\mathcal{D}_{O'} \subset \overline{\mathcal{D}_O}$ (complémentaire dans $\mathcal{D}$, voir aussi le **théorème 17** du **chapitre 1** du livre Algèbre Licence 1), soit $\mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}'_O \cup \{O\}$, ou encore puisque $O \notin \mathcal{D}_{O'}$, $\mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}'_O$.

Ainsi les demi-droites $\mathcal{D}'_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens.



Ou bien les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont un point commun M situé entre les points O et O'.

D'après le **théorème 12** du **chapitre 2**, on a $]MO) \subset]O'O)$, soit $]MO) \subset \mathcal{D}_{O'}$ (justification de l'égalité $]O'O) = \mathcal{D}_{O'}$ dans la démonstration précédente).
Considérons un point N de la demi-droite $\mathcal{D}'_O$.

Alors il est clair que $M * O * N$ et donc (**théorème 13** du **chapitre 2**) $]ON) \subset]MN)$.

Mais $]ON) = \mathcal{D}'_O$ et $]MN) =]MO)$, donc $\mathcal{D}'_O \subset]MO)$ soit $\mathcal{D}'_O \subset \mathcal{D}_{O'}$.

Ainsi les demi-droites $\mathcal{D}'_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens. □

Les deux théorèmes précédents permettent de prouver les deux théorèmes suivants :

Théorème 3

Soit $\mathcal{D}$ une droite.
La relation « avoir le même sens » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des demi-droites incluses dans $\mathcal{D}$.

La démonstration demande un effort de concentration et ne nécessite pas de dessin.

Preuve

La réflexivité découle de la réflexivité de l'inclusion.
La symétrie est immédiate.
Soient $\mathcal{D}_O$, $\mathcal{D}_{O'}$ et $\mathcal{D}_{O''}$ des demi-droites incluses dans $\mathcal{D}$ d'origines respectives O, O' et O'' tels que d'une part $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens et d'autre part, $\mathcal{D}_{O'}$ et $\mathcal{D}_{O''}$ ont le même sens.

Si les trois points O, O' et O'' sont confondus, la transitivité s'en déduit immédiatement.
Supposons alors que ces trois points soient distincts deux à deux.
Quatre cas vont se présenter.
Si $\mathcal{D}_O \subset \mathcal{D}_{O'}$ et $\mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}_{O''}$ ou si $\mathcal{D}_{O''} \subset \mathcal{D}_{O'}$ et $\mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}_O$, alors $\mathcal{D}_O \subset \mathcal{D}_{O''}$ ou $\mathcal{D}_{O''} \subset \mathcal{D}_O$.

Dans ces deux cas, les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O''}$ ont le même sens.

Traitons le cas où $\mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}_{O''}$.

D'après le **théorème 1**, comme les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O'}$ ont le même sens, il existe un point M de $\mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O'}$ tel qu'il n'est pas entre les points O et O'.
Dans ce cas les points O et O' sont du même côté de M.
Puis, puisque $\mathcal{D}_{O'} \subset \mathcal{D}_{O''}$ et $M \in \mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O'}$, on a $M \in \mathcal{D}_{O'} \cap \mathcal{D}_{O''}$. Mais les demi-droites $\mathcal{D}_{O'}$ et $\mathcal{D}_{O''}$ ont le même sens, donc d'après le **théorème 1**, le point M n'est pas entre les points O' et O''.
Les points O' et O'' sont du même côté de M.
La relation « être du même côté de M » étant transitive, les points O et O'' sont du même côté de M.
Enfin, comme $M \in \mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O'}$ et $M \in \mathcal{D}_{O'} \cap \mathcal{D}_{O''}$, on a $M \in \mathcal{D}_O \cap \mathcal{D}_{O''}$.

Le point M n'est pas entre les points O et O'.

Ainsi, par définition et en utilisant le **théorème 1**, les demi-droites $\mathcal{D}_O$ et $\mathcal{D}_{O''}$ ont le même sens.

Le cas où $\mathcal{D}_O \subset \mathcal{D}_{O'}$ et $\mathcal{D}_{O''} \subset \mathcal{D}_{O'}$ se traite comme précédemment et dans tous les cas, la relation est transitive. □

Théorème 4

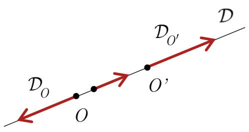
Il n'y a que deux classes d'équivalence pour la relation « avoir le même sens ».

Preuve

Montrons qu'il y en a au moins deux.

Le lecteur pourra développer cette affirmation (correction en vidéo).

Pour toute demi-droite donnée, il existe une demi-droite opposée à celle-ci, ce qui termine ce point.



Montrons qu'il n'y a pas d'autre classe d'équivalence.
Soit $\mathcal{D}_O$ une demi-droite incluse dans une droite $\mathcal{D}$ et d'origine O.
Soit $\mathcal{D}_{O'}$ une demi-droite n'ayant pas le même sens que $\mathcal{D}_O$ et d'origine O'.
Pour toute demi-droite n'ayant pas le même sens que $\mathcal{D}_O$, montrons qu'elle est du même sens que $\mathcal{D}_{O'}$.

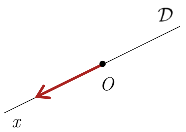
On rappelle que par un point donné sur une droite, il n'existe que deux demi-droites (distinctes) d'origine ce point.

Si les trois demi-droites ont la même origine, on conclut rapidement.
Sinon, on applique le **théorème 2**. □

Remarques
Soient O et O' deux points distincts incidents à une droite $\mathcal{D}$.

Une droite admet donc deux orientations.

1. Une classe d'équivalence pour la relation « avoir le même sens » est appelée **orientation**.
2. Deux orientations distinctes sont dites **opposées**.
3. Il est clair que deux demi-droites opposées appartiennent à deux orientations opposées.
4. Si x désigne une orientation (qui est donc un ensemble de demi-droites ayant le même sens), on note Ox la demi-droite d'origine O incluse dans x (donc $Ox \subset x$).
5. On appelle **droite orientée** tout couple formé d'une droite et d'une orientation de cette droite.
Les demi-droites qui appartiennent à cette orientation sont dites **positives**, les autres **négatives**.
Ainsi, on dira qu'on a orienté la droite $\mathcal{D}$ dans le sens de Ox si on choisit x comme orientation positive.



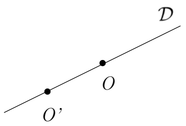
Théorème 5

Soient O et O' deux points distincts.
Les demi-droites $]OO')$ et $]O'O)$ n'ont pas le même sens.

Preuve
Il suffit de remarquer que $]OO') \cap]O'O) =]OO'[$ (**théorème 10** du **chapitre 2**).

Il s'agit en réalité du **théorème 1** sous sa forme « négatif ».

Ainsi, tout point de l'intersection est entre les points O et O', ce qui signifie (**théorème 1**) que les demi-droites $]OO')$ et $]O'O)$ n'ont pas le même sens. □



Remarque
Soient O et O' deux points distincts.
On appelle **droite orientée** (OO') la droite orientée formée par la droite (OO') et l'orientation contenant la demi-droite $]OO')$.
De ce qui vient d'être dit et du théorème précédent, il est clair que les droites orientées (OO') et $(O'O)$ sont distinctes (bien que les droites (OO') et $(O'O)$ sont égales).

2 Orientation d'un plan

L'intuition fait qu'orienter une droite est facile. Il y a que deux « sens possibles ». Pour une droite qui serait représentée obliquement, on « monte » ou on « descends ». Pour une droite qui serait représentée verticalement pareil. Et pour une droite qui serait représentée horizontalement, on va vers la « gauche » ou vers la « droite ».
La question semble néanmoins plus délicate pour le plan.

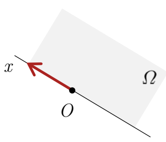
A Définitions

La définition suivante est délicate :

Définition 2

On appelle **drapeau** un couple formé par une demi-droite et d'un demi-plan fermé dont la frontière contient cette demi-droite.

Le terme « drapeau » est choisi car la demi-droite et le demi-plan font pensés à l'illustration suivante :

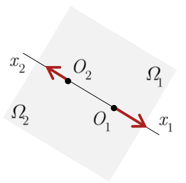


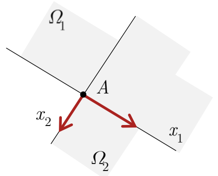
Remarques
1. Attention, un drapeau n'est pas la réunion d'un demi-plan fermé et d'une demi-droite contenue dans sa frontière !
C'est une définition abstraite basée sur la notion de couple au même titre que la droite orientée.
2. Soient Ω un demi-plan fermé, O un point de sa frontière et x une orientation de cette frontière.
On note (Ox, Ω) le drapeau formé par la demi-droite Ox et du demi-plan fermé Ω.

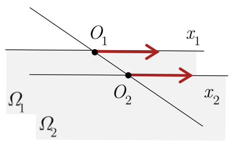
On dispose alors de la définition lourde suivante :

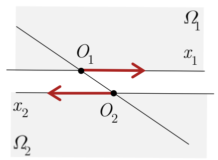
Le cours du chapitre 3

Nous vous avons fait un dessin pour les quatre dernières configurations :









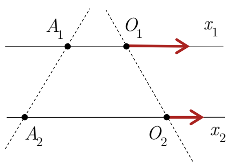
Définition 3

Soient Ω_1 (resp. Ω_2) un demi-plan fermé, O_1 (resp. O_2) un point de sa frontière et x_1 (resp. x_2) une orientation de cette frontière, tous contenus dans un plan Π.
Dire que les drapeaux (O_1x_1, Ω_1) et (O_2x_2, Ω_2) ont la **même orientation** signifie qu'on est dans l'une des cinq configurations suivantes :
1) les demi-plans Ω_1 et Ω_2 sont égaux et les orientations x_1 et x_2 sont égales.
2) les demi-plans Ω_1 et Ω_2 sont opposés et les orientations x_1 et x_2 sont opposées ;
3) les frontières de Ω_1 et Ω_2 sont sécants en un point A, $Ax_2 \subset \Omega_1$ et Ax_1 est dans le demi-plan opposé à Ω_2, ou $Ax_1 \subset \Omega_2$ et Ax_2 est dans le demi-plan opposé à Ω_1 ;
4) les frontières de Ω_1 et Ω_2 sont parallèles, les demi-droites O_1x_1 et O_2x_2 sont du même côté de la droite (O_1O_2), $O_2x_2 \subset \Omega_1$ et O_1x_1 est dans le demi-plan opposé à Ω_2, ou $O_1x_1 \subset \Omega_2$ et O_2x_2 est dans le demi-plan opposé à Ω_1 ;
5) les frontières de Ω_1 et Ω_2 sont parallèles, les demi-droites O_1x_1 et O_2x_2 ne sont pas du même côté de la droite (O_1O_2), $O_2x_2 \subset \Omega_1$ et $O_1x_1 \subset \Omega_2$, ou O_2x_2 est dans le demi-plan opposé à Ω_1 et O_1x_1 est dans le demi-plan opposé à Ω_2.

Remarque

Dans la définition, il faut comprendre « les demi-droites O_1x_1 et O_2x_2 sont du même côté de la droite (O_1O_2) » par « il existe un point de la demi-droite O_1x_1 qui est du même côté qu'un point de la demi-droite O_2x_2 par rapport à la droite (O_1O_2) ».

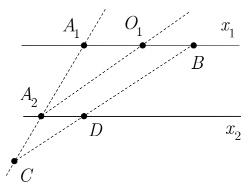
B Propriétés



Théorème 6

Soient A_1x_1 et A_2x_2 deux demi-droites situées respectivement sur des droites parallèles, O_1 et O_2 deux points situés respectivement sur la droite contenant A_1x_1, et sur la droite contenant A_2x_2.
Si les demi-droites A_1x_1 et A_2x_2 sont du même côté de la droite (A_1A_2), alors les demi-droites O_1x_1 et O_2x_2 sont du même côté de la droite (O_1O_2).

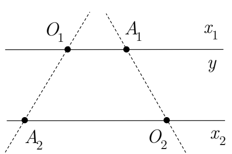
Preuve



Supposons que les demi-droites A_1x_1 et A_2x_2 sont du même côté de la droite (A_1A_2)
Supposons aussi que le point O_1 appartient à la demi-droite A_1x_1.
Notons $\mathcal{D}_1$ la droite contenant la demi-droite A_1x_1 et $\mathcal{D}_2$ la droite contenant la demi-droite A_2x_2.
Soit B un point de la demi-droite O_1x_1 tel que O_1 soit entre les points A_1 et B.
Soit C un point de la demi-droite $]A_1A_2)$ tel que A_2 soit entre les points A_1 et C.
Puisque les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, les points A_1 et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}_2$. Donc les points B et C sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}_2$.
Notons alors D le point d'intersection des droites (BC) et $\mathcal{D}_2$.

Les points B et D sont du même côté de la droite (A_1A_2) car les droites (BD) et (A_1A_2) sont sécantes en C.

Il vient que le point D est dans le demi-plan de frontière (A_1A_2) contenant B et donc que ce point est situé sur la demi-droite A_2x_2 (puisque les demi-droites A_1x_1 et A_2x_2 sont du même côté de la droite (A_1A_2)).
Il reste à montrer que les points B et D sont du même côté de la droite (O_1A_2).
La droite (O_1A_2) coupe les segments $]A_1B[$ et $]A_1C[$. Donc d'après l'**axiome de Pasch**, cette droite ne coupe pas le segment $]BC[$. Mais comme le point D est entre les points B et C, on a $]BD[\subset]BC[$, et donc la droite (O_1A_2) ne coupe pas le segment $]BD[$.
Ainsi, les points B et D sont du même côté de la droite (O_1A_2) et donc les demi-droites O_1x_1 et A_2x_2 sont du même côté de la droite (O_1A_2).
En réappliquant ce résultat (détail en vidéo), les demi-droites O_1x_1 et O_2x_2 sont du même côté de la droite (O_1O_2).



Supposons maintenant que le point A_1 appartient à la demi-droite O_1x_1.
Notons O_1y la demi-droite contenue dans la droite contenant la demi-droite A_1x_1 et située du même côté de (O_1A_2) que la demi-droite A_2x_2.

De ce qui a été fait précédemment, les demi-droites A_1y et A_2x_2 sont du même côté de la droite (A_1A_2).
Donc y et x_1 ont la même orientation, et alors, en réappliquant ce qui a été fait précédemment, les demi-droites O_1x_1 et O_2x_2 sont du même côté de la droite (O_1O_2). □

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 7

Soit Π un plan.
La relation « avoir la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des drapeaux du plan Π.

Preuve

Un drapeau est de la même orientation que lui-même en considérant la première configuration.

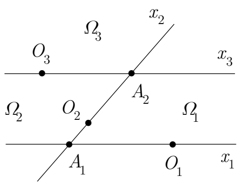
La réflexivité est évidente.
La relation est clairement symétrique puisqu'il suffit dans toutes les configurations d'échanger les indices.
La transitivité est très fastidieuse (plus de 25 cas en tenant compte de toutes les configurations !) mais facile. On va alors se contenter de s'intéresser à un seul cas, les autres se faisant soit immédiatement, soit de manière analogue à ce qui va suivre.
Soient Ω_1 (resp. Ω_2, resp. Ω_3) un demi-plan fermé, O_1 (resp. O_2, resp. O_3) un point de sa frontière et x_1 (resp. x_2, resp. x_3) une orientation de cette frontière, tous contenus dans le plan Π.
On considère trois drapeaux (O_1x_1, Ω_1), (O_2x_2, Ω_2) et (O_3x_3, Ω_3).

On suppose donc que les deux drapeaux (O_1x_1, Ω_1) et (O_2x_2, Ω_2) ont la même orientation selon la **configuration 3**.

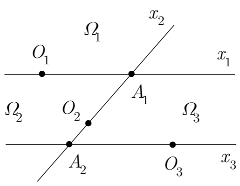
Supposons que les frontières des demi-plans Ω_1 et Ω_2 sont sécants en un point A_1, que $A_1x_2 \subset \Omega_1$, et que A_1x_1 est dans le demi-plan opposé à Ω_2.

On suppose donc que les deux drapeaux (O_2x_2, Ω_2) et (O_3x_3, Ω_3) ont la même orientation selon la **configuration 3**.

Supposons aussi que les frontières des demi-plans Ω_2 et Ω_3 sont sécants en un point A_2, que $A_2x_2 \subset \Omega_3$, et que A_2x_3 est dans le demi-plan opposé à Ω_2.
Supposons enfin que les frontières des demi-plans Ω_1 et Ω_3 sont parallèles.
Montrons alors que les drapeaux (O_1x_1, Ω_1) et (O_3x_3, Ω_3) ont la même orientation (**configuration 4**)).



Les frontières des demi-plans Ω_1 et Ω_3 étant parallèles, la demi-droite O_3x_3 est dans le demi-plan de frontière O_1x_1 contenant A_2, et la demi-droite O_1x_1 est dans le demi-plan de frontière O_3x_3 contenant A_1.
Deux possibilités s'offrent à nous.
- Si le point A_2 est sur la demi-droite A_1x_2, alors comme par hypothèse $A_1x_2 \subset \Omega_1$, il est sur Ω_1 et donc la demi-droite O_3x_3 est inclus dans Ω_1. Puis, comme le point A_1 est sur la demi-droite opposée à A_2x_2, il est sur le demi-plan opposé à Ω_3, ce qui montre que la demi-droite O_1x_1 est dans le demi-plan opposé à Ω_3.
- Si le point A_2 n'est pas sur la demi-droite A_1x_2, alors le point A_1 est sur la demi-droite A_2x_2, donc il est dans Ω_3 (puisque par hypothèse on a $A_2x_2 \subset \Omega_3$), ce qui prouve que la demi-droite O_1x_1 est dans Ω_3. Puis, comme le point A_2 est sur la demi-droite opposée à A_1x_2, il est sur le demi-plan opposé à Ω_1, ce qui montre que la demi-droite O_3x_3 est dans le demi-plan opposé à Ω_1.



Enfin, il reste à montrer que les demi-droites O_1x_1 et O_3x_3 sont du même côté de la droite (O_1O_3).
Par hypothèse, les demi-droites A_1x_1 et A_2x_3 sont dans le demi-plan opposé à Ω_2, donc elles sont du même côté de la droite (A_1A_2). On applique alors le **théorème 6** pour conclure. □

Théorème 8

Il n'y a que deux classes d'équivalence pour la relation « avoir la même orientation ».

Preuve

Montrons qu'il y a au moins deux classes.
Soient Ω_1 un demi-plan fermé, O_1 un point de sa frontière et x_1 une orientation de cette frontière, tous contenus dans un plan Π.
Appelons Ω_2 le demi-plan opposé à Ω_1 (son existence étant garanti).

C'est la **configuration 2** qui est mise à défaut dans la **définition 3**.

Il alors clair que les drapeaux (O_1x_1, Ω_1) et (O_1x_1, Ω_2) n'ont pas la même orientation.

Pour alléger, nous n'avons pas précisé les objets formant les trois drapeaux.

Pour montrer qu'il y a au plus deux classes, il suffit de montrer que si (O_1x_1, Ω_1), (O_2x_2, Ω_2) et (O_3x_3, Ω_3) sont trois drapeaux (du plan Π) tels que les drapeaux (O_1x_1, Ω_1) et (O_2x_2, Ω_2) n'ont pas le même sens et les drapeaux (O_3x_3, Ω_3) et (O_1x_1, Ω_1) n'ont pas le même sens, alors les drapeaux (O_2x_2, Ω_2) et (O_3x_3, Ω_3) ont le même sens.

Pour cela, traitons un cas très simple.
Supposons que les demi-plans Ω_1 et Ω_2 sont égaux et que les orientations x_1 et x_2 sont opposées.
Supposons aussi que les demi-plans Ω_1 et Ω_3 sont opposés et que les orientations x_1 et x_3 sont égales.
On va montrer que les drapeaux (O_2x_2, Ω_2) et (O_3x_3, Ω_3) ont la même orientation (**configuration 2**).
Des hypothèses, les demi-plans Ω_2 et Ω_3 sont opposés et les orientations x_1 et x_3 sont opposées, c'est ce qu'il fallait démontrer.
Les autres cas sont très fastidieux à traiter. Soit on fonctionne comme précédemment, soit on procède comme pour la démonstration de la transitivité. □

Remarques
Soit Π un plan.

Remarquez que c'est le même mot qu'on utilise pour la droite.

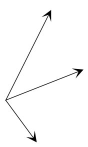
1. Une classe d'équivalence de la relation « avoir la même orientation » est appelée **orientation** (du plan Π).
2. Les deux orientations d'un plan sont dites **opposées** (ou **inverses**).
Pour ces dernières, on dira que l'une est la classe des **drapeaux gauches** et l'autre la classe des **drapeaux droits**.
Ainsi, on dira qu'on a orienté le plan lorsqu'on a choisi laquelle des deux classes est la classe des drapeaux gauches.

3 Orientation de l'espace

Cette partie peut clairement être « zappée » par le lecteur. Elle nous servira néanmoins dans un chapitre ultérieur.
Intuitivement, l'espace peut être orienté de deux façons comme pour le plan.

A Définitions

Cette notion est fondamentale pour orienter l'espace :



Définition 4
On appelle **trièdre** tout triplet de demi-droites non coplanaires et de même origine.

On dispose alors de la définition lourde suivante :

Définition 5
Soient deux trièdres (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) et (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2).

On parle ici du drapeau formé par la demi-droite O_ix_i et le demi-plan contenant la demi-droite O_iy_i.

Notons pour $i \in \mathbb{N}^*$, Π_i le plan contenant les demi-droites O_ix_i et O_iy_i, $\mathcal{O}_i$ l'orientation du plan Π_i contenant le drapeau (O_ix_i, O_iy_i), $\mathcal{E}_i$ le demi-espace de frontière Π_i contenant la demi-droite O_iz_i.
Dire que les trièdres (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) et (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) ont la **même orientation** signifie qu'on est dans l'une des trois configurations suivantes :
1) les plans Π_1 et Π_2 sont confondus, les orientations $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont égales, et les demi-espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont confondus, ou si les orientations $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont opposées et les demi-espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont opposés ;

On notera alors : $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)$.

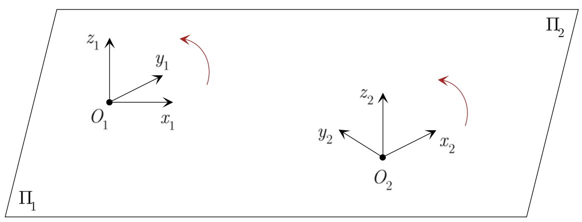
2) les plans Π_1 et Π_2 sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$, il existe trièdre (Ox, Oy, Oz) tel que la demi-droite Oy soit dans $\mathcal{D}$, la demi-droite Ox soit dans $\Pi_1 \cap \mathcal{E}_2$, la demi-droite Oz soit dans $\Pi_2 \cap \mathcal{E}_1$, et tel que :
$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (Ox, Oy, Oz)\,,\ (Oy, Oz, Ox) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)\ ;$$

Attention, les trièdres en relation sont au sens du premier cas !
On notera dans ce deuxième cas : $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)$.

3) les plans Π_1 et Π_2 sont parallèles, il existe un trièdre (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) tel que le plan Π_3 soit sécant avec Π_1 et Π_2, que :
$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)\,,\ (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)\,.$$

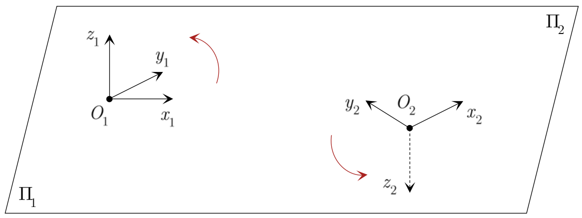
Voici le premier dessin illustrant la première configuration :

Les deux plans Π_1 et Π_2 sont orientés dans le même sens.

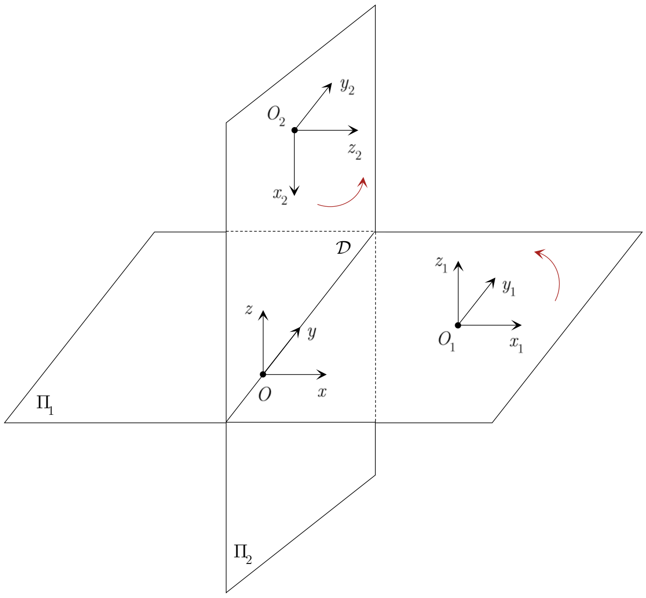


Voici l'autre dessin de la première configuration :

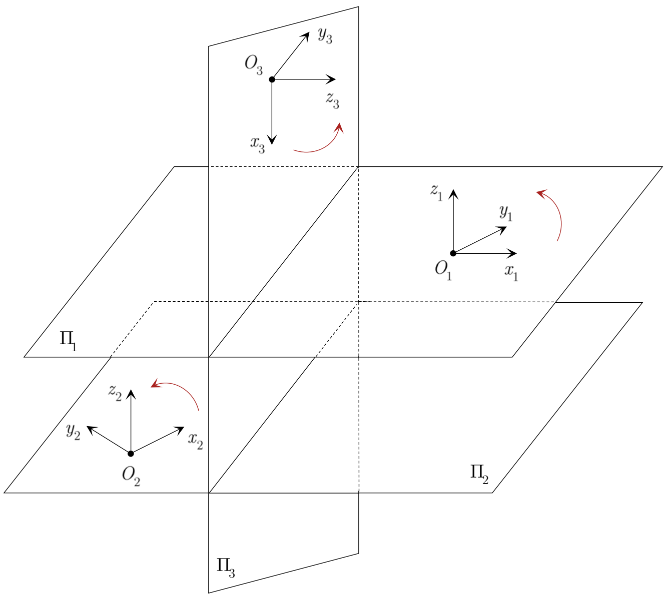
Les deux plans Π_1 et Π_2 sont orientés dans le même sens.
De plus, le trièdre (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) a « la tête en bas ».



Voici un dessin illustrant la deuxième configuration :



Voici un dessin illustrant la troisième configuration :



B Propriétés

Pour définir les orientations de l'espace, nous allons établir une relation d'équivalence sur les trièdres de l'espace.

Dans le **théorème 9**, on garde les mêmes notations que dans la **définition 5**.

Théorème 9

Soient (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1), (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) et (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) trois trièdres tel que les trois plans Π_1, Π_2 et Π_3 sont égaux.
Si $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)$ et $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$, alors :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

Preuve

Supposons que $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)$ et $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

Prenons le cas où les orientations $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont égales et les demi-espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont égaux.

Considérons aussi le cas où les orientations $\mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_3$ sont opposées et les demi-espaces $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ sont opposés.

Alors les orientations $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_3$ sont opposées et les demi-espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_3$ sont opposés, d'où :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

Les autres cas (il en reste trois), se traite très facilement de manière analogue. □

Dans le **théorème 10**, on garde les mêmes notations que dans la **définition 5**.

Théorème 10

Soient (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1), (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) et (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) trois trièdres tel que deux des trois plans Π_1, Π_2 et Π_3 soient confondus et sécants avec le troisième.

Si $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)$ et $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$, alors :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

La démonstration pourra être omise en première lecture.

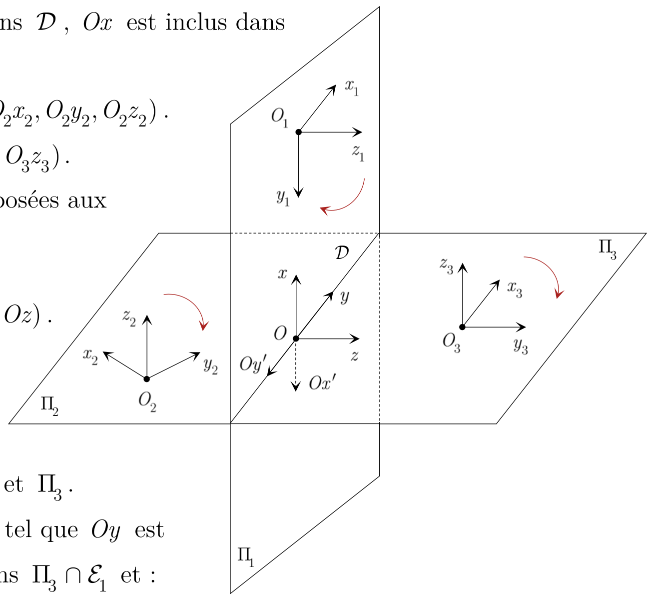
Preuve

Supposons que $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)$ et $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

- Supposons aussi que $\Pi_2 = \Pi_3$ et que le plan Π_1 est sécant avec le plan Π_2 en $\mathcal{D}$.

Il existe alors un trièdre (Ox, Oy, Oz) tel que Oy est dans $\mathcal{D}$, Ox est inclus dans $\Pi_1 \cap \mathcal{E}_2$, Oz est inclus dans $\Pi_2 \cap \mathcal{E}_1$ et tel que :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (Ox, Oy, Oz) \text{ et } (Oy, Oz, Ox) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2).$$



La relation $\sim$ étant symétrique selon la **configuration 1**, on a aussi : $(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (Oy, Oz, Ox)$.

D'après le **théorème 9**, on a $(Oy, Oz, Ox) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

Notons Ox' et Oy' les demi-droites respectivement opposées aux demi-droites Ox et Oy.

On a alors d'après la **définition 5** :

$(Oy, Oz, Ox) \sim (Oy', Oz, Ox')$ et $(Ox, Oy, Oz) \sim (Ox', Oy', Oz)$.

D'après le **théorème 9**, on a :

$(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (Oy', Oz, Ox')$ et

$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (Ox', Oy', Oz)$.

Traiton deux cas suivants les orientations des plans Π_2 et Π_3.

Si $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3$, alors $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$ et le trièdre (Ox, Oy, Oz) est tel que Oy est dans $\mathcal{D}$, Ox est inclus dans $\Pi_1 \cap \mathcal{E}_3$, Oz est inclus dans $\Pi_3 \cap \mathcal{E}_1$ et :

$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (Ox, Oy, Oz)$ et $(Oy, Oz, Ox) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

On en conclut alors par définition que $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

Si les orientations $\mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_3$ sont opposés, alors les demi-espaces $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ sont opposés et le trièdre (Ox', Oy', Oz) est tel que Oy' soit dans $\mathcal{D}$, Ox' soit dans $\Pi_1 \cap \mathcal{E}_3$, Oz est inclus dans $\Pi_3 \cap \mathcal{E}_1$ et :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (Ox', Oy', Oz) \text{ et } (Oy', Oz, Ox') \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

On en conclut alors par définition que $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

- La démonstration reste analogue dans le cas où $\Pi_1 = \Pi_2$ et Π_3 est sécant avec Π_2.

- Supposons aussi que $\Pi_1 = \Pi_3$ et que le plan Π_1 est sécant avec le plan Π_2.

Il existe alors un trièdre (Ox, Oy, Oz) tel que Oy est dans $\mathcal{D}$, Ox est inclus dans $\Pi_1 \cap \mathcal{E}_2$, Oz est inclus dans $\Pi_2 \cap \mathcal{E}_1$ et tel que :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (Ox, Oy, Oz) \text{ et } (Oy, Oz, Ox) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2).$$

Il existe aussi un trièdre $(O'x', O'y', O'z')$ tel que $O'y'$ soit dans $\mathcal{D}$, $O'x'$ soit dans $\Pi_2 \cap \mathcal{E}_3$, $O'z'$ soit dans $\Pi_3 \cap \mathcal{E}_2$ et tel que :

$$(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O'x', O'y', O'z') \text{ et } (O'y', O'z', O'x') \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

De ce qui précède, on a $(Oy, Oz, Ox) \sim (O'x', O'y', O'z')$.

Mais $(Ox, Oy, Oz) \sim (Oy, Oz, Ox)$, donc $(Ox, Oy, Oz) \sim (O'x', O'y', O'z')$.

Puis, sachant que $(O'x', O'y', O'z') \sim (O'y', O'z', O'x')$, on a $(Ox, Oy, Oz) \sim (O'y', O'z', O'x')$.

Le **théorème 9** permet alors de dire que $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$. □

Le cours du chapitre 3

Dans le **théorème 11**, on garde les mêmes notations que dans la **définition 5**.

Théorème 11

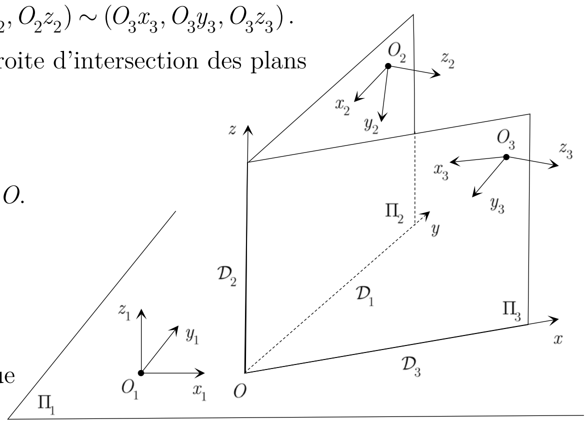
Soient (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1), (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) et (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) trois trièdres tel que les plans Π_1, Π_2 et Π_3 soient deux à deux sécants.
Si $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)$ et $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$, alors :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

Preuve

La relation $\sim$ étant symétrique selon la **configuration 2**, on a aussi : $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1)$.

Supposons que $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2)$ et $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.
Notons $\mathcal{D}_1$ la droite d'intersection des plans Π_1 et Π_2, $\mathcal{D}_2$ la droite d'intersection des plans Π_2 et Π_3, $\mathcal{D}_3$ la droite d'intersection des plans Π_1 et Π_3.
Selon les positions relatives de droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.



- Supposons que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont sécantes en un point O.
Alors le point O est un point commun aux plans Π_1 et Π_2.
Donc les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes en O.
Notons Ox la demi-droite contenue dans $\mathcal{D}_3$ et dans $\mathcal{E}_2$, Oz la demi-droite contenue dans $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{E}_1$, Oy la demi-droite contenue dans $\mathcal{D}_1$ et telle que les drapeaux (Ox, Oy) et (O_1x_1, O_1y_1) aient la même orientation.
On a donc, par définition, $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (Ox, Oy, Oz)$, puis en utilisant le **théorème 10**, on a :

$$(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (Ox, Oy, Oz).$$

Or, $(Oy, Oz, Ox) \sim (Ox, Oy, Oz)$, donc en utilisant à nouveau le **théorème 10** on a $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (Oy, Oz, Ox)$.
De nouveau, par le même théorème, on a $(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (Oy, Oz, Ox)$, mais $(Oy, Oz, Ox) \sim (Oz, Ox, Oy)$, donc par le **théorème 10** on a $(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (Oz, Ox, Oy)$.
Or, $(Oz, Ox, Oy) \sim (Ox, Oy, Oz)$, donc en utilisant le **théorème 10**, on a $(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (Ox, Oy, Oz)$.
Enfin, de nouveau, en utilisant le **théorème 10**, on a $(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1)$.

Ce qui donne bien : $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

- Supposons que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont confondues.
Alors la droite $\mathcal{D}_2$ est confondues avec les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.
Soit Π_4 un plan sécant avec la droite $\mathcal{D}_1$.

On se ramène au cas précédent.

Les plans Π_1, Π_2 et Π_4 d'une part, et les plans Π_2, Π_3 et Π_4 d'autre part sont dans le cas de figure précédent.
Soit (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) un trièdre tel que les demi-droites O_4x_4 et O_4y_4 soient dans le plan Π_4 et :

$$(O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2).$$

D'après ce qui a été démontré précédemment, on a :

$$(O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \text{ et } (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

Comme les plans Π_1, Π_3 et Π_4 sont dans le cas de figure précédent, on en conclut que :

$$(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1).$$

Ce qui donne bien : $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

- Supposons que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont parallèles.
Alors, d'après le **théorème du toit**, la droite $\mathcal{D}_2$ est parallèle aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.
Choisissons un point sur $\mathcal{D}_1$, un point sur $\mathcal{D}_2$ et un point sur $\mathcal{D}_3$.
Notons Π_4 le plan passant par ces trois points.
La preuve est alors la même que pour le cas précédent. □

Le lecteur pourra s'en convaincre avec un dessin.

On peut enfin énoncer le théorème suivant :

Théorème 12

La relation « avoir la même orientation » est une relation d'équivalence sur les trièdres de l'espace.

Preuve

Dans la démonstration, on garde les notations de la **définition 5**.

La réflexivité et la symétrie sont très facile à vérifier. La transitivité est plus délicate à justifier.
Soient trois trièdres (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1), (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) et (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) tels que :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \text{ et } (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

Suivant les positions relatives des plans Π_1, Π_2 et Π_3, il y a trois cas à envisager.

- Les plans Π_1 et Π_2 sont égaux.

Si $\Pi_2 = \Pi_3$, alors la transitivité résulte du **théorème 9**.

Si Π_2 et Π_3 sont sécants, alors la transitivité résulte du **théorème 10**.

Si les plans Π_2 et Π_3 sont parallèles, alors il existe un trièdre (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) tel que Π_4 soit sécant avec les plans Π_2 et Π_3, et que :

$$(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \text{ et } (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

D'après le **théorème 10**, la première relation entraîne que $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4)$.

On conclut de cette relation et de la précédente que $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

- Les plans Π_1 et Π_2 sont sécants.

Ce cas a été traité au-dessus.

Si $\Pi_2 = \Pi_3$, c'est le cas symétrique de $\Pi_1 = \Pi_2$, et Π_2 et Π_3 sont sécants.

Si Π_2 et Π_3 sont sécants, alors soit Π_1 et Π_3 sont sécants, auquel cas la transitivité est garantie par le **théorème 11**, soit les plans Π_2 et Π_3 sont parallèles, auquel cas les trièdres (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) et (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) ont la même orientation par définition.

Si les plans Π_2 et Π_3 sont parallèles, choisissons un point sur le plan Π_3 qui n'est pas sur le plan Π_1, et nommons Π_4 le plan passant par ce point et par la droite d'intersection des plans Π_1 et Π_2.

Alors le plan Π_4 est sécant avec les plans Π_1, Π_2 et Π_3.

Soit (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) un trièdre tel que le drapeau (O_4x_4, O_4y_4) soit dans Π_4, et :

$$(O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2).$$

D'après le sous-cas précédent, on obtient :

$$(O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \text{ et } (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

Soit, d'après ce même sous-cas :

$$(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

- Les plans Π_1 et Π_2 sont parallèles.

Alors, par définition, il existe un trièdre (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) tel que le plan Π_4 soit sécant avec les plans Π_1 et Π_2, et :

$$(O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1), \ (O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3).$$

Dans le deuxième cas, on a démontré la transitivité, on a donc $(O_4x_4, O_4y_4, O_4z_4) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

Soit, d'après ce même deuxième cas, $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$. □

Théorème 13

Remarquer que ce théorème est le même que le **théorème 8**, à la différence près qu'il s'agit ici d'une relation entre les trièdres de l'espace (alors que c'est entre les drapeaux d'un plan pour l'autre théorème).

Il n'y a que deux classes d'équivalence pour la relation « avoir la même orientation ».

Preuve

Soient (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) un trièdre et O_1z_1' la demi-droite opposée à O_1z_1.

Utilisation de la **définition 5** et des notations de cette définition.

Les trièdres (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) et $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1')$ n'ont pas la même orientation, ce qui montre qu'il existe au moins deux classes d'équivalence.

Montrons à présent qu'il y a au plus deux classes d'équivalence.

Soit (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) un autre trièdre.

- Supposons que les plans Π_1 et Π_2 sont égaux.

Alors par définition on a soit $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, soit $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$, soit $\mathcal{O}_1 \neq \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, soit $\mathcal{O}_1 \neq \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$.

Dans le premier et le quatrième cas, on a $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1)$.

Dans le deuxième et le troisième cas, on a $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1')$.

- Supposons maintenant que les plans Π_1 et Π_2 sont sécants.

Soit (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) un trièdre tel la demi-droite O_3x_3 soit dans la droite d'intersection des plans Π_1 et Π_2, la demi-droite O_3x_3 soit dans le plan Π_2 et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3$, et O_3z_3 soit dans $\Pi_1 \cap \mathcal{E}_2$.

Alors on a $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

Mais, on a aussi :

$$(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (O_3z_3, O_3x_3, O_3y_3).$$

De plus, les plans Π_1 et Π_3 sont égaux, donc le trièdre (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) est dans l'une des classes d'équivalence du trièdre (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) ou $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1')$.

Par transitivité, on conclut que :

$$(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \text{ ou } (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1').$$

- Supposons que les plans Π_1 et Π_2 sont parallèles.

Soient Π_3 un plan sécant avec les plans Π_1 et Π_2, (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) un trièdre tel que la demi-droite O_3x_3 soit dans la droite d'intersection des plans Π_2 et Π_3, la demi-droite O_3y_3 soit dans le plan Π_2 et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3$, et la demi-droite O_3z_3 soit dans $\Pi_3 \cap \mathcal{E}_2$.

On a alors $(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3)$.

Mais, on sait aussi que $(O_3x_3, O_3y_3, O_3z_3) \sim (O_3z_3, O_3x_3, O_3y_3)$.

De plus, les plans Π_1 et Π_3 sont sécants, donc le trièdre (O_3z_3, O_3x_3, O_3y_3) est dans l'une des classes d'équivalence du trièdre (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) ou $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1')$.

Par transitivité, on conclut que :

$$(O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1) \text{ ou } (O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2) \sim (O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1'). \qquad \square$$

Remarques

1. Une classe d'équivalence pour la relation « avoir la même orientation » (pour les trièdres) est appelée **orientation** (de l'espace).
2. Le deux orientations de l'espace sont dites **opposées** (ou **inverses**).

Pour ces dernières, on dira que l'une est la classe des **trièdres positifs** et l'autre la classe des **trièdre négatifs**.

Ainsi, on dira qu'on a orienté l'espace lorsqu'on a choisi laquelle des deux classes est la classe des trièdres positifs.